Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2011-2012
Licence de Mathématiques - L3

C. Basdevant - F. Cuvelier

Corrigé de l'examen partiel d'Analyse Numérique du mardi 15 novembre 2011

Durée : 3h
Aucun document n'est autorisé

Problème I

Soit β un réel strictement positif et Z un vecteur de $\mathbb{R}^N$. On considère la suite $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$) construite par la récurrence

$$E_m = (I - \beta A)E_{m-1} + \beta Z$$

avec E_0 donné et A est la matrice tridiagonale dont les coefficients non nuls sont

$$\left\{\begin{array}{l} A_{j,j} = 2a + c \quad \forall j \in \{1, \dots, N\} \\ A_{j,j+1} = -a - b \quad \forall j \in \{1, \dots, N-1\} \\ A_{j,j-1} = -a + b \quad \forall j \in \{2, \dots, N\} \end{array}\right. \tag{1}$$

où $a > 0$, $c \geq 0$ et b est un réel tel que $b^2 < a^2$.

1. Montrez que $\forall l \in \{1, \dots, N\}$, le vecteur W_l de $\mathbb{R}^N$ de composantes $\{W_{l,i}, 1 \leq i \leq N\}$ définies par

$$W_{l,i} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{i}{2}} \sin\left(\frac{li\pi}{N+1}\right)$$

est vecteur propre de A pour une valeur propre λ_l que vous déterminerez.

Corrigé : Un calcul simple donne : $AW_l = \lambda_l W_l$, avec $\lambda_l = 2a+c-2\sqrt{a^2-b^2}\cos\left(\frac{l\pi}{N+1}\right)$.
En effet nous avons :

$$(AW_l)_i = A_{i,i-1}W_{l,i-1} + A_{i,i}W_{l,i} + A_{i,i+1}W_{l,i+1}$$

cette formule étant valable pour $1 \leq i \leq N$ parce que $W_{l,0} = W_{l,N+1} = 0$, et donc :

$$\begin{aligned}(AW_l)_i = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{i}{2}} \Bigg[& -(a-b)\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{l(i-1)\pi}{N+1}\right) \\ & + (2a+c)\sin\left(\frac{li\pi}{N+1}\right) \\ & -(a+b)\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{l(i+1)\pi}{N+1}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(AW_l)_i = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{i}{2}} \Bigg[-\sqrt{a^2-b^2}\sin\left(\frac{l(i-1)\pi}{N+1}\right) \\
+ (2a+c)\sin\left(\frac{li\pi}{N+1}\right) \\
-\sqrt{a^2-b^2}\sin\left(\frac{l(i+1)\pi}{N+1}\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(AW_l)_i = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{i}{2}} \Bigg[-2\sqrt{a^2-b^2}\cos\left(\frac{l\pi}{N+1}\right)\sin\left(\frac{li\pi}{N+1}\right) \\
+(2a+c)\sin\left(\frac{li\pi}{N+1}\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
(AW_l)_i = \left[2a + c - 2\sqrt{a^2-b^2}\cos\left(\frac{l\pi}{N+1}\right)\right] W_{l,i}
$$

2. Démontrez que la matrice A est inversible.

   Corrigé : Les N valeurs λ_l forment une suite strictement croissante, elle sont toutes différentes on a ainsi toutes les valeurs propres de A. Comme $a > \sqrt{a^2-b^2}$ elles sont toutes strictement positives, ce qui prouve que A est inversible.

3. Démontrez que si $b = 0$ la matrice A est symétrique définie positive.

   Corrigé : Si $b = 0$ la matrice est clairement symétrique, ses valeurs propres sont $\lambda_l = c + 2a(1 - \cos\left(\frac{l\pi}{N+1}\right))$, elles sont toutes strictement positives, ce qui prouve que A est symétrique définie positive.

4. Déterminez le rayon spectral de la matrice A.

   Corrigé : La plus petite valeur propre de A, λ_1 étant positive, la plus grande λ_N est donc le rayon spectral de A, soit : $\rho(A) = c + 2a + 2\sqrt{a^2-b^2}\cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right)$

5. Montrez que si $\beta < 2\left(c + 2a + 2\sqrt{a^2-b^2}\right)^{-1}$ la suite E_m est convergente quels que soient N et E_0 et donnez sa limite.

   Corrigé : On sait que la suite E_m est convergente quel que soit E_0 si et seulement si le rayon spectral de la matrice d'itération $I - \beta A$ est strictement inférieur à 1. Les valeurs propres de $I - \beta A$ étant égales à $1 - \beta\lambda_l$, il faut que $-1 < 1 - \beta\lambda_l < 1$, soit $0 < \beta\lambda_l < 2$. L'inégalité de gauche étant vérifiée, il reste à imposer $\beta < \frac{2}{\rho(A)}$, ce qui est le cas quel que soit N si $\beta < 2\left(c + 2a + 2\sqrt{a^2-b^2}\right)^{-1}$.
   Quand la suite E_m est convergente sa limite X vérifie $X = (I - \beta A)X + \beta b$, soit $AX = b$.

6. Discutez de la convergence de la suite E_m pour un E_0 particulier quand $\beta > 2\left(c + 2a + 2\sqrt{a^2-b^2}\right)^{-1}$ et N est grand ?

   Corrigé : Pour N grand et $\beta > 2\left(c + 2a + 2\sqrt{a^2-b^2}\right)^{-1}$, on aura $\rho(I - \beta A) > 1$, la matrice d'itération a des valeurs propres strictement inférieures à -1, aussi si E_0

a une composante non nulle sur au moins un des vecteurs propres de A associés à ces valeurs propres, la norme de E_m tend vers l'infini. Par contre si E_0 et b n'ont de composantes non nulles que sur les vecteurs propres associés à des valeurs propres de $I - \beta A$ de module inférieur à 1, alors la suite E_m converge vers la solution de $AX = b$ (mais numériquement cette situation n'est pas compatible avec les erreurs d'arrondi des machines).

7. Montrez que pour tout $U \in \mathbb{R}^N$ et $U \neq 0$, $U^t AU > 0$, où U^t désigne le transposé de U. *Note : on pourra pour cela écrire $A = M + b\,N$, avec M et N des matrices à déterminer.*

   Corrigé : Dans l'écriture proposée M est la matrice symétrique définie positive correspondant au cas $b = 0$ et donc $U^t MU > 0$ pour $U \neq 0$. De son côté N est la matrice antisymétrique avec $N_{i,i-1} = +1$ et $N_{i,i+1} = -1$, or pour toute matrice antisymétrique $U^t NU = U^t N^t U = -U^t NU = 0$. Conclusion :

$$U^t AU = U^t MU + bU^t NU = U^t MU > 0$$

8. Montrez que pour tout réel positif β, la matrice $I + \beta A$ est inversible.

   Corrigé : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un vecteur U non nul tel que $(I + \beta A)U = 0$, en multipliant scalairement cette égalité par U^t on obtient : $U^t U + \beta U^t AU = 0$ or cette égalité est impossible puisque les deux termes sont strictement positifs.

9. Montrez qu'il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $U \in \mathbb{R}^N$, $U^t AU \geq \mu ||U||_2^2$.

   Corrigé : On a vu que $U^t AU = U^t MU$ et donc $U^t AU \geq \mu \|U\|_2^2$, avec μ la plus petite valeur propre de la matrice symétrique définie positive M.

10. En déduire que pour tout réel strictement positif β,

$$||\,(I + \beta A)^{-1}\,||_2 < 1.$$

   Corrigé : On a pour U non nul : $U^t(I + \beta A)U = U^t U + \beta U^t AU \geq (1 + \beta\mu)\|U\|_2^2$ d'autre part $U^t(I + \beta A)U \leq \|U\|_2 \|(I + \beta A)U\|_2$, on en déduit que $(1 + \beta\mu)\|U\|_2 \leq \|(I + \beta A)U\|_2$. La matrice $I + \beta A$ étant inversible, on peut poser $(I + \beta A)U = Y$ et l'on obtient : $(1+\beta\mu)\|(I+\beta A)^{-1}Y\|_2 \leq \|Y\|_2, \forall Y$, ce qui prouve que $\|(I+\beta A)^{-1}\|_2 \leq (1 + \beta\mu)^{-1} < 1$

11. Que peut-on dire de la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^N$ construite par la récurrence

$$F_m = (I + \beta A)^{-1}\, F_{m-1}$$

   où F_0 est donné ?

   Corrigé : La suite F_m est convergente de limite 0 puisque la matrice d'itération est de norme inférieure strictement à 1.

12. On suppose dans cette question $c > 0$, montrez que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel appliquées à la résolution du système $Ax = b$ sont convergentes. **Corrigé** : Si $c > 0$ on vérifie facilement que la matrice A est strictement diagonalement dominante et donc, comme vu en cours, les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel sont convergentes.

Problème II

Soit A une matrice $n \times n$ réelle inversible.

1. Montrez que $C = A^t A$ est symétrique définie positive. En déduire que C admet une décomposition de Cholesky sous la forme $C = B^t B$, avec B triangulaire supérieure et inversible.

   Corrigé : On vérifie d'une part que $C^t = C$, c'est à dire que C est symétrique, et d'autre part, pour $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, calculons $x^t C x$:

   $$x^t C x = x^t A^t A x = \|Ax\|_2^2$$

   Cette dernière quantité est strictement positive puisque A est inversible. La matrice C est donc symétrique définie positive. D'après un résultat du cours elle admet une décomposition de Cholesky $C = B^t B$ avec B triangulaire supérieure à diagonale strictement positive, donc inversible.

2. Montrez que la matrice $S = AB^{-1}$ est orthogonale.

   Corrigé : $SS^t = AB^{-1}(B^{-1})^t A^t = AC^{-1}A^t = A(A^t A)^{-1}A^t = I$, S est bien une matrice orthogonale.

3. En déduire que la matrice A s'écrit sous la forme $A = QR$, où Q est orthogonale et R triangulaire supérieure à termes diagonaux strictement positifs.

   Corrigé : Comme $S = AB^{-1}$ on en déduit $A = SB$, on a bien mis la matrice A sous la forme QR avec $Q = S$ orthogonale et $R = B$ triangulaire supérieure à termes diagonaux strictement positifs.

4. Montrez que cette décomposition QR est unique.

   Corrigé : Supposons deux décompositions $Q_1 R_1 = Q_2 R_2$, alors $Q_2^{-1} Q_1 = R_2 R_1^{-1}$. Mais la matrice $M = Q_2^{-1} Q_1$ est orthogonale comme produit de matrices orthogonales et la matrice $M = R_1^{-1} R_2$ est triangulaire supérieure à termes diagonaux strictement positifs comme produit de matrices triangulaires supérieures à termes diagonaux strictement positifs. $M^t = M^{-1}$ comme matrice orthogonale, mais M^t est triangulaire inférieure puisque M est triangulaire supérieure et M^{-1} est triangulaire supérieure comme inverse d'une triangulaire supérieure, donc M est diagonale à terme strictement positifs, mais de modules 1 puisque ce sont les valeurs propres d'une matrice orthogonale, M est donc la matrice identité, ce qui prouve que $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$ d'où l'unicité de la décomposition QR d'une matrice inversible.