Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2007-2008
Licence de Mathématiques - L3
C. Basdevant - S. Layouni

Examen d'Analyse Numérique du mardi 17 juin 2008

Durée : 2h
Aucun document n'est autorisé

Problème I

Soit s un paramètre fixé dans $]0,1]$. On considère la formule de quadrature :

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \alpha_s f(-s) + \beta_s f(0) + \gamma_s f(s)$$

1. Déterminez les poids α_s, β_s et γ_s de sorte que la formule soit exacte pour les polynômes de degré inférieur où égal à deux.
2. Vérifiez que la formule intègre alors exactement les polynômes de degré trois.
3. Quelle formule obtient-on pour $s = 1$?
4. Déterminez s dans $]0,1]$ pour que la formule soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à quatre. Vérifiez que la formule est encore exacte au degré cinq.

Problème II

Soit A une matrice réelle, $n \times n$, symétrique, définie positive. Etant donnée une **découpe en blocs** de la matrice A, on lui associe la décomposition

$$A = D - E - F \ ,$$

où la matrice D est constituée des blocs diagonaux (carrés symétriques) de A, $-E$ est la partie bloc-triangulaire strictement inférieure de A et $-F$, la partie bloc-triangulaire strictement supérieure de A, est la matrice transposée de $-E$ ($F = E^t$).

1. Démontrez que D est symétrique, définie positive.
2. Montrez qu'il existe une matrice S symétrique, définie positive, telle que

$$S^2 = D$$

Indication : on pourra écrire, en le justifiant, $D = Q\Delta Q^t$, avec Δ matrice diagonale (par points) et Q matrice orthogonale.

Pour résoudre le système :

$$Ax = b \ , \qquad b \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \tag{1}$$

on considère la méthode itérative suivante qui, à partir de x_0 arbitraire, calcule la suite des x_k :

$$\begin{cases} (D-E)x_{2k+1} = Fx_{2k} + b \\ (D-F)x_{2k+2} = Ex_{2k+1} + b \end{cases} \tag{2}$$

3. Mettre la méthode itérative (2) sous la forme

$$x_{2k+2} = Bx_{2k} + c \ ,$$

   Calculer B et c.
4. On pose : $L = S^{-1}ES^{-1}$ et $U = S^{-1}FS^{-1}$. Prouvez que $I - L$ est inversible et que L et $(I-L)^{-1}$ commutent.
5. En déduire que

$$B = M^{-1}N \quad \text{ avec } \quad M = S(I-L)(I-U)S \ \text{ et } \ N = SLUS.$$

6. Montrez que N est symétrique semi-définie positive.
7. Démontrez que la suite x_{2k} converge vers la solution du système (1).
8. En déduire que la méthode (2) est convergente.