Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2010-2011
Licence de Mathématiques - L3

C. Basdevant - F. Cuvelier

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique du mardi 18 janvier 2011

Durée : 3h
Aucun document n'est autorisé

Exercice I

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $x_0, x_1, \cdots, x_n$, $n+1$ points distincts de $[a, b]$. Soit f une fonction réelle définie et continue sur $[a, b]$. On note $P_k(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, x_1, \cdots, x_k$ et $f[x_0, \cdots, x_k]$ le coefficient de son monôme de degré k, i.e.

$$P_k(x) = f[x_0, \cdots, x_k]\, x^k + \cdots$$

1. Expliquez pourquoi $f[x_0, \cdots, x_k]$ est indépendant de l'ordre de ses arguments $x_0, \cdots, x_k$.

   Corrigé : Le polynôme d'interpolation P_k est unique une fois les points d'interpolation $x_0, \cdots, x_k$ donnés, il en est de même de son coefficient de plus haut degré.

2. Montrez que :

$$P_k(x) - P_{k-1}(x) = f[x_0, \cdots, x_k]\,(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \tag{1}$$

   Corrigé : Par construction les polynômes P_k et P_{k-1} vérifient $P_k(x_i) = P_{k-1}(x_i) = f(x_i)$ pour $0 \leq i \leq k-1$, donc le polynôme $P_k - P_{k-1}$, de degré k a pour racines les k points x_i pour $0 \leq i \leq k-1$, il s'écrit donc $\alpha(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})$, mais son terme de plus haut degré est le même que celui de P_k, d'où le résultat.

3. En déduire que (formule de Newton) :

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \cdots, x_k]\,(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) \tag{2}$$

   Corrigé : En ajoutant membre à membre la relation précédente pour k de 1 à n et en remarquant que $P_0(x) = f[x_0] = f(x_0)$ on obtient la relation demandée.

4. Soit $k \geq 1$, considérons le polynôme $P^*_{k-1}(x)$ qui interpole f aux points $x_1, \cdots, x_k$ et le polynôme $Q_k(x)$ défini par

$$Q_k(x) = \frac{(x - x_0)P^*_{k-1}(x) - (x - x_k)P_{k-1}(x)}{x_k - x_0}.$$

En étudiant les propriétés de Q_k montrez que :

$$f[x_0,\cdots,x_k] = \frac{f[x_1,\cdots,x_k] - f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k - x_0} \tag{3}$$

Corrigé : On vérifie que : $Q_k(x_0) = P_{k-1}(x_0) = f(x_0)$ et que $Q_k(x_k) = P^*_{k-1}(x_k) = f(x_k)$ et pour $1 \leq i \leq k-1$ comme $P^*_{k-1}(x_i) = P_{k-1}(x_i) = f(x_i)$: $Q_k(x_i) = f(x_i)$. Et donc par unicité du polynôme de Lagrange $Q_k = P_k$, la relation demandée s'en déduit en examinant le coefficient du terme de plus haut degré de Q_k.

5. Démontrez, en utilisant la formule (1), la formule d'erreur :

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = f[x_0,\cdots,x_n,x]\,(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \tag{4}$$

Corrigé : De la formule (1) on déduit que l'expression

$$P_n(x) + f[x_0,\cdots,x_n,x]\,(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

est la valeur en x du polynôme de degré $(n+1)$ qui interpole f aux points $x_0, x_1, \cdots, x_n$ et x, et donc est égale à $f(x)$, d'où le résultat.

6. En déduire que si f est k fois continûment dérivable sur $[a,b]$, alors :

$$\exists \xi \in]a,b[,\ f[x_0,\cdots,x_k] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

Corrigé : Si l'on compare la formule (4) à la formule d'erreur vue en cours pour une fonction f qui est $(n+1)$ fois continûment dérivable, soit

$$E_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

on déduit que pour x différent des x_i, soit $(n+2)$ points différents, on a :

$$f[x_0,\cdots,x_n,x] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

d'où le résultat pour k points différents quelconques.

7. On suppose ici $n = 3$, décrire les calculs à mener pour passer des valeurs de la fonction f en les points x_i aux coefficients du polynôme $P_3(x)$ dans son expression de la formule (2).

Corrigé : D'après la formule (3) les calculs à mener sont ceux indiqués sur la figure 1. Seuls les termes sur la ligne supérieure sont à garder pour former le polynôme.

Exercice II

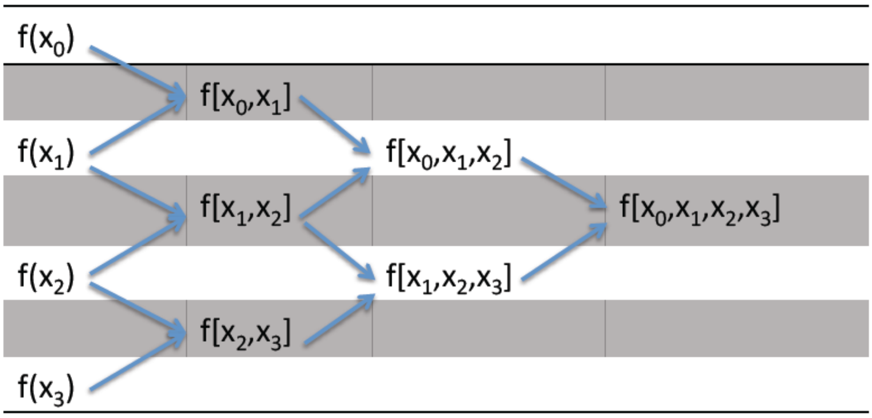

FIG. 1 – Calcul des coefficients de la formule de Newton

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $x_0, x_1, \cdots, x_n$, $n+1$ points distincts de $[a, b]$. Soit f une fonction réelle définie et $(n+1)$ fois continûment dérivable sur $[a, b]$. On note $P_n(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, x_1, \cdots, x_n$ et $\{l_i(x),\ 0 \leq i \ \leq n\}$ la base canonique de Lagrange de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur au égal à n associée aux points $x_0, x_1, \cdots, x_n$.

1. Montrez que $\forall x,\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$.

   Corrigé : Rappel, le polynôme d'interpolation P_n de f aux $(n+1)$ points x_i s'écrit $P_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} f(x_i)\, l_i(x)$ et il coincide avec f si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. On obtient donc l'identité en question en considérant l'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = 1$.

2. Montrez que pour $1 \leq k \leq n$: $\forall x,\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (x_i - x)^k\, l_i(x) = 0$.

   Corrigé : Soit α un réel quelconque, considérons la fonction $f(x) = (x-\alpha)^k$, c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à n et donc $(x-\alpha)^k = \sum_{i=0}^{i=n} (x_i - \alpha)^k\, l_i(x)$. L'identité demandée s'en déduit en prenant $\alpha = x$.

3. En déduire que pour $x \in]a, b[$:

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\int_{x_i}^{x} \frac{(x_i - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \right] l_i(x) \tag{5}$$

   Indication, on rappelle la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$f(y) = f(x) + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(y-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \int_x^y \frac{(y-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

   Corrigé : En développant avec la formule de Taylor les $f(x_i)$ autour de x dans l'expression du polynôme P_n on obtient :

$$E_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \left[f(x) + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(x_i - x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \int_x^{x_i} \frac{(x_i - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \right] l_i(x)$$

Compte tenu des relations obtenues précédemment pour les l_i il reste :

$$E_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\int_{x_i}^{x} \frac{(x_i - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \right] l_i(x)$$

4. Pour $n = 1$ et $x \in]x_0, x_1[$, retrouvez à l'aide de la formule (5) l'existence d'un $\xi_x \in]x_0, x_1[$ tel que :

$$E_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f^{(2)}(\xi_x)$$

Corrigé : La formule (5) s'écrit dans ce cas particulier :

$$E_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \int_{x_0}^{x} (x_0 - t) f^{(2)}(t)dt + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \int_{x_1}^{x} (x_1 - t) f^{(2)}(t)dt$$

et en utilisant le deuxième théorème de la moyenne, avec $\xi_0 \in]x_0, x[$ et $\xi_1 \in]x, x_1[$:

$$\begin{aligned} E_1(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f^{(2)}(\xi_0) \int_{x_0}^{x} (x_0 - t)dt + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f^{(2)}(\xi_1) \int_{x_1}^{x} (x_1 - t)dt \\ &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} \left[\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f^{(2)}(\xi_0) + \frac{(x_1 - x)}{(x_1 - x_0)} f^{(2)}(\xi_1) \right] \\ &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f^{(2)}(\xi_x) \end{aligned}$$

cette dernière égalité grâce au théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice III

Soit A une matrice $n \times n$ réelle symétrique et définie positive. On va étudier une généralisation de la méthode des directions alternées pour la résolution du système linéaire $Ax = b$.

On suppose que la matrice A peut s'écrire $A = M - N = P - Q$, où les matrices M et P sont inversibles et on considère la méthode itérative :

$$M x_{k+\frac{1}{2}} = N x_k + b, \tag{6}$$

$$P x_{k+1} = Q x_{k+\frac{1}{2}} + b. \tag{7}$$

On pose :

$$\begin{aligned} e_k &= x_k - x, \qquad \eta_k = M^{-1} A e_k \\ e_{k+\frac{1}{2}} &= x_{k+\frac{1}{2}} - x, \qquad \eta_{k+\frac{1}{2}} = P^{-1} A e_{k+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

1. Vérifiez que $\eta_k = e_k - e_{k+\frac{1}{2}}$

Corrigé :

$$e_{k+\frac{1}{2}} = x_{k+\frac{1}{2}} - x = M^{-1}\Big[N x_k + b\Big] - M^{-1}\Big[N x + b\Big] = M^{-1} N e_k.$$

et

$$\eta_k = M^{-1} A e_k = (I - M^{-1} N) e_k = e_k - e_{k+\frac{1}{2}}.$$

2. Montrez que

$$\|e_{k+\frac{1}{2}}\|_A^2 - \|e_k\|_A^2 \;\; = -\Big((M+N^t)\eta_k, \eta_k\Big) \tag{8}$$

où $\|.\|_A$ désigne la norme $\|u\|_A^2 = (Au, u)$ associée au produit scalaire défini par A soit $< u, v >= (Au, v)$.

$$\begin{aligned}
\|e_{k+\frac{1}{2}}\|_A^2 - \|e_k\|_A^2 &= \Big(Ae_{k+\frac{1}{2}}, e_{k+\frac{1}{2}}\Big) - (Ae_k, e_k) \\
&= \Big(A(e_k - \eta_k), e_k - \eta_k\Big) - (Ae_k, e_k) \\
&= -(Ae_k, \eta_k) - (A\eta_k, e_k) + (A\eta_k, \eta_k) \\
&= (A\eta_k, \eta_k) - 2(Ae_k, \eta_k) \qquad \{\text{car la matrice } A \text{ est symétrique}\} \\
&= (A\eta_k, \eta_k) - 2(M\eta_k, \eta_k) \qquad \text{car } \{Ae_k = M\eta_k\} \\
&= -\Big((M+N)\eta_k, \eta_k\Big)
\end{aligned}$$

Et puisque $(Nz, z) = (z, Nz) = (N^t z, z)$, on a bien

$$\|e_{k+\frac{1}{2}}\|_A^2 - \|e_k\|_A^2 = -\Big((M+N^t)\eta_k, \eta_k\Big)$$

3. En déduire que

$$\|e_{k+1}\|_A^2 - \|e_{k+\frac{1}{2}}\|_A^2 \;\; = -\Big((P+Q^t)\eta_{k+\frac{1}{2}}, \eta_{k+\frac{1}{2}}\Big) \tag{9}$$

   Cette formule est identique à la précédente en échangeant les rôles des matrices, M et P d'une part et N et Q d'autre part.

4. Montrez que si la matrice symétrique $M + N^t$ est définie positive et $P + Q^t$ semi-définie positive
   (a) La suite $\big(\|e_k\|_A^2\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   Corrigé : D'après les relations (8) et (9) on a

$$\|e_{k+1}\|_A^2 - \|e_k\|_A^2 = -\Big((M+N^t)\eta_k, \eta_k\Big) - \Big((P+Q^t)\eta_{k+\frac{1}{2}}, \eta_{k+\frac{1}{2}}\Big) \leq 0.$$

   On en déduit que la suite $(\|e_k\|_A^2)_k$ est décroissante, comme elle est minorée (par 0) elle est convergente, soit ℓ sa limite.

   (b) La suite $\Big(\|e_{k+\frac{1}{2}}\|_A^2\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente de même limite que la suite $\big(\|e_k\|_A^2\big)_{k\in\mathbb{N}}$.

   Corrigé : Comme (voir (8) et (9))

$$\|e_{k+1}\|_A^2 \leq \|e_{k+\frac{1}{2}}\|_A^2 \leq \|e_k\|_A^2,$$

   ℓ est aussi la limite de la suite $(\|e_{k+\frac{1}{2}}\|_A^2)_k$.

(c) En déduire que la suite η_k est convergente de limite nulle.

Corrigé : Comme $\eta_k = M^{-1}Ae_k$, la suite η_k est convergente et a pour limite $\eta = M^{-1}A\ell$. Passant à la limite dans (8), on voit que

$$\Big((M+N^t)\eta, \eta\Big) = 0$$

comme la matrice $M+N^t$ est définie positive, on a $\eta = 0$.

(d) Conclure.

Corrigé : Comme $\ell = A^{-1}M\eta$ on en déduit $\ell = 0$, c'est à dire que l'erreur $e_k = x_k - x$ a pour limite 0, la méthode est convergente.