Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2012-2013
Licence de Mathématiques - L3

C. Basdevant - F. Cuvelier

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique
du jeudi 8 novembre 2012

Durée : 3h
Seul document autorisé une feuille manuscrite recto de notes personnelles

Exercice I

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice $n \times n$ inversible admettant une factorisation LU où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et U une matrice triangulaire supérieure.

1. Montrez que cette factorisation est unique.

   Corrigé : Raisonnons par l'absurde, soient deux factorisations $M = L_1U_1 = L_2U_2$, M étant inversible, les matrices L et U le sont aussi, on en déduit que $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$. L'inverse et le produit de matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) étant une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure), à gauche du signe égal on a une matrice triangulaire inférieure et à droite une matrice triangulaire supérieure, donc il s'agit de matrices diagonales. Comme L_2 et L_1 sont à diagonale unité, le produit $L_2^{-1}L_1$ est aussi à diagonale unité, ce qui prouve que $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = Id$, d'où l'égalité des deux décompositions.

On suppose de plus dans la suite que la matrice A est symétrique.

2. Montrez qu'il existe une unique factorisation $A = LDL^t$ où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et D une matrice diagonale inversible.

   Corrigé : Soit D la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ceux de la matrice U et $S = D^{-1}U$ la matrice triangulaire supérieure à diagonale unité telle que $M = LDS$. Montrons que $S = L^t$. Comme M est symétrique on a que $LDS = S^tDL^t$, d'où l'on déduit $L^{-1}S^tD = DSL^{-1t}$, c'est à dire l'égalité d'une matrice triangulaire inférieure et d'une matrice triangulaire supérieure et donc de matrices diagonales, d'où $L^{-1}S^tD = DSL^{-1t} = D$ ce qui prouve $S = L^t$. L'unicité de cette décomposition LDL^t se déduit de celle de la décomposition LU en posant $U = DL^t$.

3. Montrez qu'une matrice A admet une unique factorisation $A = LDL^t$ où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et D une matrice diagonale telle que $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in [1, n]$ si et seulement si A est symétrique définie positive.

   Corrigé : Supposons que A admette une décomposition LDL^t où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et D une matrice diagonale telle que

$D_{i,i} > 0, \forall i \in [1,n]$, alors il est clair que A est symétrique. Soit $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, $x^tAx = x^tLDL^tx = y^tDy$ avec $y = L^tx \neq 0$ et donc $x^tAx = \sum_y D_{i,i}y_i^2 > 0$, la matrice est bien symétrique définie positive.
Réciproquement si A est symétrique définie positive, on sait, puisque tous ses mineures principaux sont non nuls, qu'elle admet une décomposition LU, et donc d'après les questions précédentes une décomposition LDL^t unique. Montrons que tous les éléments diagonaux de D sont strictement positifs : soit $i \in [1,n]$, et $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $y_i = 1$ et $y_j = 0, \forall j \neq i$ et posons $x = L^{-1t}y \neq 0$, alors $x^tAx = y^tDy = D_{i,i}$ et donc $D_{i,i}$ doit être strictement positif.

4. En déduire que A admet une unique factorisation de Cholesky $A = BB^t$ où B est une matrice triangulaire inférieure telle que $B_{i,i} > 0, \forall i \in [1,n]$ si et seulement si A est symétrique définie positive.

   Corrigé : D'une décomposition LDL^t avec $D_{i,i} > 0, \forall i \in [1,n]$, on passe à une décomposition de Cholesky BB^t, où B est une matrice triangulaire inférieure telle que $B_{i,i} > 0, \forall i \in [1,n]$, en posant $B = L\sqrt{D}$ et réciproquement on construit une décomposition LDL^t à partir de Choleski en posant $L = B\Delta^{-1}$ et $D = \Delta^2$, où Δ est la matrice diagonale des éléments diagonaux de B. D'où l'existence et l'unicité d'une décomposition de Choleski pour une matrice symétrique définie positive.

Exercice II

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On considère la décomposition par blocs de M :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $p \in [1, n-1]$. On pose $q = n - p$.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^p$ et $\beta \in \mathbb{R}^q$, déterminez, en fonction de α et β, les vecteurs $x \in \mathbb{R}^p$ et $y \in \mathbb{R}^q$ tels que :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

   Corrigé : M étant inversible, la sous matrice A l'est aussi, de l'équation $Ax + By = \alpha$ on déduit $x = A^{-1}\alpha - A^{-1}By$, en reportant dans la deuxième équation : $(C - B^tA^{-1}B)y = \beta - B^tA^{-1}\alpha$. De l'existence et l'unicité du couple (x, y) on déduit que la matrice $C - B^tA^{-1}B$ est inversible et donc $y = (C - B^tA^{-1}B)^{-1}(\beta - B^tA^{-1}\alpha)$.

2. Montrez que la matrice $E = C - B^tA^{-1}B$ est symétrique définie positive (indication on pourra calculer y^tEy avec $x = -A^{-1}By$).

   Corrigé : Il est clair que la matrice E est symétrique, on vient de voir qu'elle était inversible, montrons qu'elle est définie positive, pour cela il suffit de montrer que $y^tEy > 0, \forall y \neq 0 \in \mathbb{R}^q$. Comme M est définie positive :

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0$$

soit $x^tAx+y^tCy+2x^tBy>0$, sachant que A est symétrique définie positive prenons $x=-A^{-1}By$ on obtient : $y^tB^tA^{-1}AA^{-1}By+y^tCy-2y^tB^tA^{-1}By>0$, soit $y^tCy-y^tB^tA^{-1}By>0$ et donc $y^tEy>0$.

3. On considère la décomposition de Cholesky de M : $M=R^tR$ où R est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont strictement positifs, et on écrit la décomposition de R par blocs soit :

$$R=\begin{pmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} \\ 0 & R_{2,2} \end{pmatrix}$$

où $R_{1,1}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

Montrez que $E=R_{2,2}^t\,R_{2,2}$.

Corrigé : Effectuons le produit par blocs R^tR et identifions à M :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_{1,1}^tR_{1,1} & R_{1,1}^tR_{1,2} \\ R_{1,2}^tR_{1,1} & R_{1,2}^tR_{1,2}+R_{2,2}^tR_{2,2} \end{pmatrix}$$

d'où $A=R_{1,1}^tR_{1,1}$, $B=R_{1,1}^tR_{1,2}$ et $C=R_{1,2}^tR_{1,2}+R_{2,2}^tR_{2,2}$. M étant inversible, $R_{1,1}$ l'est aussi et $E=R_{1,2}^tR_{1,2}+R_{2,2}^tR_{2,2}-R_{1,2}^tR_{1,1}R_{1,1}^{-1}R_{1,1}^{-1t}R_{1,1}^tR_{1,2}$ et donc on a bien $E=R_{2,2}^t\,R_{2,2}$.

Problème

Soit $n\geq 1$ un entier. On se propose d'étudier deux façons de résoudre l'équation $Ax=b$ en $x\in\mathbb{R}^n$, où $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice $n\times n$ et $b\in\mathbb{R}^n$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(A) Première méthode : résolution par pivot de Gauss

1. On suppose dans cette question $n=3$,

$$A=A_1=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } b=b_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Résoudre l'équation $Ax=b$ par la méthode d'élimination de Gauss.

Corrigé : Un calcul simple donne $(\frac{1}{6},-\frac{1}{3},\frac{1}{2})$.

2. On suppose dans cette question $n=2$,

$$A=A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b=b_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminez et représentez graphiquement l'ensemble des $x\in\mathbb{R}^2$ tels que $Ax=b$.

Corrigé : Les solutions vérifient $x_1 + x_2 = 1$ c'est donc la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par les points $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

(B) Deuxième méthode : résolution approchée par une méthode itérative

Etant donné $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, on définit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = x_k - \delta_k A^t(Ax_k - b),$$

où A^t désigne la transposée de A.

3. On suppose qu'il existe au moins un élément $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax^* = b$ et l'on pose $y_k = x_k - x^*$. Trouvez une matrice M_k telle que $y_{k+1} = M_k\, y_k$.

   Corrigé : On a $x_{k+1} = x_k - \delta_k A^t(Ax_k - b)$ et $x^* = x^* - \delta_k A^t(Ax^* - b)$, d'où $y_{k+1} = M_k\, y_k$ avec $M_k = I - \delta_k A^t A$.

On suppose dans les questions 4 à 10 que $n = 2$ et $A = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. La matrice A_3 est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Justifiez vos réponses.

   Corrigé : A_3 est triangulaire supérieure, ses éléments diagonaux sont donc ses valeurs propres, celles-ci sont strictement positives ce qui prouve que A_3 est inversible, mais elles sont toutes deux égales à 1, si A_3 était diagonalisable elle serait semblable à la matrice identité et donc égale à celle-ci, ce qui n'est pas le cas.

5. On pose $C_3 = A_3^t A_3$. Montrez que l'ensemble des valeurs propres de C_3 peut s'écrire $\{\lambda, \mu\}$, avec $0 < \lambda < 1 < \mu < 3$.

   Corrigé : $C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$. On vérifie que $\mathcal{P}(0) = 1 > 0$, $\mathcal{P}(1) = -1 < 0$ et $\mathcal{P}(3) = 1 > 0$, d'où le positionnement de ses racines. En pratique on a $\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\mu = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

6. Pour chacune des valeurs propres de C_3 déterminez un vecteur propre de norme euclidienne unité.

   Corrigé : Soit ν une des deux valeurs propre de C_3, soit vérifiant $\nu_3^2\nu + 1 = 0$ on cherche un vecteur (u, v) tel que $(1-\nu)u + v = 0$ et $u^2 + v^2 = 1$, soit en éliminant v, $u^2 = \frac{1}{1+(1-\nu)^2}$ et $v = (\nu - 1)u$. Mais $(1-\nu)^2 = \nu$ et donc $u = \frac{1}{\sqrt{1+\nu}}$, $v = \frac{\nu-1}{\sqrt{1+\nu}}$

7. Déterminez la matrice orthogonale P telle que $C_3 = P^t D P$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

   Corrigé : Les colonnes de la matrice de passage P^t sont constituées des coordonnées des vecteurs propres associés aux valeurs propres, soit :

$$P^t = \begin{pmatrix} u_\lambda & u_\mu \\ v_\lambda & v_\mu \end{pmatrix}$$

8. On note $z_k = Py_k$, montrez que $z_{k+1} = (I_2 - \delta_k D)z_k$.

   Corrigé : $y_{k+1} = (I - \delta_k C_3)y_k$, donc $z_{k+1} = (I - \delta_k D)z_k$.

9. On suppose, dans cette question uniquement, que la suite $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $\delta > 0$. Déterminez l'ensemble $\mathcal{D}$ des valeurs de δ telles que la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Pour $\delta \in \mathcal{D}$, quelle est la limite de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

   Corrigé : $z_{k+1} = (I - \delta D)z_k$. Pour que la suite z_k converge il faut et il suffit que les valeurs propres de la matrice d'itération soient de module strictement inférieur à 1, soit $-1 < 1 - \delta\nu < 1$ pour $\nu = \lambda$, μ, d'où la condition $\delta < \frac{2}{\mu}$. Sous cette condition z_k a pour limite 0, de même y_k et donc x_k a pour limite x^*.

10. On suppose, dans cette question uniquement, que $\delta_0 = 0$ et pour $k \geq 1$, $\delta_k = \frac{1}{3}k^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

    (a) Montrez que pour tout $\alpha > 0$ la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

    Corrigé : Regardons chaque composante de z_k : $z^i_{k+1} = (1 - \frac{1}{3}k^{-\alpha}\nu)z^i_k$ avec $\nu = \lambda$ pour $i = 1$ et $\nu = \mu$ pour $i = 2$. Pour $k > 1$, $0 < 1 - \frac{1}{3}k^{-\alpha}\nu < 1$ et donc la suite z^i_k est monotone (décroissante si z^i_0 est positif, croissante sinon) et bornée par 0, elle est donc convergente.

    (b) Discutez en fonction de α la convergence de la série $\sum_{k\geq 1} \ln(1 - ck^{-\alpha})$ où $c \in]0, 1[$ est une constante réelle.

    Corrigé : $\ln(1 - ck^{-\alpha})$ est équivalent pour k grand à $-ck^{-\alpha}$, la série est donc convergente pour $\alpha > 1$ et divergente de limite $-\infty$ sinon.

    (c) En déduire la limite de la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction de α.

    Corrigé : On a $z^i_{k+1} = \prod_{j=1}^{j=k}(1 - \frac{\nu}{3}j^{-\alpha})z^i_0$. Or :

    $$\ln\left(\prod_{j=1}^{j=k}(1 - \frac{\nu}{3}j^{-\alpha})\right) = \sum_{j=1}^{j=k}\ln(1 - \frac{\nu}{3}j^{-\alpha})$$

    On déduit donc de la question précédente que pour $\alpha \leq 1$ le logarithme du produit tend vers $-\infty$ et donc le produit et z_k tendent vers zéro, alors que pour $\alpha > 1$ le produit a une limite finie et z_k a une limite qui dépend de z_0.

    (d) Si l'on calcule la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en vue de résoudre l'équation $Ax = b$, quelle suite $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ conseilleriez vous parmi les suites de la forme $\delta_k = \delta > 0$ et $\delta_k = \frac{1}{3}k^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$?

On considère pour finir le cas $n = 2$, $A = A_2$ et $b = b_2$ comme à la question 2.

11. Si $\delta_k = \delta = \frac{1}{5}$ pour tout k, montrez que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $A\bar{x} = b$.

    Corrigé : On calcule la matrice associée $C_2 = 2\,A_2$, ses valeurs propres sont 0 et 4. La matrice D est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et donc $I - \delta D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-4\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. La suite z_k est convergente car sa première composante est stationnaire et sa deuxième tend vers zéro. Comme $y_k = P^{-1} z_k$ la suite y_k est également convergente, enfin comme $x_k = y_k + x*$ la suite x_k est convergente, notons $\bar{x}$ sa limite, comme $x_{k+1} = x_k - \delta A^t(Ax_k - b)$, en passant à la limite on a $\bar{x} = \bar{x} - \delta A^t(A\bar{x} - b)$ et donc $A\bar{x} = b$.

12. Comment $\bar{x}$ dépend-il de x_0 ?

    Corrigé : La forme de la matrice $I - \delta D$ nous montre que la première composante de z_k ne change pas, donc la composante de y_k suivant le sous-espace propre associé à la valeur propre nulle ne change pas au cours des itérations, et donc la composante de $\bar{x}$ le long de ce sous-espace propre est celle de x_0.