Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2004-2005
Licence de Mathématiques

C. Basdevant - S. Allassonnière

Examen
d'Analyse Numérique
du mardi 25 janvier 2005
Durée : 3h
Notes de cours autorisées
Les trois problèmes sont indépendants

Problème I

1. Etablir une formule de quadrature à l'ordre le plus élevé possible de la forme :

$$\int_{-1}^{1} f(x)|x|dx \approx \alpha f(x_\alpha) + \beta f(x_\beta)$$

2. Donnez, en évoquant un théorème du cours et sans faire de calculs, une formule liant l'erreur de quadrature à une dérivée de f.

Problème II

Recherche des valeurs propres d'une matrice par la méthode LU

Soit A une matrice réelle $n \times n$, inversible, diagonalisable en base réelle avec toutes ses valeurs propres distinctes et Q une matrice de passage qui la diagonalise avec :

$$A = QDQ^{-1} \qquad D = \operatorname{diag}(\lambda_i) \qquad |\lambda_i| > |\lambda_{i+1}| \quad \text{pour } i = 1, \cdots, n-1$$

On suppose que Q et Q^{-1} admettent chacune une décomposition LU :

$$Q = LR \quad \text{et} \quad Q^{-1} = MS$$

avec L et M des matrices triangulaires inférieures à diagonale unité, et R et S des matrices triangulaires supérieures.
On considère alors l'algorithme suivant qui a pour but de calculer les valeurs propres de A.

On supposera dans la suite que toutes les décompositions LU nécessaires sont possibles (voir les conditions dans le cours).

- On pose $A_1 = A$ et on effectue sa décomposition LU : $A_1 = L_1U_1$
- On pose $A_2 = U_1L_1$ et on effectue sa décomposition LU : $A_2 = L_2U_2$
- $\cdots$
- On pose $A_k = U_{k-1}L_{k-1}$ et on effectue sa décomposition LU : $A_k = L_kU_k$

1. Vérifier que $A_{k+1} = L_k^{-1}A_kL_k$ et montrer que les matrices A_k ont les mêmes valeurs propres que A. En déduire que, si les matrices A_k convergent vers une matrice triangulaire, leurs éléments diagonaux convergent vers les valeurs propres de A.
2. On pose $B_k = D^kMD^{-k}$. Calculer la valeur de l'élément $(B_k)_{i,j}$ d'indices i, j de B_k en fonction des éléments de M et des valeurs propres λ_l de A. En déduire que B_k converge vers la matrice identité.

3. Déduire de la question précédente que la matrice A^k s'écrit sous la forme $A^k = L(Id + E_k)R_k$, avec R_k une matrice triangulaire supérieure que l'on déterminera et E_k une matrice de limite nulle.
4. On pose $M_k = L_1 L_2 \cdots L_{k-1} L_k$ et $S_k = U_k U_{k-1} \cdots U_2 U_1$. Vérifier, par récurrence sur k, que $A^k = M_k S_k$.
5. On pose $T_k = R_k S_k^{-1}$. Montrer que T_k converge vers l'identité. Montrer que $U_k = T_k^{-1} R D R^{-1} T_{k-1}$. En déduire que U_k converge (vers une matrice triangulaire supérieure).
6. Déduire des questions précédentes que : $M_k \to L$ et $L_k \to Id$.
7. Conclure que les matrices A_k convergent vers une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.

Problème III

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, $n + 1$ points distincts de $[a, b]$. On pose :

$$\pi(x) = \prod_{i=0}^{i=n} (x - x_i) \quad \text{et pour } i = 0, \cdots, n \quad l_i(x) = \frac{\pi(x)}{(x - x_i)\pi'(x_i)}$$

Soit f une fonction de $C^1([a, b])$, on désigne par H son polynôme d'interpolation d'Hermite de degré inférieur ou égal à $2n + 1$ tel que :

$$H(x_i) = f(x_i) \qquad \text{et} \qquad H'(x_i) = f'(x_i) \qquad \text{pour } i = 0, \cdots, n$$

1. Vérifiez que l'on a :

$$H(x) = \sum_{i=0}^{i=n} [f(x_i) h_i(x) + f'(x_i) k_i(x)]$$

   où les polynômes h_i et k_i sont donnés par :

$$h_i(x) = [1 - 2l_i'(x_i)(x - x_i)]\ l_i^2(x) \qquad k_i(x) = (x - x_i)\ l_i^2(x)$$

2. Montrez qu'il existe une unique formule de quadrature de la forme :

$$\int_a^b g(x)dx \approx \sum_{i=0}^{i=n} [a_i\ g(x_i) + b_i\ g'(x_i)]$$

   qui soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à $2n + 1$. Déterminez les coefficients a_i et b_i en fonction de a, b et des x_j.
3. Montrez que si g est $2n + 2$ fois continûment dérivable dans $[a, b]$, on a :

$$\left| \int_a^b g(x)dx - \sum_{i=0}^{i=n} [a_i\ g(x_i) + b_i\ g'(x_i)] \right| \leq C\ (b-a)^{(2n+3)}\ Sup\{\ |g^{(2n+2)}(x)|\ ;\ a \leq x \leq b\}$$

   où la constante C est indépendante de a,b et g.