Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2005-2006
Licence de Mathématiques L3

C. Basdevant - A. Abdesselam - L. Molinet

Examen
d'Analyse Numérique
du mardi 29 novembre 2005

Durée : 3h
Notes de cours autorisées
Les trois problèmes sont indépendants

Problème I

Soit A une matrice carrée réelle $n \times n$ inversible, b et c deux vecteurs de dimension n et d un réel, on considère la matrice B carrée $(n+1) \times (n+1)$ écrite (par blocs) comme :

$$B = \begin{pmatrix} A & b \\ c^t & d \end{pmatrix}$$

où c^t désigne le vecteur ligne transposé du vecteur colonne c.
On suppose que A et B admettent chacune une décomposition LU (L triangulaire inférieure à diagonale unité, U triangulaire supérieure), soit :

$$A = L_A U_A \qquad B = L_B U_B$$

On pose alors (même découpage par blocs que pour la matrice B) :

$$L_B = \begin{pmatrix} M & 0 \\ m^t & 1 \end{pmatrix} \qquad U_B = \begin{pmatrix} V & v \\ 0 & w \end{pmatrix}$$

1. Calculez M, m, V, v, w en fonction de L_A, U_A, b, c, d.
2. Montrez que $\det B = w \det A$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible.
   On supposera dans la suite que cette condition est remplie et que B est inversible
3. Démontrez la formule suivante :
$$L_B^{-1} = \begin{pmatrix} L_A^{-1} & 0 \\ -c^t A^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$
4. Trouvez une formule similaire pour U_B^{-1}.
5. En déduire une expression de B^{-1} en fonction de A^{-1}, b, c et d.
6. Soit f un vecteur de dimension n et x la solution de $Ax = f$, soit g un réel, montrez que la solution y du problème
$$By = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$
   s'écrit sous la forme
$$y = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{w} \begin{pmatrix} A^{-1}b \\ -1 \end{pmatrix}$$
   avec β un réel que l'on déterminera.

Problème II

Soit A une matrice carrée réelle $n \times n$ non négative ($A \geq 0$, c'est à dire, $\forall i, j \; a_{i,j} \geq 0$). L'objet du problème est de montrer le résultat suivant (pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\rho(A)$ le rayon spectral de A) :

$$\alpha > \rho(A) \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha I - A) \text{ est inversible et } (\alpha I - A)^{-1} \geq 0 \tag{1}$$

1. Soit α un réel tel que $\alpha > \rho(A)$. Montrez que $(\alpha I - A)$ est inversible et que :

   $$(\alpha I - A)^{-1} = \alpha^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{A}{\alpha})^k$$

   On vérifiera que la série est convergente. En déduire que la matrice $(\alpha I - A)^{-1}$ est non négative.

   Pour démontrer la réciproque, on suppose maintenant que $(\alpha I - A)^{-1}$ est non négative.
2. Soit e le vecteur de dimension n dont toutes les composantes sont égales à 1. On pose :

   $$d = (\alpha I - A)^{-1} e$$

   Montrez que toutes les composantes de d sont strictement positives.
3. Soit D la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les composantes de d. Montrez que le vecteur $D^{-1}(\alpha I - A)De$ a toutes ses composantes strictement positives.
4. En déduire :

   $$\forall i, \; \alpha > \sum_{j=1}^{n} (D^{-1}AD)_{i,j} \quad \text{et} \quad \alpha > \|D^{-1}AD\|_\infty$$
5. Conclure la démonstration de (1).

Problème III

Soit A une matrice réelle, $n \times n$, symétrique, définie positive.
Pour résoudre le système :

$$Ax = b \;, \qquad b \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \tag{2}$$

on considère la méthode itérative suivante pour laquelle x_0 est arbitraire et σ est un paramètre réel :

$$x_{n+1} = (I - \sigma A) \; x_n + \sigma b \tag{3}$$

1. Montrez que la méthode (3) converge vers la solution du système (2) si et seulement si :

   $$0 < \sigma < \frac{2}{\rho(A)} \;,$$

   où $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de A.
2. Montrez que la vitesse de convergence de la méthode (3) est maximale pour une valeur de σ que l'on exprimera en fonction de $\rho(A)$ et $\rho(A^{-1})$.