Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2008-2009
Licence de Mathématiques - L3

C. Basdevant - R. Chong

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique
du mardi 8 septembre 2009

Durée : 3h
Aucun document n'est autorisé

Problème I

Soit a un nombre réel tel que $-2 < a < 2$. On définit la matrice tridiagonale d'ordre n, $A_n(a)$, par

$(A_n(a))_{i,i} = a,\ i = 1,..,n;\quad (A_n(a))_{i,i-1} = -1,\ i = 2,..,n;\quad (A_n(a))_{i,i+1} = -1,\quad i = 1,..,n-1.$

On note $\delta_n(a)$ le déterminant de $A_n(a)$.

1. Etablir la formule de récurrence

$$\delta_n(a) = a\delta_{n-1}(a) - \delta_{n-2}(a) \quad .$$

Corrigé : Cette formule s'obtient par exemple en développant le déterminant selon la première colonne.

2. On pose $a = 2\cos\varphi,\ \varphi \in]0, \pi[$. Vérifier par récurrence que

$$\delta_n(a) = \frac{1}{2i\sin\varphi}\left[e^{i(n+1)\varphi} - e^{-i(n+1)\varphi}\right]$$

Corrigé : La formule proposée s'écrit également :

$$\delta_n(a) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

Vérifions la pour $n = 2$: on a bien : $\delta_2(a) = a^2 - 1 = 4\cos^2\varphi - 1 = \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}$. On la suppose alors vraie pour n et on la vérifie pour $n+1$, il suffit pour cela de vérifier l'identité : $2\cos\varphi\sin(n+1)\varphi - \sin(n-1)\varphi = \sin(n+2)\varphi$.

3. Calculer toutes les valeurs de a pour lesquelles $\delta_n(a)$ s'annule.

Corrigé : $\delta_n(a)$ s'annule pour $(n+1)\varphi = k\pi$ pour $1 \leq k \leq n$, soit pour les n valeurs de $a = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$ pour $1 \leq k \leq n$.

4. En déduire que les valeurs propres de la matrice $A_n(2)$ sont données par

$$\lambda_{n,k} = 4\sin^2\left[\frac{k\pi}{2(n+1)}\right], \quad 1 \leq k \leq n\ .$$

Corrigé : Le polynôme caractéristique de la matrice $A_n(2)$ est $P_n(\lambda) = \delta_n(2-\lambda)$, d'après la question précédente il s'annule pour les n valeurs distinctes $2 - \lambda = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$ pour $1 \leq k \leq n$. D'où les n valeurs propres de $A_n(2)$ indiquées.

5. On rappelle que le conditionnement en norme Euclidienne d'une matrice symétrique A est donné par

$$cond_2 A = \frac{+\text{ grande valeur propre en module}}{+\text{ petite valeur propre en module}}$$

Calculer $cond_2 A_n(2)$ et $\lim_{n \to +\infty} cond_2 A_n(2)$.

Corrigé : Compte tenu des résultats précédents, on a :

$$cond_2 A_n(2) = \left(\frac{\sin \frac{n\pi}{2(n+1)}}{\sin \frac{\pi}{2(n+1)}} \right)^2$$

et pour $n \to \infty$

$$cond_2 A_n(2) \approx \left(2\frac{n+1}{\pi} \right)^2 \qquad \lim_{n \to +\infty} cond_2 A_n(2) + \infty$$

On voit que le conditionnement de la matrice $A(2)$, qui correspond à une discrétisation centrée d'ordre 2 de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x^2}$, présente un très mauvais conditionnement quand n est grand, a titre d'exemple voici quelques valeurs de ce conditionnement :

n	2	10	100	1000
$cond_2 A_n(2)$	3	48.4	4.1 10^3	4.1 10^5

Problème II

Soit f une fonction réelle, continue et dérivable sur $[-1, 1]$ et $x_0 \in]0, 1[$.

1. Question de cours - Démontrez qu'il existe un unique polynôme Q de degré inférieur ou égal à 5 vérifiant :

$$\begin{array}{ccc} Q(-x_0) = f(-x_0) & Q(0) = f(0) & Q(x_0) = f(x_0) \\ Q'(-x_0) = f'(-x_0) & Q'(0) = f'(0) & Q'(x_0) = f'(x_0) \end{array}$$

Corrigé : Soit $\mathcal{P}_5$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5.

Considérons l'application Φ de $\mathcal{P}_5$ dans $\mathbb{R}^6$ qui à un polynôme P associe le sextuplet $(P(-x_0), P(0), P(x_0), P'(-x_0), P'(0), P'(x_0))$. L'existence et l'unicité du polynôme Q est équivalente à la bijectivité de Φ. L'application Φ étant une application linéaire entre deux espace vectoriels de même dimension 6, elle est bijective si et seulement si elle est injective. Pour vérifier l'injectivité de Φ il faut vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul, or si $P \in \ker(\Phi)$ alors $-x_0, 0$ et x_0 sont des racines doubles de P, P étant de degré inférieur ou égal à 5 ce n'est possible que si P est le polynôme nul.

2. Question de cours - Montrez que si f est six fois dérivable dans $]-1,1[$ on a la majoration suivante :

$$|f(x)-Q(x)| \leq \frac{M_6}{6!}\,\varpi(x), \quad \forall x \in [-1,1]$$

où $M_6 = \sup\left\{|f^{(6)}(t)|\,;\, t \in]-1,1[\right\}$ et $\varpi(t) = (x^2-x_0^2)^2x^2$.

Corrigé : Si $x = -x_0, 0$ ou x_0 la majoration est vraie car les deux membres sont nuls. Supposons maintenant $x \neq -x_0, 0$ et x_0 et considérons la fonction auxiliaire $\Psi(t)$ définie par :

$$\Psi(t) = f(t) - Q(t) - \frac{f(x)-Q(x)}{\varpi(x)}\,\varpi(t)$$

Cette fonction s'annule en x, $-x_0$, 0 et x_0, d'après le théorème de Rolle sa dérivée s'annule en 3 points de l'intervalle $]-1,1[$ distincts des points x, , $-x_0$, 0 et x_0. Par ailleurs la dérivée de Φ est nulle par construction en $-x_0$, 0 et x_0. On a donc 6 zéros distincts pour Φ'. Par applications successives du théorème de Rolle on aura 5 zéros distincts pour $\Phi^{(2)}$, 4 pour $\Phi^{(3)}$, ..., et un zéro, soit ξ_x, pour $\Phi^{(6)}$, ce qui s'écrit :

$$\Phi^{(6)}(\xi_x) = f^{(6)}(\xi_x) - \frac{f(x)-Q(x)}{\varpi(x)}\,6! = 0$$

Ce qui donne :

$$f(x) - Q(x) = \frac{f^{(6)}(\xi_x)}{6!}\,\varpi(x)$$

et la majoration demandée s'en déduit.

3. On considère maintenant la formule de quadrature :

$$\int_{-1}^{+1} f(t)dt \approx \alpha f(-x_0) + \beta f(0) + \gamma f(x_0)$$

Déterminez α, β, γ et x_0 pour que la formule soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 5.

Corrigé : Ecrivons que la formule est exacte pour les monômes $f(x) = x^p$ pour p de 0 à 5 :

$$\begin{array}{ll}
f(x) = 1 & 2 = \alpha + \beta + \gamma \\
f(x) = x & 0 = -\alpha\, x_0 + \gamma\, x_0 \\
f(x) = x^2 & \frac{2}{3} = \alpha\, x_0^2 + \gamma\, x_0^2 \\
f(x) = x^3 & 0 = -\alpha\, x_0^3 + \gamma\, x_0^3 \\
f(x) = x^4 & \frac{2}{5} = \alpha\, x_0^4 + \gamma\, x_0^4 \\
f(x) = x^5 & 0 = -\alpha\, x_0^5 + \gamma\, x_0^5
\end{array}$$

On déduit de ce système : $x_0 = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $\alpha = \gamma = \frac{5}{9}$ et $\beta = \frac{8}{9}$.

4. Montrez que l'erreur de quadrature

$$E(f) = \int_{-1}^{+1} f(t)dt - (\alpha f(-x_0) + \beta f(0) + \gamma f(x_0))$$

vérifie :

$$E(f) = \int_{-1}^{+1} (f(t) - Q(t))\, dt$$

avec Q le polynôme d'interpolation de f défini à la question 1.

Corrigé : Le polynôme Q étant de degré 5 et la formule étant exacte pour les polynômes de degré 5 on a :

$$\int_{-1}^{+1} Q(t)dt = \alpha\, Q(-x_0) + \beta\, Q(0) + \gamma\, Q(x_0)$$

Le résultat demandé se déduit des propriétés d'interpolation de Q.

5. En déduire, pour f six fois dérivable, la majoration de l'erreur :

$$|E(f)| \leq \frac{M_6}{15750}$$

Corrigé : La formule de la question 4 et la majoration de la question 2 permettent d'écrire :

$$|E(f)| \leq \int_{-1}^{+1} \frac{M_6}{6!}\, \varpi(t) dt = \frac{M_6}{6!}\, \frac{8}{175}$$

6. Déduisez des résultats précédents une formule de quadrature élémentaire sur un intervalle fini quelconque $]a, b[$

$$\int_a^b f(t)dt \approx \mu_1 f(c_1) + \mu_2 f(c_2) + \mu_3 f(c_3)$$

qui soit exacte pour les polynômes de degré 5.

Corrigé : La transformation affine $t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\, y$ envoie le segment $[-1, 1]$ sur le segment $[a, b]$ et donc :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\, y)\, dy \\ &\approx \frac{b-a}{2} \left(\alpha f(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\, x_0) + \beta\, f(\frac{a+b}{2}) + \gamma\, f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\, x_0) \right)\end{aligned}$$

La formule est exacte pour les polynômes de degré 5 puisque la transformation affine préserve le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal p.

7. Donnez une majoration de l'erreur de quadrature pour cette formule en fonction de $(b-a)$ et de $\sup\{|f^{(6)}(x)|\ ;\ x \in]a,b[\}$.

   Corrigé : Comte-tenu du résultat de la question 5 l'erreur de quadrature E est majorée par :
$$E \leq \frac{b-a}{2}\frac{1}{15750}\sup\{|g^{(6)}(y)|\ ;\ y \in]-1,1[\}$$
   avec $g(y) = f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,y)$. Comme $g^{(6)}(y) = (\frac{b-a}{2})^6\, f^{(6)}(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,y)$ on en déduit la majoration de l'erreur de quadrature sur $[a,b]$:
$$E \leq (\frac{b-a}{2})^7\frac{1}{15750}\sup\{|f^{(6)}(x)|\ ;\ x \in]a,b[\}$$

8. Avec ces résultats on peut construire une formule de quadrature composée pour un intervalle $[A,B]$ en le découpant en N sous-intervalles de longueur $h = \frac{B-A}{N}$. Donnez alors un majoration de l'erreur de quadrature en fonction de h, $(B-A)$ et de $\sup\{|f^{(6)}(x)|\ ;\ x \in]A,B[\}$.

   Corrigé : L'erreur de quadrature EC de la formule composée est majorée par la somme des majorants des erreurs de quadrature sur chacun des sous-intervalles. Comte-tenu du résultat de la question 7 on a donc :
$$EC \leq \sum_{i=1}^{i=N}(\frac{h}{2})^7\frac{1}{15750}\sup\{|f^{(6)}(x)|\ ;\ x \in]A,B[\}$$
   d'où la majoration, puisque $N = (B-A)/h$:
$$EC \leq (B-A)\,h^6\,C\sup\{|f^{(6)}(x)|\ ;\ x \in]A,B[\}$$
   avec $C = 1/(2^7 \times 15750)$.

Problème III

Soit A une matrice réelle, $n \times n$, symétrique, définie positive.
Pour résoudre le système :
$$Ax = b\ , \qquad b \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \tag{1}$$
on considère la méthode itérative suivante pour laquelle x_0 est arbitraire et σ est un paramètre réel :
$$x_{n+1} = x_n - \sigma(Ax_n - b) \tag{2}$$

1. Montrez que la méthode (2) converge vers la solution du système (1) si et seulement si :
$$0 < \sigma < \frac{2}{\rho(A)}\ ,$$

où $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de A.

Corrigé : Si la méthode converge vers une limite y, celle-ci vérifie l'"équation $y = y - \sigma(Ay - b)$, c'est donc bien l'unique solution du problème (1).
Pour que la méthode converge il faut et il suffit que le rayon spectral de la matrice d'itération soit inférieur strictement à 1. La matrice d'itération étant $I - \sigma A$ ses valeurs propres sont $1 - \sigma\lambda$ avec λ valeur propre de A, valeurs propres qui sont par hypothèse réelles strictement positives. On doit donc avoir $-1 < 1 - \sigma\lambda < 1$ soit $0 < \sigma\lambda < 2$ quel que soit λ, d'où le résultat demandé.

2. Montrez que la vitesse de convergence de la méthode (2) est maximale pour une valeur de σ que l'on exprimera en fonction de $\rho(A)$ et $\rho(A^{-1})$.

   Corrigé : La vitesse de convergence de la méthode est d'autant plus grande que le rayon spectral de la matrice d'itération est petit, il faut donc choisir σ qui minimise la quantité $\max_i |1 - \sigma\lambda_i|$ avec λ_i les valeurs propres de A. Cette fonction s'écrit $f(\sigma) = \max\{1 - \sigma\lambda_1, \sigma\lambda_n - 1\}$ avec λ_1 et λ_n respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de A. Son graphe est tracé sur la Figure 1 et elle est est minimale pour $\sigma = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$, soit :

$$\sigma = \frac{2}{\frac{1}{\rho(A^{-1})} + \rho(A)}$$

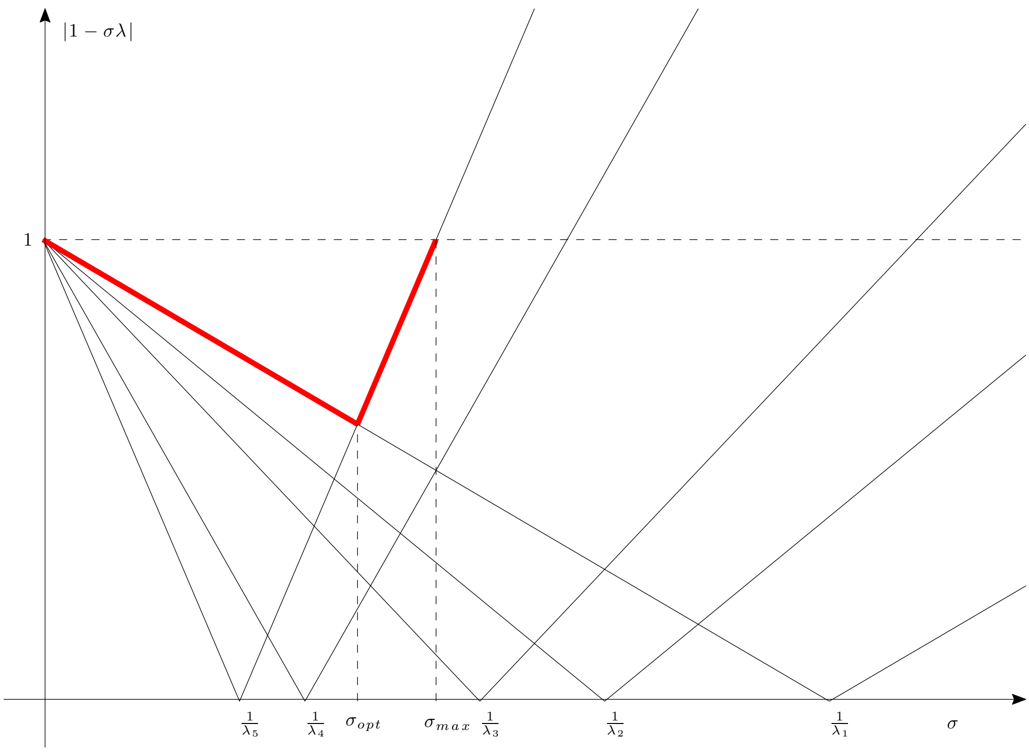

FIG. 1 – $\rho(I - \sigma A)$ en fonction de σ