Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2007-2008
Licence de Mathématiques - L3
C. Basdevant - S. Layouni

Corrigé de l'examen partiel d'Analyse Numérique du mardi 6 novembre 2007

Durée : 3h
Notes de cours autorisées

Avertissement : Hormis les notations, les quatre parties sont indépendantes, il est néanmoins conseillé de les traiter dans l'ordre.

Problème - Première partie

Soit A une matrice réelle $n \times n$ inversible. Le but du problème est d'étudier des schémas itératifs pour résoudre le système $Ax = b$, où b est un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$.
Soit M une matrice (facilement) inversible. On considère des méthodes de la forme :

$$M(x^{k+1} - x^k) = \alpha^k r^k \quad \text{avec} \quad r^k = b - Ax^k \tag{1}$$

où les α^k sont des réels non nuls à déterminer et x^0 est quelconque.

1. Montrez qu'en posant $z^k = \frac{x^{k+1}-x^k}{\alpha^k}$ la méthode s'écrit :

$$\begin{cases} Mz^k = r^k \\ x^{k+1} = x^k + \alpha^k z^k \\ r^{k+1} = r^k - \alpha^k Az^k \end{cases} \tag{2}$$

Corrigé : En divisant par α^k l'équation (1) on obtient $Mz^k = r^k$. La deuxième équation $x^{k+1} = x^k + \alpha^k z^k$ se déduit immédiatement de la définition de z^k. Quant à la dernière équation elle s'obtient ainsi : $r^{k+1} = b - Ax^{k+1} = b - A(x^k + \alpha^k z^k) = r^k - \alpha^k Az^k$. Note : ces trois équations constituent une façon pratique d'implémenter l'algorithme.

2. Montrez que si les α^k ne dépendent pas de k (i.e. $\alpha^k = \alpha$, $\forall k$) la méthode s'écrit :

$$x^{k+1} = Bx^k + c \tag{3}$$

avec $B = I - \alpha M^{-1}A$ la matrice d'itération et c un vecteur que l'on determinera.

Corrigé : De l'équation (1) on tire : $x^{k+1} = x^k + M^{-1}\alpha^k r^k = x^k + M^{-1}\alpha^k(b - Ax^k)$, d'où $x^{k+1} = (I - \alpha^k M^{-1}A)x^k + M^{-1}\alpha^k b$. D'où le résultat avec $B = I - \alpha M^{-1}A$ et $c = \alpha M^{-1}b$.

3. Montrez que si la suite x^k de la méthode (3) converge, elle converge vers la solution du système $Ax = b$.

   Corrigé : Supposons la suite x^k convergente de limite y ; en passant à la limite dans l'équation (3) on obtient $y = By + c$ soit $y = (I - \alpha M^{-1}A)y + \alpha M^{-1}b$. D'où l'on tire, puisque $\alpha \neq 0$, $Ay = b$, y est donc bien la solution du système considéré.

4. Montrez que les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et Relaxation sont des méthodes du type (3) pour des valeurs de M et α que l'on déterminera.

   Corrigé : La méthode itérative de Jacobi s'écrit $Dx^{k+1} = (E+F)x^k + b$ où D est la partie diagonale (par points ou par blocs), $-E$ le triangle inférieur et $-F$ le triangle supérieur, avec $A = D-E-F$. On peut donc l'écrire $x^{k+1} = D^{-1}(D-A)x^k + D^{-1}b = (I-D^{-1}A)x^k + D^{-1}b$. La méthode de Jacobi est alors sous la forme (3) avec $M = D$ et $\alpha = 1$.
   De même la méthode de Gauss-Seidel s'écrit $(D-E)x^{k+1} = Fx^k + b$, ce qui se transforme en $x^{k+1} = (D-E)^{-1}(D-E-A)x^k + (D-E)^{-1}b = (I-(D-E)^{-1}A)x^k + (D-E)^{-1}b$. La méthode de Gauss-Seidel est alors sous la forme (3) avec $M = D-E$ et $\alpha = 1$.
   Enfin, la méthode de relaxation est $(\frac{1}{\omega}D - E)x^{k+1} = (\frac{1-\omega}{\omega}D + F)x^k + b$, soit $x^{k+1} = (\frac{1}{\omega}D-E)^{-1}(\frac{1}{\omega}D-E-A)x^k + (\frac{1}{\omega}D-E)^{-1}b = (I-(\frac{1}{\omega}D-E)^{-1}A)x^k + (\frac{1}{\omega}D-E)^{-1}b$. La méthode de relaxation est alors sous la forme (3) avec $M = \frac{1}{\omega}D - E$ et $\alpha = 1$.

Problème - Deuxième partie

La transformée de Cayley $\Gamma(L)$ d'une matrice carrée L telle que $I-L$ soit inversible, est la matrice définie par :

$$\Gamma(L) = (I-L)^{-1}(I+L)$$

5. Déterminez l'inverse de la transformée de Cayley et montrez que la transformée de Cayley est une bijection de l'ensemble des matrices L telles que $I-L$ est inversible sur l'ensemble des matrices H telles que $I+H$ est inversible.

   Corrigé : Montrons tout d'abord que $I+\Gamma(L)$ est inversible quand $I-L$ est inversible. Si $(I+\Gamma(L))x = 0$, comme $(I-L)\Gamma(L)x = (I+L)x$, en remplaçant $\Gamma(L)x$ par $-x$ dans cette deuxième relation on trouve $x = 0$.
   De la définition de $\Gamma(L)$ on tire $(I-L)\Gamma(L) = I+L$, puis $\Gamma(L) - I = L(\Gamma(L)+I)$ et enfin, puisque $I+\Gamma(L)$ est inversible $L = (\Gamma(L)-I)(\Gamma(L)+I)^{-1}$. La transformée de Cayley est donc bien une bijection de l'ensemble des matrices L telles que $I-L$ est inversible sur l'ensemble des matrices H telles que $I+H$ est inversible, la transformée inverse s'écrivant $\Gamma^{-1}(H) = (H-I)(H+I)^{-1}$.

6. Etablir une bijection entre les valeurs propres de L et celles de $\Gamma(L)$ quand la transformée existe.

Corrigé : Soit λ une valeur propre de L et x un vecteur propre associé, on sait que $\lambda \neq 1$. Alors x est aussi vecteur propre de $I + L$ pour la valeur propre $1 + \lambda$, de $I - L$ pour la valeur propre $1 - \lambda$, de $(I - L)^{-1}$ pour la valeur propre $(1 - \lambda)^{-1}$ et donc de $\Gamma(L)$ pour la valeur propre $\mu = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$. Réciproquement si $\mu \neq -1$ est valeur propre de $\Gamma(L)$, $\lambda = \frac{\mu-1}{\mu+1}$ est valeur propre de L. L'application qui à λ associe $\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$ est donc une bijection du spectre de L sur le spectre de $\Gamma(L)$.

7. En déduire que le rayon spectral de L est strictement inférieur à 1 si et seulement si le spectre de sa transformée de Cayley $\Gamma(L)$ est contenu dans le demi-plan complexe $\{z | \Re z > 0\}$ ($\Re z$ désigne la partie réelle du complexe z).

   Corrigé : Soit λ une valeur propre de L et $\mu = a + ib$ la valeur propre associée de $\Gamma(L)$, d'après la question précédente $\lambda = \frac{\mu-1}{\mu+1} = \frac{a-1+ib}{a+1+ib}$, et donc $|\lambda|^2 = \frac{(a-1)^2+b^2}{(a+1)^2+b^2}$. Le rayon spectral de L sera strictement inférieur à 1 si et seulement si $|\lambda| < 1$, $\forall\ \lambda$, soit $(a-1)^2 + b^2 < (a+1)^2 + b^2$ ce qui est équivalent à $a > 0$, soit $\Re\mu > 0$ pour toutes les valeurs propres μ de $\Gamma(L)$.

8. En étudiant la transformée de Cayley de la matrice $I - \alpha M^{-1}A$, montrez que la méthode (3), avec $\alpha > 0$ indépendant de k, est convergente si et seulement si les valeurs propres λ de la matrice $M^{-1}A$ vérifient :

$$\alpha\,|\lambda|^2 < 2\,\Re\lambda$$

   Corrigé : Soit $B = I - \alpha M^{-1}A$, alors $\Gamma(B) = (\alpha M^{-1}A)^{-1}(2I - \alpha M^{-1}A) = (M^{-1}A)^{-1}(\frac{2}{\alpha}I - M^{-1}A)$. On en déduit que λ est valeur propre de $M^{-1}A$ si et seulement si $\frac{2}{\alpha\lambda} - 1$ est valeur propre de $\Gamma(B)$.
   La méthode (3) est convergente si et seulement si le rayon spectral de B est strictement inférieur à 1 et donc, d'après la question précédente, si et seulement si le spectre de $\Gamma(B)$ est dans le demi plan complexe $\Re z > 0$, ce qui demande $\Re(\frac{2}{\alpha\lambda} - 1) > 0$ pour toute valeur propre de $M^{-1}A$. En multipliant numérateur et dénominateur par le complexe conjugué de λ, et α étant positif, on obtient comme condition nécessaire et suffisante de convergence $\alpha\,|\lambda|^2 < 2\,\Re\lambda$ pour toute valeur propre de $M^{-1}A$.

9. En déduire que l'on peut trouver α, tel que la méthode (3) soit convergente, si et seulement si le spectre de $M^{-1}A$ est inclus dans le demi-plan complexe $\{z | \Re z > 0\}$.

   Corrigé : S'il existe une valeur propre de $M^{-1}A$ de partie réelle négative ou nulle il est clair que la condition trouvée à la question précédente ne peut être réalisée et ceci quel que soit α. Réciproquement, si le spectre de $M^{-1}A$ est inclus dans le demi-plan complexe $\{z | \Re z > 0\}$ on pourra prendre $\alpha \in]0, \min(2\Re\lambda/|\lambda|^2)\,[$.

Problème - Troisième partie

10. On suppose que le spectre de $M^{-1}A$ est inclus dans $]0, +\infty[$, et soit $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ ses plus petite et plus grande valeurs propres. Déterminez en fonction de $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ le paramètre α^* optimal pour la méthode (3). Calculez le rayon spectral ρ^* de la matrice d'itération associée.

    Corrigé : Le rayon spectral $\rho(B_\alpha)$ de la matrice d'itération $B_\alpha = I - \alpha M^{-1}A$ de la méthode (3) est donné par $\rho(B_\alpha) = \max|1 - \alpha\lambda|$, le max étant pris sur toutes les valeurs propres de $M^{-1}A$. Compte tenu de l'hypothèse sur ces valeurs propres on se ramène à $\rho(B_\alpha) = \max(|1 - \alpha\lambda_{\min}|, |1 - \alpha\lambda_{\max}|)$. Un simple dessin permet de voir que le minimum de cette fonction est obtenu pour le paramètre optimal $\alpha^* = 2/(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})$, le rayon spectral étant alors $\rho^* = (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})/(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})$. Plus précisément on a $\rho(B_\alpha) = 1 - \alpha\lambda_{\min}$ si $\alpha \leq \alpha^*$ et $\rho(B_\alpha) = \alpha\lambda_{\max} - 1$ si $\alpha \geq \alpha^*$, et on vérifie que $\rho(B_\alpha) < 1$ pour $0 < \alpha < 2/\lambda_{\max}$ conformément au résultat de la question 8.

11. On suppose que $M^{-1}A$ est symétrique, définie positive. Montrez que :

    $$\|I - \alpha^* M^{-1}A\|_2 = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

    où $\|B\|_2$ désigne la norme matricielle induite par la norme Euclidienne $\|x\|_2$ de $\mathbb{R}^n$.

    Corrigé : Si $M^{-1}A$ est symétrique, définie positive, d'une part le résultat de la question précédente s'applique et d'autre part la matrice $I - \alpha^* M^{-1}A$ est symétrique, donc son rayon spectral est égal à sa norme pour la norme matricielle induite par la norme vectorielle euclidienne, d'où le résultat demandé.

12. Montrez que pour que la méthode soit performante il faut que le rapport $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ soit aussi proche de 1 que possible et donc que M^{-1} soit une bonne approximation de A^{-1} (M s'appelle une matrice de pré-conditionnement).

    Corrigé : Pour que la méthode soit performante il faut que le rayon spectral ρ^* de la matrice d'itération soit le plus petit possible, comme il s'écrit $\frac{q-1}{q+1}$ avec $q = \lambda_{\max}/\lambda_{\min} \geq 1$, une simple étude de cette fonction montre qu'il faut avoir $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ le plus proche possible de 1, soit $M^{-1}A \approx I$.

13. Pour M symétrique, définie positive, on définit un produit scalaire $(x, y)_M$ sur $\mathbb{R}^n$ par :

    $$(x, y)_M = (x, My)$$

    où (x, y) désigne le produit scalaire Euclidien. On notera $\|x\|_M$ et $\|B\|_M$ les normes vectorielles et matricielles associées.
    Montrez que si A est symétrique, définie positive, $M^{-1}A$ est auto-adjoint pour ce produit scalaire et que ses valeurs propres sont dans $]0, +\infty[$. En déduire que :

    $$\|I - \alpha^* M^{-1}A\|_M = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

Corrigé :

- Montrons que si C est auto-adjoint pour le M-produit scalaire alors $C^t = MCM^{-1}$. En effet $(x, Cy)_M = (Cx, y)_M$, ce qui implique $(x, MCy) = (Cx, My)$ et donc $(MC)^t = MC$, d'où le résultat.
- Montrons que si C est auto-adjoint pour le M-produit scalaire, alors $\rho(C) = \|C\|_M$.
  La matrice M étant symétrique définie positive, elle admet une racine carrée symétrique définie positive notée $M^{1/2}$.
  Maintenant, $\|C\|_M^2 = \sup_x \frac{(Cx,Cx)_M}{(x,x)_M} = \sup_x \frac{(Cx,MCx)}{(x,Mx)} = \sup_{y=M^{1/2}x} \frac{\|M^{1/2}CM^{-1/2}y\|_2^2}{\|y\|_2^2} = \|M^{1/2}CM^{-1/2}\|_2^2$.
  Mais $M^{1/2}CM^{-1/2}$ est symétrique, en effet $(M^{1/2}CM^{-1/2})^t = M^{-1/2}C^tM^{1/2} = M^{-1/2}MCM^{-1}M^{1/2} = M^{1/2}CM^{-1/2}$.
  On en déduit $\|M^{1/2}CM^{-1/2}\|_2 = \rho(M^{1/2}CM^{-1/2}) = \rho(C)$, la dernière égalité parce que ces matrices sont semblables. On a bien démontré que $\rho(C) = \|C\|_M$ si C est M-auto-adjoint.
- Montrons que les valeurs propres de $M^{-1}A$ sont dans $]0, +\infty[$.
  En effet, $M^{1/2}(M^{-1}A)M^{-1/2} = M^{-1/2}AM^{-1/2}$ ce qui prouve que la matrice $M^{-1}A$ est semblable à une matrice symétrique définie positive, elles ont donc les mêmes valeurs propres et celles-ci sont réelles strictement positives.
- Nous sommes ainsi dans les hypothèses de la question 10 et donc $\rho^* = (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})/(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})$.
- Montrons que $M^{-1}A$ est auto-adjoint pour le M-produit scalaire.
  On utilise le fait que M et A sont symétriques : $(M^{-1}Ax, y)_M = (M^{-1}Ax, My) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, MM^{-1}Ay) = (x, M^{-1}Ay)_M$.
- Maintenant, $B^* = I - \alpha^* M^{-1}A$ est aussi auto-adjoint pour le M-produit scalaire et donc d'après ce qui précède $\rho(B^*) = \|B^*\|_M$. On a donc bien $\|I - \alpha^* M^{-1}A\|_M = (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})/(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})$.

Problème - Quatrième partie

On suppose dans la suite M symétrique définie positive et A seulement inversible. On va maintenant faire varier α^k dans les itérations de (2) (voir (1)).

14. Montrez que si z^k n'est pas nul, il existe une valeur de α^k pour laquelle la norme $\|z^{k+1}\|_M^2$ est minimale. Explicitez cette valeur α^k qui sera utilisée dans la suite.

Corrigé : D'après (2), $z^{k+1} = M^{-1}r^{k+1}$, et donc $\|z^{k+1}\|_M^2 = \|M^{-1}(r^k - \alpha Az^k)\|_M^2 = (z^k - \alpha M^{-1}Az^k, Mz^k - \alpha Az^k)$ et cette quantité est minimale pour le paramètre optimal à l'itération k : $\alpha^k = (z^k, Az^k)/(Az^k, M^{-1}Az^k)$

15. Montrez qu'alors :

$$\frac{\|z^k\|_M^2 - \|z^{k+1}\|_M^2}{\|z^k\|_M^2} = \frac{(z^k, Az^k)^2}{(Az^k, M^{-1}Az^k)\|z^k\|_M^2}$$

Corrigé : Cette formule est une conséquence immédiate du calcul de la question précédente.

16. En déduire que la suite $\|z^k\|_M$ converge.

    Corrigé : La formule précédente montre que la suite $\|z^k\|_M$ est une suite décroissante, comme elle est minorée elle est convergente.

17. On suppose $A + A^t$ définie positive (A^t désignant la matrice transposée de A). Montrez qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{R}^n$, $(z, Az) \geq \beta \|z\|_M^2$. En déduire qu'il existe une constante $c > 0$, telle que, pour tout $z \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{(z, Az)^2}{(Az, M^{-1}Az)} \geq c\,\|z\|_M^2$$

    Corrigé : En utilisant le fait que $A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$, on a $(z, Az) = (z, \frac{A+A^t}{2} z)$ comme $A + A^t$ est symétrique définie positive on en déduit $(z, Az) \geq \nu \|z\|_2^2 \geq \beta \|z\|_M^2$, la dernière inégalité étant due au fait que toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. Ensuite

$$\frac{(z, Az)^2}{(Az, M^{-1}Az)} \geq \frac{\beta^2 \|z\|_M^4}{(Az, M^{-1}Az)} \geq \frac{\beta^2 \|z\|_M^4}{\|A^t M^{-1} A\|_2 \|z\|_2^2} \geq c\,\|z\|_M^2$$

18. En déduire que z^k converge vers 0 et que x^k converge vers la solution de $Ax = b$.

    Corrigé : Des résultats des questions 15 et 17 on obtient $\|z^k\|_M^2 - \|z^{k+1}\|_M^2 \geq c\,\|z^k\|_M^2$. La suite z^k étant convergente (question 16), le membre de gauche de l'inégalité tend vers zéro et donc a fortiori le membre de droite. Si z^k tend vers zéro, $r^k = M^{-1} z^k$ tend aussi vers zéro et comme $r^k = b - Ax^k$, Ax^k tend vers b, ce qui prouve que x^k tend vers $A^{-1}b$, c'est à dire la solution du problème $Ax = b$.