Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2006-2007
Licence de Mathématiques - L3
C. Basdevant - L. Molinet - Th. Clémenceau

Examen d'Analyse Numérique du mardi 16 janvier 2007

Durée : 3h
Notes de cours autorisées

Problème I

On considère une formule de quadrature de la forme :

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + E(f)$$

1. Montrez que si on impose $x_1 = -1$ ou $x_2 = 1$ alors la méthode est au plus exacte sur $\mathcal{P}_2$, l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On pourra pour cela exhiber un polynôme de signe constant sur $[-1, 1]$ et tel que $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = 0$ quels que soient λ_1 et λ_2.
2. On pose $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$.
   (a) Trouvez λ_1 et λ_2 tels que la méthode soit d'ordre le plus élevé possible.
   (b) Calculez le noyau de Péano et montrez qu'il est de signe constant dans $]-1, 1[$.
   (c) En déduire qu'alors, pour tout $f \in C^2([-1, 1])$, il existe $\xi_f \in [-1, 1]$ tel que

   $$E(f) = -\frac{2}{15} f^{(2)}(\xi_f)$$

3. Déterminez λ_1, λ_2 et x_1, x_2 pour que la méthode soit exacte sur $\mathcal{P}_3$.

Problème II

L'objectif du problème est d'étudier une procédure d'accélération de convergence pour une méthode de résolution d'un système linéaire.
On utilisera les polynômes de Chebychev, dont on rappelle la définition et les propriétés :

$$T_n(t) = \cos(n \arccos(t)),\ |t| \leq 1$$

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_{n+1}(t) = 2t\,T_n(t) - T_{n-1}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sur $[-1, +1]$ le polynôme T_n, de degré n, atteint $n+1$ valeurs extrémales $T_n(\xi_i) = (-1)^i$ aux points $\xi_i = \cos(\frac{i\pi}{n}),\ 0 \leq i \leq n$.
On désignera dans la suite par $\tilde{P}_n$ l'ensemble des polynômes p, de degré inférieur ou égal à n, tels que $p(1) = 1$.

1. Soit $0 < a < 1$
   (a) montrez que $\forall n,\ T_n(\frac{1}{a}) \neq 0$.
   On pose :
   $$\tilde{T}_n(t) = \frac{T_n(\frac{t}{a})}{T_n(\frac{1}{a})}$$
   (b) Montrez que $\tilde{T}_n \in \tilde{P}_n$ et déterminez les couples $(t_i, \tilde{T}_n(t_i))$ avec $t_i \in [-a, a]$ où $|\tilde{T}_n(t)|$ est maximal.
   (c) Soit $p \in \tilde{P}_n$ tel que
   $$\max_{-a \leq t \leq a} |p(t)| < \max_{-a \leq t \leq a} |\tilde{T}_n(t)|$$
   montrez que le polynôme $q = \tilde{T}_n - p$ s'annule en $n+1$ points distincts.
   (d) En déduire que :
   $$\inf_{p \in \tilde{P}_n} \left\{ \max_{-a \leq t \leq a} |p(t)| \right\} = \max_{-a \leq t \leq a} |\tilde{T}_n(t)|$$
2. Soit B une matrice réelle $m \times m$ telle que $\rho(B) < 1$, $\rho(B)$ désignant le rayon spectral de B. Pour résoudre le système linéaire, trouver $x \in \mathbb{R}^m$ tel que
   $$(I - B)x = c$$
   avec c donné dans $\mathbb{R}^m$, on considère la méthode itérative :
   $$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad x^{(0)} \text{ arbitraire}$$
   Démontrez que la suite $(x^{(k)})$ converge vers x.
3. Pour accélérer sa convergence on construit, à partir de la suite $(x^{(k)})$ une suite $(y^{(k)})$ de $\mathbb{R}^m$ par :
   $$y^{(k)} = \sum_{i=0}^{i=k} \alpha_{ik}\, x^{(i)}$$
   où les coefficients réels $\alpha_{ik},\ 0 \leq i \leq k,\ k \geq 0$ vérifient $\sum_{i=0}^{i=k} \alpha_{ik} = 1$ et sont à déterminer au mieux.
   On définit pour cela le polynôme $p_k \in \tilde{P}_k$ par :
   $$p_k(t) = \sum_{i=0}^{i=k} \alpha_{ik}\, t^i$$
   et on pose $\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x, \quad \eta^{(k)} = y^{(k)} - x$.
   Montrez que $\varepsilon^{(k)} = B^k \varepsilon^{(0)}$ et $\eta^{(k)} = p_k(B)\varepsilon^{(0)}$.
4. On suppose désormais que B est une matrice symétrique de valeurs propres notées $\lambda_i,\ 1 \leq i \leq m$. Montrez que :
   $$\|p_k(B)\|_2 = \max_{1 \leq i \leq m} |p_k(\lambda_i)|$$
5. On suppose que l'on a l'estimation $\rho(B) \lesssim r < 1$, justifiez alors le choix suivant pour le polynôme p_k :
   $$p_k(t) = \frac{T_k(\frac{t}{r})}{T_k(\frac{1}{r})}$$
   On montrera en particulier que la suite $(y^{(k)})$ converge vers x et qu'elle converge plus vite que la suite $(x^{(k)})$.

6. Montrez qu'alors :

$$T_{k+1}(\tfrac{1}{r})\,\eta^{(k+1)} = \tfrac{2}{r}\,T_k(\tfrac{1}{r})\,B\eta^{(k)} - T_{k-1}(\tfrac{1}{r})\,\eta^{(k-1)}$$

7. En déduire que :

$$y^{(k+1)} = \omega_{k+1}\left(By^{(k)} + c - y^{(k-1)}\right) + y^{(k-1)}$$

avec

$$\omega_{k+1} = \frac{2\,T_k(\frac{1}{r})}{r\,T_{k+1}(\frac{1}{r})} = 1 + \frac{T_{k-1}(\frac{1}{r})}{T_{k+1}(\frac{1}{r})}$$

8. Expliquez comment mettre en œuvre en pratique cette méthode, on explicitera en particulier les différentes étapes de calcul.