Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2012-2013
Licence de Mathématiques - L3

C. Basdevant - F. Cuvelier

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique
du jeudi 10 janvier 2013

Durée : 3h
Seul document autorisé une feuille manuscrite recto de notes personnelles

Exercice I

1. Trouvez une formule d'intégration numérique sur le segment $[0,1]$ de la forme :

$$\int_0^1 f(t)dt \approx I(f) = \alpha f(0) + \beta f(1) + \gamma f'(0) + \delta f'(1)$$

qui soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à trois.

Corrigé : Ecrivons que la formule est exacte pour les monômes de degré 0 à 3 :

$$\begin{array}{ll} f(x)=1 & 1=\alpha+\beta \\ f(x)=x & \dfrac{1}{2}=\beta+\gamma+\delta \\ f(x)=x^2 & \dfrac{1}{3}=\beta+2\delta \\ f(x)=x^3 & \dfrac{1}{4}=\beta+3\delta \end{array}$$

ce qui donne $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{1}{12}$, $\delta=-\frac{1}{12}$

2. Soit $P_f(x)$ le polynôme d'interpolation d'Hermite tel que $P_f(0)=f(0)$, $P_f(1)=f(1)$, $P_f'(0)=f'(0)$ et $P_f'(1)=f'(1)$. Démontrez que $I(f)=\int_0^1 P_f(x)dx$.

Corrigé : P_f est un polynôme de degré inférieur ou égal à trois, la formule est donc exacte pour P_f, comme f et P_f coïncident aux points de la formule, la propriété est vraie.

3. Démontrez la formule d'erreur pour $f \in C^4([0,1])$:

$$\forall x \in [0,1],\ \exists \zeta \in]0,1[\ f(x) - P_f(x) = \frac{1}{4!}x^2(x-1)^2 f^{(4)}(\zeta)$$

Corrigé : Pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$ posons

$$F(t) = f(t) - P_f(t) - \frac{f(x)-P_f(x)}{x^2(x-1)^2}t^2(t-1)^2$$

F a trois zéros distincts $(0, x, 1)$, par Rolle F' a deux zéros (distincts de $0, x, 1$), d'autre part, par les propriétés d'interpolation, F' s'annule en 0 et 1, donc a quatre zéros distincts. Par applications successives du théorème de Rolle, $F^{(4)}$ s'annule en au moins un point ζ, d'où le résultat.

4. En déduire une majoration de l'erreur $E(f) = |\int_0^1 f(t)dt - I(f)|$ pour $f \in C^4([0,1])$.

   Corrigé :

   $$E(f) = |\int_0^1 (f(t) - P_f(t))dt| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| \int_0^1 \frac{1}{4!} t^2(t-1)^2 dt = \frac{1}{720} \sup_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)|$$

5. En déduire une formule d'intégration numérique sur le segment $[a, b]$ de la forme :

   $$\int_a^b f(x)dx \approx M(f) = \lambda f(a) + \mu f(b) + \nu f'(a) + \xi f'(b)$$

   qui soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à trois.

   Corrigé : Posons $\phi(t) = f(a + t(b-a))$, alors $(b-a)\int_0^1 \phi(t)dt = \int_a^b f(x)dx$. La transformation affine conservant le degré des polynômes, la formule

   $$M(f) = (b-a)I(\phi) = (b-a)\left[\alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma(b-a)f'(a) + \delta(b-a)f'(b)\right]$$

   est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à trois. D'où

   $$\lambda = \frac{b-a}{2},\ \mu = \frac{b-a}{2},\ \nu = \frac{(b-a)^2}{12},\ \xi = -\frac{(b-a)^2}{12}$$

6. Donnez une majoration de $|\int_a^b f(x)dx - M(f)|$ pour $f \in C^4([a,b])$.

   Corrigé :

   $$|\int_a^b f(x)dx - M(f)| = (b-a)E(\phi) \leq \frac{(b-a)}{720} \sup_{x\in[0,1]} |\phi^{(4)}(x)| = \frac{(b-a)^5}{720} \sup_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

7. Soit $[A, B]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $x_i = A + ih$ pour $i = 0..N$ avec $h = \frac{B-A}{N}$. Soit $f \in C^4([A,B])$, on pose :

   $$U(f) = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) + \frac{f(x_N)}{2}\right) + \frac{h^2}{12}\left(f'(x_0) - f'(x_N)\right)$$

   Montrez que

   $$|\int_A^B f(x)dx - U(f)| \leq (B-A)\frac{h^4}{720} \sup_{x\in[A,B]} |f^{(4)}(x)|$$

Corrigé : La formule composée s'obtient en sommant les formules élémentaires sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$. L'erreur est majorée par la somme des erreurs sur chacun des intervalles élémentaires.

8. Comparez la formule d'intégration précédente et son erreur à la formule des trapèzes composée.

Corrigé : La formule des trapèzes composée est :

$$\int_A^B f(x)dx = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) + \frac{f(x_N)}{2}\right) - (B-A)\frac{h^2}{12}f''(\xi)$$

Le terme correctif avec la dérivée première fait donc gagner deux ordres sur l'erreur.

Exercice II

Soit $\varepsilon > 0$ et $A(\varepsilon)$ la matrice $n \times n$ définie par :

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou plus précisément : $(a_{i,i-1} = 1$, pour $i = 2, \ldots, n)$, $a_{1,n} = \varepsilon$, et tous les autres éléments sont nuls.

1. Calculez les vapeurs propres de $A(0)$ et de $A(\varepsilon)$.

Corrigé : La matrice $A(0)$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle, elle est nilpotente, toutes ses valeurs propres sont nulles.
Calculons le polynôme caractéristique de $A(\varepsilon)$:

$$P_\varepsilon(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & & 0 & \varepsilon \\ 1 & -\lambda & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & 0 & 1 & -\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

En développant le déterminant suivant la première ligne on obtient :

$$P_\varepsilon(\lambda) = -\lambda M(\lambda) + (-1)^{n-1}\varepsilon N(\lambda)$$

avec $M(\lambda)$ le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure d'ordre $n-1$ dont les éléments diagonaux sont $-\lambda$ et donc $M(\lambda) = (-\lambda)^n$, et $N(\lambda)$ le déterminant de la matrice triangulaire supérieure d'ordre $n-1$ dont les éléments diagonaux sont 1, donc $N(\lambda) = 1$, d'où la formule :

$$P_\varepsilon(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - \varepsilon)$$

Les valeurs propres de la matrice $A(\varepsilon)$ sont donc les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de ε

2. Les matrices $A(0)$ et $A(\varepsilon)$ sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$?

   Corrigé : $A(0)$ étant nilpotente n'est pas diagonalisable. $A(\varepsilon)$ ayant toutes ses valeurs propres distinctes deux à deux, mais complexes, est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice III

Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$, où A est une matrice carrée d'ordre n, on considère la méthode suivante, dite méthode de Richardson. Soit $r > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on définit la suite $x_k \in \mathbb{R}^n$ par la formule de récurrence :

$$x_{k+1} = x_k - r(Ax_k - b)$$

1. Montrez que cette méthode est du type $Mx_{k+1} = Nx_k + b$ avec $A = M - N$, précisez M et N. Puis donnez la matrice d'itération B de la méthode.

   Corrigé : On trouve $M = r^{-1}I$ et $N = r^{-1}I - A$ et $B = I - rA$.

2. Pour A une matrice symétrique définie positive

   (a) Donnez en la démontrant une condition nécessaire et suffisante sur r pour que la méthode converge.

   Corrigé : Pour que la méthode converge il faut et il suffit que le rayon spectral de B soit inférieur strictement à 1. Les valeurs propres de B se déduisant simplement de celles de A (qui sont réelles), cela s'écrit : $-1 < 1 - r\lambda < 1$ pour toute valeur propre λ de A. Ce qui donne, puisque les valeurs propres de A sont strictement positives, la condition $0 < r < \frac{2}{\lambda}$. La condition nécessaire et suffisante de convergence de la méthode est donc $r < \frac{2}{\rho(A)}$.

   (b) Montrez que la valeur optimale de r est $\frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$ où λ_1 et λ_n sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de A.

   Corrigé : La méthode est d'autant plus rapide que le rayon spectral de la matrice d'itération est petit. Or $\rho(B) = \max_i |1 - r\lambda_i|$ avec λ_i les valeurs propres de A que l'on suppose ici ordonnées de la plus petite à la plus grande (elles sont positives). Cette fonction de r s'écrit $f(r) = \max\{1 - r\lambda_1, r\lambda_n - 1\}$, son graphe est tracé sur la Figure 1 et son minimum est atteint à la valeur indiquée dans l'énoncé.

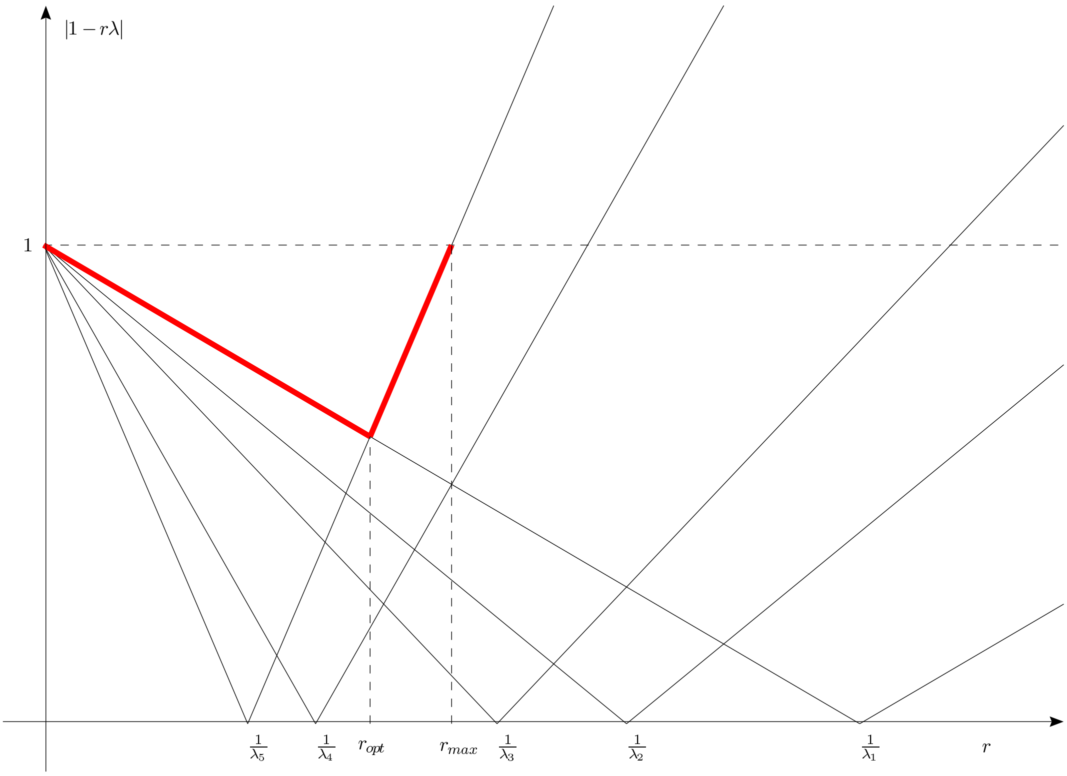

FIG. 1 – $\rho(B)$ en fonction de r

3. On suppose dans cette question que la matrice A est strictement diagonalement dominante avec des éléments diagonaux tous positifs. Montrez que si :

$$0 < r \leq \frac{1}{\max_i a_{i,i}}$$

la méthode de Richardson converge.
Indication : on pourra utiliser la norme $\|A\|_\infty = \max_i(\sum_j |a_{i,j}|)$.

Corrigé : Pour que la méthode soit convergente il suffit de vérifier que $\|B\|_\infty < 1$, soit :

$$|1 - r\, a_{i,i}| + r \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < 1, \quad \forall i$$

mais, compte tenu de la condition sur r on a $1 - r\, a_{i,i} \geq 0$, par ailleurs la stricte diagonale dominance entraîne $r \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < r a_{i,i}$, l'inégalité stricte est donc bien vérifiée pour tout i.

4. Comparez les résultats des questions 2 et 3 pour la matrice tridiagonale d'ordre n, d'éléments diagonaux $a_{i,i} = \alpha > 2$ et d'éléments extra-diagonaux $a_{i,i\pm1} = -1$, dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_k = \alpha - 2\cos(\frac{k\pi}{n+1}) \quad k = 1, \cdots, n$$

Corrigé : La matrice est symétrique, définie positive, en effet toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Ses plus petite et plus grande valeurs propres sont respectivement :

$$\lambda_1 = \alpha - 2\cos(\frac{\pi}{n+1}) \quad \text{et} \quad \lambda_n = \alpha + 2\cos(\frac{\pi}{n+1})$$

La question 2 nous dit que la méthode est convergente si et seulement si

$$r < \frac{2}{\alpha + 2\cos(\frac{\pi}{n+1})}$$

et que le paramètre optimal est $r = 1/\alpha$. La matrice est également strictement diagonalement dominante à diagonale positive, la question 3 nous dit que la méthode est convergente pour $r \leq 1/\alpha$, la valeur limite indiquée de r est en fait la valeur optimale.