Notes de cours d'Analyse

Équations différentielles

Étude théorique et schémas numériques

Ingénieurs MACS - première année

C. Basdevant

Département de Mathématiques - Institut Galilée
Université Paris-Nord

Année 2003 - 2004

Avertissement important

Ces notes reprennent les définitions et résultats du cours d'Analyse 1.2 de MACS première année. Elles ne contiennent ni les démonstrations, ni les exemples, ni les exercices donnés en cours ou en TD.

Tous les résultats sont démontrés en cours et il est rappelé aux étudiants que **la compréhension et la maîtrise des démonstrations** est une condition essentielle pour bien assimiler le cours, pour savoir appliquer les résultats et pour pouvoir progresser. Ils sont donc fermement invités à retrouver toutes les démonstrations en s'aidant soit de leurs notes personnelles, soit de manuels, soit en demandant conseil à leurs enseignants.

Lettres grecques

α	alpha	β	bêta	$\gamma\ \Gamma$	gamma	$\delta\ \Delta$	delta
$\varepsilon\ \epsilon$	epsilon	ζ	zêta	η	êta	$\vartheta\ \theta\ \Theta$	thêta
ι	iota	$\varkappa\ \kappa$	kappa	$o\ O$	omicron	$\lambda\ \Lambda$	lambda
μ	mu	ν	nu	$\xi\ \Xi$	ksi	$\varpi\ \pi\ \Pi$	pi
$\varrho\ \rho$	rhô	$\varsigma\ \sigma\ \Sigma$	sigma	τ	tau	$\upsilon\ \Upsilon$	upsilon
$\varphi\ \phi\ \Phi$	phi	χ	khi	$\psi\ \Psi$	psi	$\omega\ \Omega$	oméga

Première partie

Résultats théoriques pour les EDO

Chapitre I

Outils Mathématiques

1 Rappels de calcul différentiel

Définition I.1 (Fonction différentiable)
Soit E et F deux espaces vectoriels normés et U un ouvert de E. La fonction $f : U \to F$ est différentiable au point $a \in U$ s'il existe une application linéaire continue $f'(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + o(\|x-a\|)$$

$f'(a)$ est la différentielle de f au point a, quand elle existe elle est unique.

Remarque I.1 $o(\|x-a\|) = \|x-a\|\epsilon(x-a)$ avec $\lim_{x\to a} \epsilon(x-a) = 0$.

Remarque I.2 La différentiabilité de f en a implique la continuité de f en ce point.

Remarque I.3 Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$ alors $f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, et $f'(a)$ est représenté dans les bases canoniques de E et F par une matrice $m \times n$:

$$f'(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$$

Exemple I.1 Soit $E = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \text{ continue}\}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Considérons la fonction ϕ définie sur E, à valeurs dans E, par :

$$\phi(f)(x) = \int_0^1 k(x,s)g(f(s))ds \quad \forall x \in [0,1],\ \forall f \in E$$

où la fonction k est donnée, continue de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ et g est deux fois continûment différentiable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Alors ϕ est différentiable sur E et :

$$\left(\phi'(f).h\right)(x) = \int_0^1 k(x,s)g'(f(s))h(s)ds,\ \forall x \in [0,1],\ \forall f \in E,\ \forall h \in E$$

Exemple I.2 Soit E un espace de Banach et $GL(E)$ le groupe linéaire de E, c'est à dire l'ensemble des applications linéaires continues bijectives de E dans E et dont l'inverse est continue (note : l'inverse d'une application linéaire continue bijective est toujours continue dans un Banach d'après le théorème de l'application ouverte).

- ✦ $GL(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.
- ✦ L'application Ψ qui à $X \in GL(E)$ associe $\Psi(X) = X^{-1} \in GL(E)$ est différentiable et :

$$\Psi'(X).h = -X^{-1}hX^{-1}, \quad \forall h \in \mathcal{L}(E),\ \forall X \in GL(E)$$

Exemple I.3 Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés, le produit $E_1 \times E_2$ est muni de la norme $\|x\| = \|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_{E_1} + \|x_2\|_{E_2}$. Soit B une application bilinéaire continue sur $E_1 \times E_2$ à valeurs dans un espace vectoriel normé F (rappel la continuité de B est équivalente à $\|B(x_1, x_2)\| \leq M\|x_1\|\|x_2\|$). Alors B est différentiable et :

$$B'(a_1, a_2).(h_1, h_2) = B(a_1, h_2) + B(h_1, a_2),\ \forall (a_1, a_2)\,\text{et}\,(h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$$

Proposition I.1
Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et V un ouvert de F et
$f : U \to F$ différentiable en $a \in U$, $f(U) \subset V$,
$g : V \to G$ différentiable en $b = f(a) \in V$.
Alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$$

Exercice I.1 Calculez les différentielles des fonctions suivantes :

1. $J(f) = \int_\Omega |f(x)|^2 dx,\ f \in L^2(\Omega),\ \Omega$ ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
2. $G(f) = \int_\Omega \|\nabla f(x)\|^2 dx,\ f \in H^1(\Omega),\ \Omega$ ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
3. $\Phi(X) = (X^t X)^{-1},\ X \in GL(\mathbb{R}^n)$

Théorème I.2 (Accroissements finis)
Soit E et F deux espaces vectoriels normés et U un ouvert de E. Soit $f : U \longrightarrow F$, différentiable dans U. Si le segment $[a, b]$ est inclus dans U on a la majoration :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{0<t<1} \|f'(a + t(b - a))\|\, \|b - a\|$$

Remarque I.4 Pour une fonction de la variable réelle, à valeurs réelles, et uniquement dans ce cas, la formule des accroissements finis s'écrit :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \quad \text{avec} \quad c \in]a, b[$$

Pour une fonction définie dans un espace vectoriel normé et à valeurs réelles, elle s'écrit :

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a)).(b - a), \quad \text{avec} \quad \theta \in]0, 1[$$

Corollaire I.3
Soit E et F deux espaces vectoriels normés et U un ouvert connexe de E. Soit $f : U \longrightarrow F$, différentiable dans U, avec $f'(x) = 0$, $\forall x \in U$. Alors f est constante dans U.

Définition I.2 (Différentielle seconde)
Soit E et F deux espaces vectoriels normé et U un ouvert de E. Soit $f : U \longrightarrow F$, différentiable dans un voisinage de $a \in U$.
On dit que f est deux fois différentiable en a si l'application f' définie dans un voisinage de a et à valeurs dans $\mathcal{L}(E, F)$ est différentiable en a.

$$f''(a) = (f')'(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_2(E, F)$$

La différentielle seconde $f''(a)$ est une application bilinéaire symétrique continue de $E \times E$ dans F.

Exemple I.4 Si f est définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans F, $f''(a)$ s'exprime en fonction des dérivées partielles secondes de f (qui sont des éléments de F) :

$$f''(a).(h, k) = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, h_i h_j, \quad \forall h, k \in \mathbb{R}^n$$

Exemple I.5 Soit Ψ qui à $X \in GL(E)$ associe $\Psi(X) = X^{-1} \in GL(E)$, alors :

$$\Psi''(X).h.k = X^{-1}hX^{-1}kX^{-1} + X^{-1}kX^{-1}hX^{-1}, \ \forall h, k \in \mathcal{L}(E)$$

Exercice I.2 Calculez les différentielles secondes des fonctions suivantes :
1. $J(f) = \int_\Omega |f(x)|^2 dx, \ f \in L^2(\Omega), \ \Omega$ ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
2. $G(f) = \int_\Omega \|\nabla f(x)\|^2 dx, \ f \in H^1(\Omega), \ \Omega$ ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
3. $\Phi(X) = (X^t X)^{-1}, \ X \in GL(\mathbb{R}^n)$

Théorème I.4 (Formule de Taylor, reste de Young)
Soit E et F deux espaces vectoriels normés et U un ouvert de E. Soit $f : U \longrightarrow F$, $p-1$ fois continûment différentiable dans un voisinage V d'un point $a \in U$ et p fois différentiable en a. Si le segment $[a, a+h]$ est inclus dans V on a :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a).h + \frac{1}{2!} f''(a).h^{(2)} + \cdots \\ + \frac{1}{(p-1)!} f^{(p-1)}(a).h^{(p-1)} + \frac{1}{p!} f^{(p)}(a).h^{(p)} + o(\|h\|^p)$$

Théorème I.5 (Formule de Taylor, reste intégrale)
Soit E et F deux espaces vectoriels normés et U un ouvert de E. Soit $f : U \longrightarrow F$, p fois continûment différentiable dans un voisinage V d'un point $a \in U$. Si le segment $[a, a+h]$ est inclus dans V on a :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a).h + \frac{1}{2!} f''(a).h^{(2)} + \cdots \\ + \frac{1}{(p-1)!} f^{(p-1)}(a).h^{(p-1)} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{(p-1)}}{(p-1)!} f^{(p)}(a+th).h^{(p)}\, dt$$

Remarque I.5 La formule de Taylor avec reste de Lagrange ($f \in C^p$, reste : $+\frac{1}{p!}f^{(p)}(a+\theta h).h^{(p)}$ avec $\theta \in]0,1[$) n'est valable que pour des fonctions à valeurs réelles.

2 Théorème du point fixe

Objet : résolution d'une équation non-linéaire ($g(x) = 0$ ou $f(x) = x$) dans un espace de Banach E. En posant $f(x) = x + g(x)$ ou $f(x) = x + Ag(x)$ avec $A \in GL(E)$ on passe d'une forme à l'autre.

Théorème I.6 (Du point fixe - Picard)
Soit F un fermé d'un espace de Banach E et f une contraction définie sur F, c'est à dire $f : F \longrightarrow F$ et

$$\exists \alpha < 1,\ \forall x, y \in F,\ \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$$

alors f possède un unique point fixe dans F (i.e. $\exists ! x \in F,\ f(x) = x$).

Remarque I.6 Si F est convexe et f différentiable dans un voisinage de F il suffit pour qu'elle soit contractante que $\sup_{x\in F}\|f'(x)\| < 1$.

Corollaire I.7
Soit F un fermé d'un espace de Banach E et $f : F \longrightarrow F$. S'il existe un $p \geq 1$ tel que l'itérée f^p soit une contraction, alors f possède un unique point fixe dans F.

Méthode des approximations successives pour résoudre l'équation $x = f(x)$: prendre x_0 arbitraire et $x_{n+1} = f(x_n)$. Si la suite x_n converge et si f est continue, sa limite est solution de l'équation. Si f est contractante l'algorithme converge toujours vers l'unique solution de l'équation.

Théorème I.8 (Point fixe avec paramètre)
Soit F un fermé d'un espace de Banach E et $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : F \times U \longrightarrow F$ continue telle que $\forall u \in U,\ f(.,u) : F \longrightarrow F$ est contractante avec une constante α indépendante de u, soit :

$$\exists \alpha < 1,\ \forall u \in U,\ \forall x, y \in F,\ \|f(x,u) - f(y,u)\| \leq \alpha \|x - y\|$$

Si $x(u)$ est l'unique point fixe de $f(.,u)$, alors l'application qui à $u \in U$ associe $x(u) \in F$ est continue.

3 Théorème des fonctions implicites

Objet : résoudre l'équation $f(x, y) = 0$ sous la forme $y = g(x)$.

Théorème I.9 (Fonctions implicites)
Soit E, F, G des espaces de Banach et $U \subset E$, $V \subset F$ des ouverts, $f : U \times V \longrightarrow G$ une fonction de classe C^1.
Soit $(a, b) \in U \times V$ tel que :

$$f(a,b) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \in \mathcal{L}(F,G) \text{ est inversible.}$$

Alors il existe des voisinages U' de a et V' de b et une unique application $g : U' \longrightarrow V'$ tels que $f(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in U'$ (soit $y = g(x)$).
De plus g est de classe C^1 et :

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$$

Remarque I.7 L'expression de $g'(x)$ s'obtient facilement en différentiant la relation $f(x, g(x)) = 0$.

4 Module de continuité

Définition I.3
Soit E et F des espaces vectoriels normés, K un compact de E et $f : K \longrightarrow F$ continue. On appelle module de continuité de f sur K la fonction $\omega : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\omega(h) = \sup_{\substack{x,y \in K \\ \|x-y\| \le h}} \|f(x) - f(y)\|$$

Proposition I.10
Le module de continuité de f est une fonction croissante de h et $\omega(h) \xrightarrow[h \to 0_+]{} 0$.

Proposition I.11
Si K est convexe le module de continuité ω est une fonction continue.

5 Lemmes de Gronwall

Théorème I.12 (Lemme de Gronwall continu)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable et vérifiant :

$$\|\phi'(t)\| \le \alpha \|\phi(t)\| + \beta, \quad \forall t \in I$$

avec $\alpha, \beta \ge 0$. Alors, $\forall t, t_0 \in I$:

$$\|\phi(t)\| \le \|\phi(t_0)\| e^{\alpha|t-t_0|} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha|t-t_0|} - 1) \quad \text{si } \alpha \neq 0$$
$$\|\phi(t)\| \le \|\phi(t_0)\| + \beta|t - t_0| \quad \text{si } \alpha = 0$$

Théorème I.13 (Lemme de Gronwall discret)
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ *une suite de réels positifs vérifiant :*

$$a_{n+1} \leq (1+A)a_n + B, \quad \forall n \geq 0$$

avec $A > 0$ *et* $B \geq 0$*. Alors :*

$$a_n \leq a_0 e^{nA} + \frac{e^{nA}-1}{A} B, \quad \forall n \geq 0$$

Chapitre II

Résultats d'existence et d'unicité pour les EDO

1 Introduction et terminologie

On considérera le problème de Cauchy, ou problème à valeur initiale :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{II.1}$$

avec $x, x_0 \in I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $y(x), y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue.

Définition II.1
On dira que la fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est solution de (II.1) *si $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $y(x_0) = y_0$ et $\forall x \in I,\ y'(x) = f(x, y(x))$.*

2 Existence et unicité pour le problème de Cauchy

Proposition II.1
Si la fonction f est continue sur $I \times \mathbb{R}^n$, toute solution du problème (II.1) *est solution du problème* (II.2) *suivant et réciproquement.*

$$y \in C^0(I, \mathbb{R}^n) \ \text{ et } \ y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \tag{II.2}$$

Proposition II.2
Si la fonction f est de classe C^k sur $I \times \mathbb{R}^n$, toute solution du problème (II.1) *est de classe C^{k+1}.*

2 - a Existence et unicité globale

Définition II.2
La fonction $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est Lipschitzienne en y s'il existe une constante L, appelée la constante de Lipschitz de f, telle que :

$$\forall x \in I,\ \forall y, z \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L\|y - z\|$$

Théorème II.3 (Cauchy - Lispchitz - f Lipschitzienne)
Soit la fonction f, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, continue sur $[x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ et Lipschitzienne par rapport à y. Alors, $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique fonction $y \in C^1([x_0, x_0 + a], \mathbb{R}^n)$ qui vérifie :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)),\ \forall x \in [x_0, x_0 + a] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{II.3}$$

Corollaire II.4 (f Lipschitzienne sur tout compact)
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, borné ou non borné et $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, continue et Lipschitzienne sur tout compact $K \subset I$ (c'est à dire qu'il existe $L(K)$ telle que $\forall x \in K,\ \forall y, z \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L(K)\|y - z\|$).
Alors pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe une unique fonction $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ solution du problème (II.1).

2 - b Existence et unicité locale

Lemme II.5 (Cylindre de sécurité)
Soit la fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue avec $A = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a,\ \|y - y_0\| \leq b\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
Posons $M = \sup_{(x,y)\in A}\|f(x, y)\|$.
Alors, si $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$, on peut définir un cylindre de sécurité C par

$$C = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times \bar{B}(y_0), \quad \text{avec} \quad \bar{B}(y_0) = \{y \mid \|y - y_0\| \leq b\}$$

tel que, si $F = C^0([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \bar{B}(y_0))$ alors l'opérateur

$$\Phi(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

vérifie $\Phi(F) \subset F$.

Lemme II.6
Si la fonction f est Lipschitzienne de constante de Lipschitz L sur A, l'opérateur Φ vérifie :

$$\begin{aligned} \forall y, z \in F \quad & \|\Phi(y)(x) - \Phi(z)(x)\| \leq L|x - x_0|\|y - z\|_F \\ & \|\Phi^m(y)(x) - \Phi^m(z)(x)\| \leq \frac{L^m}{m!}|x - x_0|^m\|y - z\|_F \end{aligned}$$

avec

$$\|y\|_F = \sup_{|x - x_0| \leq \alpha} \|y(x)\|.$$

Théorème II.7 (Existence et unicité locale)
Soit la fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, continue, Lipschitzienne par rapport à* y *sur le cylindre* A *:*

$$A = \{(x,y) \mid |x - x_0| \leq a,\ \|y - y_0\| \leq b\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Alors l'équation

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{II.4}$$

a une unique solution sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ *avec* $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$ *où* $M = \sup_{(x,y)\in A}\|f(x,y)\|$.

3 Prolongement des solutions

Définition II.3 (f Localement Lipschitzienne)
f *est localement Lipschitzienne sur* U *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *si pour tout point de* U *il existe un voisinage de ce point dans* U *sur lequel* f *est Lipschitzienne.*

Remarque II.1 Si f est C^1 elle est localement Lipschitzienne.

Lemme II.8 (Solution maximale)
Soit U *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *,* f *continue sur* U *et localement Lipschitzienne. Alors pour tout* $(x_0, y_0) \in U$ *il existe un intervalle* $I_{max} =]\omega_-, \omega_+[$*, avec* $-\infty \leq \omega_- < x_0 < \omega_+ \leq +\infty$*, tel que :*

- ✦ *l'équation* $y' = f(x,y)$ *avec* $y(x_0) = y_0$ *a une unique solution sur* I_{max}.
- ✦ *si* $z : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est une solution de l'équation précédente, alors* $I \subset I_{max}$ *et* $z \equiv y$ *sur* I.

Théorème II.9 (Prolongement jusqu'au bord)
Soit U *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *,* f *continue sur* U *et localement Lipschitzienne. Alors chaque solution de* $y' = f(x,y)$ *possède un prolongement jusqu'au bord de* U*. C'est à dire que si* $y : I_{max} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est solution maximale pour* $y(x_0) = y_0$ *avec* $(x_0, y_0) \in U$*, alors pour tout compact* K *de* U *il existe* $x_1, x_2 \in I_{max}$*,* $x_1 < x_0 < x_2$ *tels que* $(x_1, y(x_1)) \notin K$ *et* $(x_2, y(x_2)) \notin K$.

Corollaire II.10 (Solutions maximales des équations affines)
Soit l'équation différentielle affine :

$$y' = A(x)y + B(x)$$

avec $A :]a,b[\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *et* $B :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ *continues.*
Alors les solutions maximales sont définies sur tout l'intervalle $]a,b[$.

Théorème II.11 (Système dissipatif)
Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est localement Lipschitzienne et*

$$\exists v \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \geq 0,\ \beta > 0, \quad \textit{tels que} \quad (f(y), y - v) \leq \alpha - \beta\|y\|^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Alors le problème de Cauchy $y' = f(y)$ *avec* $y(0) = y_0$ *possède une unique solution qui existe pour tout* $x \geq 0$.

Chapitre III

Résultats de stabilité

1 Perturbation d'une EDO

Théorème III.1 (Lemme fondamental)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue et :

- ✦ $y : [x_0, x_0 + a) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *solution de* $y' = f(x, y)$,
- ✦ $v : [x_0, x_0 + a) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *continue et dérivable,*

telles que $\forall x \in [x_0, x_0 + a)$:

- ✦ $\|v'(x) - f(x, v(x))\| \leq \delta$ *(v est une solution approchée),*
- ✦ $\|f(x, y(x)) - f(x, v(x))\| \leq L\|y(x) - v(x)\|$.

Alors, $\forall x \in [x_0, x_0 + a)$:

$$\|y(x) - v(x)\| \leq \|y(x_0) - v(x_0)\|e^{L(x-x_0)} + \frac{\delta}{L}(e^{L(x-x_0)} - 1)$$

2 Continuité par rapport aux conditions initiales

Lemme III.2
Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement Lipschitzienne. Alors pour tout compact K de U il existe une constante $L \geq 0$ telle que

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L\|y - z\| \quad \text{sur } K$$

Théorème III.3
Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement Lipschitzienne.
Désignons par $y(x_0, y_0; x)$ la solution maximale du problème

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

et par $I_{max}(x_0, y_0)$ *son support dans* $\mathbb{R}$.
Alors, l'ensemble $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *défini par :*

$$D = \{(x_0, y_0, x) \,|\, (x_0, y_0) \in U,\ x \in I_{max}(x_0, y_0)\}$$

est ouvert et l'application Ψ *définie sur* D *par :*

$$\Psi(x_0, y_0, x) = y(x_0, y_0; x) \in \mathbb{R}^n$$

est continue.

Chapitre IV

Équations différentielles linéaires et affines

On considère des équations différentielles du type :

$$y' = A(x)y + g(x)$$

avec $y \in \mathbb{R}^n$, $A(x)$ une matrice $n \times n$ et $g(x) \in \mathbb{R}^n$.
On a vu que si I est un intervalle et $A(x)$ et $g(x)$ sont continues sur I, la solution du problème de Cauchy existe et est unique sur I.

Proposition IV.1 (Principe de superposition)
Soit I in intervalle de $\mathbb{R}$, et supposons $A(x), g_1(x)$ et $g_2(x)$ continues sur I. Soit :

- ✦ *y_1 solution de $y_1' = A(x)y_1 + g_1(x)$,*
- ✦ *y_2 solution de $y_2' = A(x)y_2 + g_2(x)$.*

Alors, $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ est solution de $y' = A(x)y + g(x)$ avec $g(x) = c_1g_1(x) + c_2g_2(x)$, quelles que soient les constantes c_1 et c_2.

Corollaire IV.2
Les solutions de l'équation homogène $y' = A(x)y$ forment un espace vectoriel, elles dépendent linéairement de y_0.

Définition IV.1 (Résolvante)
Soit $y(x_0, y_0; x)$ la solution de l'équation homogène $y' = A(x)y$ avec $y(x_0) = y_0$, elle s'écrit :

$$y(x_0, y_0; x) = R(x, x_0)y_0$$

où l'opérateur linéaire $R(x, x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ s'appelle la résolvante de l'EDO.

Proposition IV.3 (Propriétés de la résolvante)
Soit $A(x)$ continue sur I, $R(x, x_0)$ la résolvante de l'équation $y' = A(x)y$. Alors :

1. $\frac{\partial}{\partial x}R(x, x_0) = A(x)R(x, x_0)$,
2. $R(x_0, x_0) = Id$,
3. $R(x, x_0) = R(x, x_1)R(x_1, x_0)$,

4. $R(x, x_0) = R(x_0, x)^{-1}$.

Théorème IV.4 (Liouville)
Soit $A(x)$ continue sur I et $R(x, x_0)$ la résolvante de l'équation $y' = A(x)y$. Alors le déterminant de la résolvante est donné par :

$$\det R(x, x_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{trace}(A(t))\, dt\right)$$

Proposition IV.5 (Équations affines (linéaires non-homogènes))
Soit l'équation différentielle affine :

$$y' = A(x)y + g(x)$$

avec $A(x)$ et $g(x)$ définies et continues sur un intervalle I. Alors :

- ✦ *Les solutions forment un espace affine : on obtient toutes les solutions en faisant la somme d'une solution particulière plus l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée.*
- ✦ *Une solution particulière peut être obtenue par la méthode de variation de la constante :*

$$y(x) = R(x, x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} R(x, t)g(t)\, dt$$

où $R(x, x_0)$ est la résolvante de l'équation homogène.

Proposition IV.6 (Équations linéaires à coefficients constants)
Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$y' = Ay$$

avec A une matrice $n \times n$ indépendante de x. Alors sa résolvante est invariante par translation : $R(x, x_0) = M(x - x_0)$ avec $M(x) = R(x, 0)$.

$M(x)$ est solution de $\frac{d}{dx}M(x) = AM(x)$, on pose alors $M(x) = \exp(Ax)$

Définition IV.2 (Exponentielle de matrice)
Soit A une matrice $n \times n$ et x un réel, $\exp(Ax)$ est la matrice $n \times n$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\exp(Ax) = A\exp(Ax) \\ \exp(A0) = \exp(\mathbf{0}) = Id \end{cases}$$

Proposition IV.7
L'exponentielle de matrice vérifie les propriétés suivantes :

1. $\exp(A(x + x_0)) = \exp(Ax)\exp(Ax_0)$
2. *Si $BA = AB$, alors $B\exp(Ax) = \exp(Ax)B$*
3. *Si $BA = AB$, alors $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$*

4. $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$
5. $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{trace}(A))$
6. *Si B est inversible,* $\exp(BAB^{-1}) = B\exp(A)B^{-1}$
7. $$\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$$
   avec convergence normale sur tout borné de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
8. *Si A est symétrique définie positive,* $\exp(A)$ *est symétrique définie positive.*
9. *Si A est antisymétrique,* $\exp(A)$ *est unitaire.*

Chapitre V

Sensibilité par rapport aux données

Théorème V.1
Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue et telle que sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe et est continue sur U.
Soit $y(x_0, y_0; x)$ la solution de :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Alors, y est continûment différentiable par rapport à y_0 et sa différentielle ($\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$) est solution de l'équation linéaire tangente (ou équation variationnelle) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}(x_0, y_0; x)\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x_0, y_0; x))\frac{\partial y}{\partial y_0}(x_0, y_0; x) \\ \frac{\partial y}{\partial y_0}(x_0, y_0; x_0) = Id \end{cases}$$

Chapitre VI

Stabilité à l'infini

1 Définitions

Soit l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ avec $f : [a, +\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue. On va s'intéresser au comportement de solutions (quand elles existent) quand x tend vers l'infini.

Définition VI.1 (Solution stable au sens de Lyapunov)
Soit $y(x_0, y_0; x)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y),\ x \in [x_0, +\infty[\\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Cette solution est stable au sens de Lyapunov si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta\ \|z_0 - y_0\| \leq \delta \Longrightarrow \|y(x_0, z_0; x) - y(x_0, y_0; x)\| \leq \varepsilon,\ \forall x \geq x_0$$

La solution est asymptotiquement stable si :

$$\exists \delta_0\ \|z_0 - y_0\| \leq \delta_0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \|y(x_0, z_0; x) - y(x_0, y_0; x)\| = 0$$

Sinon la solution est dite instable.

Proposition VI.1
la stabilité de la solution $y(x)$ de l'équation $y' = f(x,y)$ est la même que celle de la solution identiquement nulle pour l'équation $z' = g(x,z)$ avec :

$$g(x,z) = f(x, z + y(x)) - f(x, y(x))$$

Remarque VI.1 Pour une équation affine $y' = A(x)y + g(x)$, une solution est stable si et seulement si la solution nulle de l'équation homogène associée est stable. C'est donc l'équation elle-même qui est stable ou instable.

2 Stabilité des équations linéaires

Théorème VI.2 (équations linéaires à coefficients constants)
L'équation différentielle $y' = Ay$, où A est une matrice $n \times n$, est :

- ✦ *Asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.*
- ✦ *Stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle négative ou nulle et le sous espace propre d'une valeur propre de partie réelle nulle a pour dimension la multiplicité de cette valeur propre.*

Théorème VI.3 (Matrices symétriques)
Soit $x :\to A(x)$ une application continue, $A(x)$ étant une matrice $n \times n$ symétrique dont toutes les valeurs propres $\lambda_i(x)$ vérifient $\lambda_i(x) \leq \alpha$, $\forall x \geq x_0$. Alors la solution de l'équation différentielle linéaire $y' = A(x)y$ vérifie :

$$\|y(x)\| \leq e^{\alpha(x-x_0)}\|y(x_0)\|$$

où la norme est la norme euclidienne.
L'équation $y' = A(x)y$ est donc stable si $\alpha \leq 0$ et asymptotiquement stable si $\alpha < 0$.

3 Équations non-linéaires

Théorème VI.4 (Perturbation d'une équation linéaire)
Soit l'équation différentielle $y' = A(x)y + g(x, y)$ avec $g(x, 0) = 0$. On suppose les matrices $n \times n$ $A(x)$ continues en x et $g(x, y)$ continue, Lipschitzienne par rapport à y dans un voisinage de $y = 0$. On suppose également que :

- ✦ *La résolvante R de l'équation $y' = A(x)y$ vérifie $\|R(x, x_0)\| \leq Ke^{-\alpha(x-x_0)}$ pour $x \geq x_0$, avec $\alpha > 0$.*
- ✦ $\sup \dfrac{\|g(x,y)\|}{\|y\|} \to 0$ *quand $y \to 0$, uniformément en x.*

Alors la solution nulle de l'équation est asymptotiquement stable.

Proposition VI.5
Soit A une matrice constante, $g(x, y)$ une fonction continue, vérifiant $g(x, 0) = 0$, Lipschitzienne par rapport à y dans un voisinage de $y = 0$ et vérifiant : $\sup \dfrac{\|g(x,y)\|}{\|y\|} \to 0$ quand $y \to 0$, uniformément en x.
Si A possède une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors la solution nulle de l'équation $y' = Ay + g(x, y)$ est instable.

Théorème VI.6 (Équations autonomes)
Soit l'équation différentielle autonome $y' = f(y)$ avec $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et y_0 une solution stationnaire ($f(y_0) = 0$).

- ✦ *Si toutes les valeurs propres de $f'(y_0)$ ont une partie réelle strictement négative, y_0 est une solution stationnaire asymptotiquement stable. On dit que y_0 est un attracteur.*

- ✦ *Si une valeur propre de $f'(y_0)$ a une partie réelle strictement positive, la solution y_0 est instable.*
- ✦ *Si une valeur propre de $f'(y_0)$ a une partie réelle nulle, les autres ayant une partie réelle négative ou nulle, la solution peut être stable ou instable.*

Deuxième partie

Schémas numériques pour les EDO

Chapitre I

Méthodes à un pas

1 Introduction

On considère l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_d \end{cases} \tag{I.1}$$

avec $x \in [x_0, x_0 + a]$ et $y, y_d \in \mathbb{R}^n$. On supposera dans ce chapitre f continue et Lipschitzienne par rapport à y.
Etant donné un maillage régulier $x_k = x_0 + kh, \quad 0 \leq k \leq N, \quad h = \frac{a}{N}$ du segment $[x_0, x_0 + a]$, on cherche à calculer des approximations y_k des valeurs de la solution $y(x_k)$ aux nœuds du maillage.
On considère pour cela des méthodes, dites méthodes à un pas, de la forme :

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h\,\Phi(x_k, y_k, h) \\ y_0 = y_{dh} \end{cases} \tag{I.2}$$

avec $y_{dh} \in \mathbb{R}^n$ et $\Phi : [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n \times [0, h_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

2 Notions de convergence, stabilité et consistance

Définition I.1 (Convergence de la méthode)
La méthode (I.2) *de simulation du problème* (I.1) *est convergente si* $\forall y_d \in \mathbb{R}^n$ *:*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ y_{dh} \to y_d}} \max_{0 \leq k \leq N} \|y_k - y(x_k)\| = 0$$

où $y(x)$ *est la solution de* (I.1).

Définition I.2 (Stabilité (zéro-stabilité))
Le schéma (I.2) *est stable s'il existe des constantes* M_1 *et* M_2*, indépendantes de* h*, telles que* $\forall y_{dh}, z_{dh} \in \mathbb{R}^n$*,* $\forall \varepsilon_k \in \mathbb{R}^n$*, les suites* y_k *et* z_k *définies par :*

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\,\Phi(x_k, y_k, h), \quad y_0 = y_{dh} \\ z_{k+1} &= z_k + h\,\Phi(x_k, z_k, h) + \varepsilon_k, \quad z_0 = z_{dh} \end{aligned}$$

vérifient :

$$\max_{0 \le k \le N} \|y_k - z_k\| \le M_1 \|y_{dh} - z_{dh}\| + M_2 \sum_{k=0}^{N-1} \|\varepsilon_k\|$$

Définition I.3 (Consistance d'un schéma)
On dit que le schéma (I.2) *est consistant avec l'équation* (I.1) *si,* $\forall y(x)$ *solution de l'équation* (I.1)*, on a :*

$$\max_{0 \le k \le N} \left\| \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - \Phi(x_k, y(x_k), h) \right\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Remarque I.1 $\eta_k = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - \Phi(x_k, y(x_k), h)$ s'appelle l'erreur locale de troncature, elle doit être en $O(h)$ pour la consistance.
$\max_{0 \le k \le N} \|\eta_k\|$ est l'erreur globale de troncature.
$\varepsilon_k = h\eta_k = y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\,\Phi(x_k, y(x_k), h)$ s'appelle le résidu ou erreur locale (dans un pas), il doit être en $o(h)$ pour la consistance.

Théorème I.1 (Théorème d'équivalence de Lax-Richtmyer)
Soit l'équation différentielle :

$$y' = f(x, y)$$

avec f *continue de* $[x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^n$*, Lipschitzienne par rapport à* y*, et le schéma à un pas*

$$y_{k+1} = y_k + h\,\Phi(x_k, y_k, h)$$

avec Φ *continue de* $[x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n \times [0, h_0]$ *dans* $\mathbb{R}^n$*.*
Si le schéma est stable et consistant il est convergent.

3 Critère de consistance

Théorème I.2
Soit l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ *avec* f *continue de* $[x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^n$*, Lipschitzienne par rapport à* y*, et le schéma à un pas* $y_{k+1} = y_k + h\,\Phi(x_k, y_k, h)$ *avec* Φ *continue de* $[x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n \times [0, h_0]$ *dans* $\mathbb{R}^n$*.*
Le schéma est consistant si et seulement si :

$$\Phi(x, y, 0) = f(x, y), \quad \forall x \in [x_0, x_0 + a], \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \tag{I.3}$$

4 Critère de stabilité

Théorème I.3
Soit le schéma à un pas $y_{k+1} = y_k + h\,\Phi(x_k, y_k, h)$, une condition suffisante de stabilité est donnée par :
Il existe une constante Λ, indépendante de h, telle que

$$\begin{aligned} &\|\Phi(x,y,h) - \Phi(x,z,h)\| \le \Lambda\,\|y-z\|, \\ &\forall x \in [x_0, x_0+a],\ \forall y,z \in \mathbb{R}^n,\ \forall h \in [0,h_0] \end{aligned} \tag{I.4}$$

Corollaire I.4
Si Φ vérifie (I.3) *et* (I.4) *alors la méthode à un pas est convergente.*

5 Ordre d'une méthode à un pas

Définition I.4 (Méthode d'ordre p)
La méthode à un pas

$$y_{k+1} = y_k + h\,\Phi(x_k, y_k, h)$$

de discrétisation de l'équation $y' = f(x,y)$ est d'ordre p si :

$$\max_{0\le k\le N} \|\frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - \Phi(x_k, y(x_k), h)\| \le K\,h^p$$

pour toute solution $y(x)$ de l'EDO assez continûment différentiable.
La constante K ne dépendant que de y et de Φ.

Remarque I.2 L'erreur globale de troncature est alors en $O(h^p)$.

Théorème I.5 (Erreur pour une méthode stable d'ordre p)
Soit :

$$y_{k+1} = y_k + h\,\Phi(x_k, y_k, h)$$

une méthode à un pas de discrétisation de l'équation $y' = f(x,y)$.
Si la méthode est stable et d'ordre p et si f est assez continûment différentiable, on a la majoration de l'erreur :

$$\max_{0\le k\le N} \|y_k - y(x_k)\| \le M_1 \|y_{dh} - y_d\| + M_2 K h^p$$

6 Critère pour l'ordre p

Pour f suffisamment différentiable, posons :

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f \\ f^{(1)} &= \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial y}.f \\ &\dots \\ f^{(k+1)} &= \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial f^{(k)}}{\partial y}.f \end{aligned}$$

On vérifie que si y est solution de $y' = f(x,y)$ on a alors :

$$f^{(k)}(x, y(x)) = y^{(k+1)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x, y(x))$$

Théorème I.6
Si $f \in C^p([x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et Φ, $\frac{\partial \Phi}{\partial h}, \cdots$, $\frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}$ sont continues sur $[x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n \times [0, h_0]$, alors la méthode à un pas

$$y_{k+1} = y_k + h\,\Phi(x_k, y_k, h)$$

est d'ordre p si et seulement si, $\forall x, y \in [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, 0) = f(x, y) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial h}(x, y, 0) = \frac{1}{2} f^{(1)}(x, y) \\ \cdots \\ \frac{\partial^{p-1} \Phi}{\partial h^{p-1}}(x, y, 0) = \frac{1}{p} f^{(p-1)}(x, y) \end{cases}$$

On a alors dans la définition de l'ordre :

$$K = \frac{1}{(p+1)!} \max_{x \in [x_0, x_0 + a]} \| f^{(p)}(x, y(x)) \| + \frac{1}{p!} \max_{\substack{x \in [x_0, x_0 + a] \\ h \in [0, h_0]}} \| \frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(x, y(x), h) \|$$

7 Problèmes bien posés, bien conditionnés, raides

Définition I.5 (Problème bien posé)
Un problème de Cauchy (ou problème à valeur initiale) est un problème bien posé (au sens d'Hadamard) si sa solution est unique et dépend continûment de la donnée initiale.

Proposition I.7
Le problème de Cauchy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ est un problème bien posé si f est localement Lipschitzienne en y.

Définition I.6 (Problème numériquement bien posé)
Un problème de Cauchy est numériquement bien posé si sa solution n'est pas trop perturbée par une erreur initiale ou des perturbations du second membre.

Définition I.7 (Problème bien conditionné)
Un problème est bien conditionné si les méthodes numériques usuelles peuvent donner sa solution en un nombre raisonnable d'opérations. Sinon on parle de ***problème raide****.*

8 Catalogue de méthodes à un pas

8 - a Méthodes d'ordre un, explicites

Méthode d'Euler progressive - Euler forward

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k)$$

8 - b Méthodes d'ordre un, implicites

Méthode d'Euler rétrograde - Euler backward

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

8 - c Méthodes d'ordre deux, explicites

Méthode de Heun

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k)\right)$$

Méthode du développement de Taylor

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k) + \frac{h}{2}\, f^{(1)}(x_k, y_k)$$

8 - d Méthodes d'ordre deux, implicites

Méthode de Crank-Nicolson

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right)$$

8 - e Méthodes de Runge & Kutta

L'objectif des méthodes de Runge & Kutta est de construire des méthodes d'ordre élevé au moyen d'évaluations de $f(x, y(x))$ en des points intermédiaires. Une méthode de Runge et Kutta à q évaluations de f s'écrit :

$$\Phi(x, y, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i\, k_i$$

$$k_i = f\left(x + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\, k_j\right), \quad 1 \le i \le q$$

$$a_i = \sum_{j=1}^{q} b_{i,j}$$

Si on appelle B la matrice $q \times q$ des $b_{i,j}$, a et c les vecteurs de dimension q des coefficients respectivement a_i et c_i. La méthode se représente traditionnellement par le tableau (tableau de Butcher) :

$$\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & c^T \end{array}$$

Si la matrice B est strictement triangulaire inférieure la méthode est explicite, sinon elle est implicite.

Remarque I.3 D'après les critères vus plus haut, une méthode de Runge et Kutta est d'ordre 1 si $\sum_i c_i = 1$ et $\sum_i c_i\, a_i = 1/2$. On démontre que les méthodes de Runge et Kutta sont stables si f est Lipschitzienne. Elles ont même une stabilité presque optimale.

Méthodes de Runge & Kutta d'ordre 2

Méthodes explicites à 2 évaluations

$$\Phi(x,y,h) = (1-\alpha) f(x,y) + \alpha f(x + \frac{h}{2\alpha}, y + \frac{h}{2\alpha} f(x,y))$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2\alpha & 1/2\alpha & 0 \\ \hline & 1-\alpha & \alpha \end{array}$$

Avec $\alpha = \frac{1}{2}$ on retrouve la **méthode de Heun**, voir ci-dessus.
Avec $\alpha = 1$ c'est la **méthode d'Euler modifiée** ou **méthode du point milieu** :

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k))$$

Méthodes de Runge & Kutta d'ordre 4

La méthode (explicite) la plus utilisée, dite RK4

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & 0 & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array} \qquad \begin{array}{l} k_1 = f(x_k, y_k) \\ k_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_1) \\ k_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_2) \\ k_4 = f(x_k + h, y_k + h k_3) \\ \hline y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{array}$$

Autre méthode explicite d'ordre 4 avec 4 évaluations

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & 0 & & \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} k_1 = f(x_k, y_k) \\ k_2 = f(x_k + \frac{h}{3}, y_k + \frac{h}{3} k_1) \\ k_3 = f(x_k + \frac{2h}{3}, y_k - \frac{h}{3} k_1 + h k_2) \\ k_4 = f(x_k + h, y_k + h(k_1 - k_2 + k_3)) \\ \hline y_{k+1} = y_k + \frac{h}{8}(k_1 + 3(k_2 + k_3) + k_4) \end{array}$$

La seule méthode implicite d'ordre 4 avec 2 évaluations

$$\begin{array}{c|cc}
\frac{3+\sqrt{3}}{6} & 1/4 & \frac{3+2\sqrt{3}}{12} \\
\frac{3-\sqrt{3}}{6} & \frac{3-2\sqrt{3}}{12} & 1/4 \\
\hline
 & 1/2 & 1/2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
k_1 = f(x_k + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h, y_k + \frac{h}{4}k_1 + \frac{3+2\sqrt{3}}{12}hk_2) \\
k_2 = f(x_k + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h, y_k + \frac{3-2\sqrt{3}}{12}hk_1 + \frac{h}{4}k_2)) \\
\hline
y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)
\end{array}$$

Une méthode semi-implicite d'ordre 4 avec 3 évaluations

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & & \\
1/2 & 1/4 & 1/4 & \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1/6 & 4/6 & 1/6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
k_1 = f(x_k, y_k) \\
k_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{4}(k_1 + k_2)) \\
k_3 = f(x_k + h, y_k + hk_2) \\
\hline
y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)
\end{array}$$

Chapitre II

Méthodes linéaires à pas multiples

On considère l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_d \end{cases} \tag{II.1}$$

avec $x \in [x_0, x_0 + a]$ et $y, y_d \in \mathbb{R}^n$. On supposera dans ce chapitre f continue et Lipschitzienne par rapport à y.
Etant donné un maillage régulier $x_k = x_0 + kh, \quad 0 \leq k \leq N, \quad h = \frac{a}{N}$ du segment $[x_0, x_0 + a]$, on va construire des méthodes dans lesquelles l'approximations y_k des valeurs de la solution $y(x_k)$ aux nœuds du maillage est calculée en utilisant les q valeurs approchées antérieures $y_{k-1}, y_{k-2}, \cdots, y_{k-q}$.
Ces méthodes demanderont une procédure de démarrage spécifique afin de calculer les valeurs de $y_1, y_2, \cdots, y_{q-1}$.

1 Exemples de méthodes à q pas

Partant de l'identité

$$y(x + \theta) = y(x) + \int_x^{x+\theta} f(t, y(t))dt$$

Les méthodes d'Adams et de Nyström et Milne vont remplacer $f(t, y(t))$ dans l'intégrale par un polynôme d'interpolation.

1 - a Méthodes d'Adams-Bashforth

On écrit

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} P(t)dt$$

avec P le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $q-1$, pour les couples de valeurs (x_{k-i}, f_{k-i}), $0 \leq i \leq q-1$, où l'on a posé $f_i = f(x_i, y_i)$, soit :

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{j=0}^{q-1} \beta^k_{q,j} f_{k-j}, \quad \text{avec} \quad \beta^k_{q,j} = \frac{1}{h} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \ell^k_{q,j}(t)dt$$

$\ell^k_{q,j}$ étant le polynôme de base de l'interpolation de Lagrange de degré $q-1$: $\ell^k_{q,j}(x_{k-i}) = \delta_{i,j}$. Pour un maillage régulier $\beta^k_{q,j}$ ne dépend que de q et de j. Les méthodes d'Adams-Bashforth sont des méthodes explicites.

Exemple II.1 Méthodes d'Adams-Bashforth

$q = 2$ $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(3f_k - f_{k-1})$

$q = 3$ $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2})$

$q = 4$ $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3})$

$q = 5$ $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{720}(1901f_k - 2774f_{k-1} + 2616f_{k-2} - 1274f_{k-3} + 251f_{k-4})$

1 - b Méthodes d'Adams-Moulton

On écrit

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} P^*(t)dt$$

avec P^* le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré q, pour les couples de valeurs (x_{k+1-i}, f_{k+1-i}), $0 \leq i \leq q$, soit :

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{j=0}^{q} \beta^*_{q,j} f_{k+1-j}$$

Les méthodes d'Adams-Moulton sont des méthodes implicites.

Exemple II.2 Méthodes d'Adams-Moulton

$q = 1$ $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f_{k+1} + f_k)$

$q = 2$ $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}(5f_{k+1} + 8f_k - f_{k-1})$

$q = 3$ $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2})$

$q = 4$ $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{720}(251f_{k+1} + 646f_k - 264f_{k-1} + 106f_{k-2} - 19f_{k-3})$

1 - c Méthodes de Nyström et de Milne-Simpson

Pour les méthodes de Nyström on écrit

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} P(t)dt$$

avec P le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $q-1$, pour les couples de valeurs (x_{k-i}, f_{k-i}), $0 \leq i \leq q-1$, soit :

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^{q-1} \gamma_{q,j} f_{k-j}$$

Les méthodes de Nyström sont des méthodes explicites.

Exemple II.3 Méthodes de Nyström

$q = 2$ $y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf_k$, m. du point milieu, Saute-mouton, Leapfrog

$q = 3$ $y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(7f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2})$

$q = 4$ $y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(8f_k - 5f_{k-1} + 4f_{k-2} - f_{k-3})$

Pour les méthodes de Milne-Simpson on écrit

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} P^*(t)dt$$

avec P^* le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré q, pour les couples de valeurs (x_{k+1-i}, f_{k+1-i}), $0 \leq i \leq q$, soit :

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h\sum_{j=0}^{q} \gamma^*_{q,j} f_{k+1-j}$$

Les méthodes de Milne-Simpson sont, sauf $q = 1$, des méthodes implicites.

Exemple II.4 Méthodes de Milne-Simpson

$q = 0$ $y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf_{k+1}$, m. à 2 pas

$q = 1$ $y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf_k$, m. à 2 pas, Saute-mouton, explicite

$q = 2$ $y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1})$, m. à 2 pas

1 - d Méthodes de différentiation rétrograde (BDF)

Ou Backward Differentiation formulas. Partant de $y'(x) = f(x, y(x))$ on approche $y'(x_{k+1})$ par la dérivée du polynôme d'interpolation des y_j en des points x_{k+1-i}, et on écrit :

$$P'(x_{k+1}) = f_{k+1}$$

avec P le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré q des couples de valeurs (x_{k+1-i}, y_{k+1-i}), $0 \leq i \leq q$.

Les méthodes de différentiation rétrograde sont des méthodes implicites.

Exemple II.5 Méthodes de différentiation rétrograde.

$q = 1$ $y_{k+1} - y_k = hf_{k+1}$, soit : $y_{k+1} = y_k + hf_{k+1}$

$q = 2$ $\frac{3}{2}y_{k+1} - 2y_k + \frac{1}{2}y_{k-1} = hf_{k+1}$, soit : $y_{k+1} = \frac{1}{3}(4y_k - y_{k-1} + 2hf_{k+1})$

$q = 3$ $y_{k+1} = \frac{1}{11}(18y_k - 9y_{k-1} + 2y_{k-2} + 6hf_{k+1})$

$q = 4$ $y_{k+1} = \frac{1}{25}(48y_k - 36y_{k-1} + 16y_{k-2} - 3y_{k-3} + 12hf_{k+1})$

2 Forme générale des méthodes à q pas

Les méthodes à q pas présentées ci-dessus entrent toutes dans la classe des méthodes linéaires à q pas définies par :

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_{i=0}^{q} \alpha_i\, y_{k+i} = h \sum_{i=0}^{q} \beta_i\, f_{k+i}, \quad 0 \le k \le N-q \\ y_i = y_{id} \quad 0 \le i \le q-1\end{array}\right. \tag{II.2}$$

On a posé $f_i = f(x_i, y_i)$, on suppose $\alpha_q \neq 0$ (on calcule y_{k+q} par (II.2)), on suppose également $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$ (la méthode est effectivement à q pas). On calcule donc y_{k+q} en utilisant les valeurs antérieures $y_{k+q-1}, y_{k+q-2}, \cdots, y_k$. La méthode est explicite si $\beta_q = 0$, elle est implicite sinon.
Les valeurs initiales y_{id}, $0 \le i \le q-1$ doivent être calculées séparément par une procédure de démarrage adéquate, à partir de la donnée de Cauchy y_d.

Proposition II.1
Si la méthode à q pas (II.2) *est implicite ($\beta_q \neq 0$), le schéma admet une unique solution y_{k+q} dès que*

$$h < \frac{|\alpha_q|}{L\,|\beta_q|}$$

avec L la constante de Lipschitz de f.

3 Convergence, stabilité, consistance et ordre

Définition II.1 (Convergence de la méthode)
La méthode (II.2) *de simulation du problème* (II.1) *est convergente si $\forall y_d \in \mathbb{R}^n$:*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ y_{id} \to y_d \\ 0 \le i \le q-1}} \max_{0 \le k \le N} \|y_k - y(x_k)\| = 0$$

où $y(x)$ est la solution de (II.1) *.*

Définition II.2 (Stabilité (zéro-stabilité))
La méthode (II.2) *est stable s'il existe des constantes M_1 et M_2, indépendantes de h, telles que $\forall y_{id}, z_{id} \in \mathbb{R}^n$, $0 \le i \le q-1$, $\forall \varepsilon_k \in \mathbb{R}^n$, les suites y_k et z_k définies par :*

$$\sum_{i=0}^{q} \alpha_i\, y_{k+i} = h \sum_{i=0}^{q} \beta_i\, f_{k+i}, \quad y_i = y_{id}\; 0 \le i \le q-1$$

$$\sum_{i=0}^{q} \alpha_i\, z_{k+i} = h \sum_{i=0}^{q} \beta_i\, \tilde{f}_{k+i} + \varepsilon_k, \quad z_i = z_{id}\; 0 \le i \le q-1$$

avec $f_i = f(x_i, y_i)$ et $\tilde{f}_i = f(x_i, z_i)$, vérifient :

$$\max_{0 \le k \le N} \|y_k - z_k\| \le M_1 \max_{0 \le i \le q-1} \|y_{id} - z_{id}\| + M_2 \sum_{k=0}^{N-q} \|\varepsilon_k\|$$

Définition II.3 (Consistance)
Le schéma à q pas (II.2) *est consistant avec l'équation* (II.1) *si, $\forall y(x)$ solution de l'équation* (II.1), *on a :*

$$\max_{0\leq k\leq N-q} \| \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{q} \alpha_i\, y(x_{k+i}) - \sum_{i=0}^{q} \beta_i\, f(x_{k+i}, y(x_{k+i}))\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Théorème II.2 (Théorème d'équivalence de Lax-Richtmyer)
Soit l'équation différentielle :

$$y' = f(x, y)$$

avec f continue de $[x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, Lipschitzienne par rapport à y, et la méthode à q pas

$$\sum_{i=0}^{q} \alpha_i\, y_{k+i} = h\sum_{i=0}^{q} \beta_i\, f_{k+i}$$

Si la méthode est stable et consistante elle est convergente.

Définition II.4 (Méthode à q pas d'ordre p)
La méthode à q pas (II.2) *est d'ordre p pour l'équation différentielle* (II.1) *si, $\forall y(x)$ solution C^{p+1} de l'équation* (II.1), *on a :*

$$\max_{0\leq k\leq N-q} \| \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{q} \alpha_i\, y(x_{k+i}) - \sum_{i=0}^{q} \beta_i\, f(x_{k+i}, y(x_{k+i}))\| \leq Kh^p$$

La constante K ne dépendant que de y et du schéma, mais pas de h.

Théorème II.3 (Erreur pour une méthode à q pas, stable d'ordre p)
Si la méthode à q pas (II.2) *est stable et d'ordre p et si la fonction f est assez continûment différentiable, on a la majoration de l'erreur :*

$$\max_{0\leq k\leq N} \|y_k - y(x_k)\| \leq M_1 \max_{0\leq i\leq q-1} \|y_{id} - y(x_i)\| + M_2 K h^p$$

4 Critère de consistance et d'ordre p

Théorème II.4
La méthode à q pas

$$\sum_{i=0}^{q} \alpha_i\, y_{k+i} = h\sum_{i=0}^{q} \beta_i\, f_{k+i}$$

est d'ordre p si et seulement si :

$$\sum_0^q \alpha_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_0^q i\alpha_i = \sum_0^q \beta_i \qquad \textit{consistance et ordre 1}$$

$$\sum_0^q i^2\alpha_i = 2\sum_0^q i\beta_i \qquad \textit{ordre 2}$$

$$\ldots\ldots = \ldots\ldots$$

$$\sum_0^q i^p\alpha_i = p\sum_0^q i^{p-1}\beta_i \qquad \textit{ordre } p$$

Proposition II.5
Soit la méthode à q pas

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i\, y_{k+i} = h\sum_{i=0}^q \beta_i\, f_{k+i}$$

elle est parfaitement définie par la donnée des polynômes :

$$\rho(x) = \sum_0^q \alpha_i\, x^i, \qquad \sigma(x) = \sum_0^q \beta_i\, x^i$$

La condition d'ordre p est équivalente à :

$$\rho(e^x) - x\,\sigma(e^x) = O(x^{p+1}) \quad \textit{au voisinage de 0}$$

Proposition II.6 (Constante d'erreur)
Si la solution $y(x)$ de l'équation différentielle (II.1) *est C^{p+2} et la méthode à q pas* (II.2) *est d'ordre p, l'erreur locale de troncature s'écrit :*

$$\varepsilon_{k+q} = \frac{1}{h}\sum_{i=0}^q \alpha_i\, y(x_{k+i}) - \sum_{i=0}^q \beta_i\, f(x_{k+i}, y(x_{k+i})) = C_{p+1}\, h^p y^{(p+1)}(x_k) + o(h^p)$$

avec

$$C_{p+1} = \frac{1}{(p+1)!}\sum_0^q i^{p+1}\alpha_i - \frac{1}{p!}\sum_0^q i^p\beta_i$$

On appelle constante d'erreur de la méthode la quantité :

$$C = \frac{C_{p+1}}{\sum \beta_i} = \frac{C_{p+1}}{\rho'(1)}$$

Remarque II.1 On verra plus loin que si la méthode est stable $\rho'(1) \neq 0$.

5 Critère de stabilité

Proposition II.7 (Condition de Dahlquist)
Soit la méthode à q pas

$$\sum_{i=0}^{q} \alpha_i \, y_{k+i} = h \sum_{i=0}^{q} \beta_i \, f_{k+i}$$

et les polynômes associés :

$$\rho(x) = \sum_{0}^{q} \alpha_i \, x^i, \ \sigma(x) = \sum_{0}^{q} \beta_i \, x^i$$

Une condition nécessaire de stabilité est que toutes les racines du polynôme ρ soient de module inférieur ou égal à un, les racines de module un étant simples.

Théorème II.8
Si f est Lispchitzienne par rapport à y, la condition de Dahlquist est une condition nécessaire et suffisante de stabilité pour la méthode à q pas (II.2).

Remarque II.2 La consistance de la méthode implique que 1 est toujours racine du polynôme ρ. Elle doit être racine simple donc $\rho'(1) \neq 0$.

Définition II.5 (Stabilité forte et faible)
On dit que la méthode est fortement stable si 1 *est la seule racine de module* 1 *du polynôme ρ. La méthode est faiblement stable si le polynôme ρ a plusieurs racines de module* 1

Théorème II.9 (Première barrière de Dahlquist)
Il n'y a pas de méthode à q pas linéaire stable d'ordre supérieur à $q+1$ si q est impair et à $q+2$ si q est pair.

6 Ordre et stabilité : exemples

6 - a Méthodes d'Adams-Bashforth

Les méthodes d'Adams-Bashforth à q pas sont des méthodes explicites d'ordre q fortement stables.

Pas	Ordre	Schéma - Adams-Bashforth	C
$q=2$	$p=2$	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(3f_k - f_{k-1})$	0,4167
$q=3$	$p=3$	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2})$	0,3750
$q=4$	$p=4$	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3})$	0,3486
$q=5$	$p=5$	$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{720}(1901f_k - 2774f_{k-1}$ $+2616f_{k-2} - 1274f_{k-3} + 251f_{k-4})$	0,3298

6 - b Méthodes d'Adams-Moulton

Les méthodes d'Adams-Moulton à q pas sont des méthodes implicites d'ordre $q+1$ fortement stables.

Pas	Ordre	Schéma - Adams-Moulton	C
$q=1$	$p=2$	$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}\left(f_{k+1}+f_k\right)$	-0,0833
$q=2$	$p=3$	$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{12}\left(5f_{k+1}+8f_k-f_{k-1}\right)$	-0,0417
$q=3$	$p=4$	$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{24}\left(9f_{k+1}+19f_k-5f_{k-1}+f_{k-2}\right)$	-0,0264
$q=4$	$p=5$	$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{720}(251f_{k+1}+646_k$ $-264f_{k-1}+106f_{k-2}-19f_{k-3})$	-0,0187

6 - c Méthodes de Nyström et de Milne-Simpson

Les méthodes de Nyström à q pas sont des méthodes explicites d'ordre q faiblement stables.

Pas	Ordre	Schéma - Nyström	C
$q=2$	$p=2$	$y_{k+1}=y_{k-1}+2hf_k$	0,1667
$q=3$	$p=3$	$y_{k+1}=y_{k-1}+\frac{h}{3}\left(7f_k-2f_{k-1}+f_{k-2}\right)$	0,1667
$q=4$	$p=4$	$y_{k+1}=y_{k-1}+\frac{h}{3}\left(8f_k-5f_{k-1}+4f_{k-2}-f_{k-3}\right)$	0,1661

Les méthodes de Milne-Simpson à q points de quadrature sont des méthodes implicites d'ordre $q+1$ (sauf $q=2$, ordre 4), faiblement stables.

q	Pas	Ordre	Schéma - Milne-Simpson	C
$q=0$	2	$p=1$	$y_{k+1}=y_{k-1}+2hf_{k+1}$	-1
$q=1$	2	$p=2$	$y_{k+1}=y_{k-1}+2hf_k$	0,1667
$q=2$	2	$p=4$	$y_{k+1}=y_{k-1}+\frac{h}{3}\left(f_{k+1}+4f_k+f_{k-1}\right)$	-0,0056

Autre méthode de Milne, explicite, d'ordre 4, utilisée comme prédicteur, avec une méthode implicite d'ordre 5 comme correcteur (voir plus loin la présentation des méthodes prédicteur-correcteur).

Pas	Ordre	Schéma - Milne	C
$q=4$	$p=4$	$y_{k+1}=y_{k-3}+\frac{h}{3}(8f_k-4f_{k-1}+8f_{k-2})$	0,0777

6 - d Méthodes de différentiation rétrograde

Les méthodes de différentiation rétrograde à q pas sont des méthodes implicites d'ordre q, fortement stables uniquement pour $q \leq 6$.

Pas	Ordre	Schéma - BDF	C
$q = 1$	$p = 1$	$y_{k+1} - y_k = hf_{k+1}$	-0,5
$q = 2$	$p = 2$	$\frac{3}{2}y_{k+1} - 2y_k + \frac{1}{2}y_{k-1} = hf_{k+1}$	-0,3333
$q = 3$	$p = 3$	$\frac{11}{6}y_{k+1} - 3y_k + \frac{3}{2}y_{k-1} - \frac{1}{3}y_{k-3} = hf_{k+1}$	-0,25
$q = 4$	$p = 4$	$\frac{25}{12}y_{k+1} - 4y_k + 3y_{k-1} - \frac{4}{3}y_{k-3} + \frac{1}{4}y_{k-4} = hf_{k+1}$	-0,2

Chapitre III

Méthodes de prédiction-correction

1 Définition

On a vu que, parmi les méthodes linéaires à q pas, les méthodes implicites sont, à nombre de pas égal, plus précises, elles sont en général aussi plus stables. Mais elles sont plus coûteuses car le caractère implicite doit être résolu par une méthode itérative, de type point fixe par exemple. D'où l'idée, pour diminuer le coût, d'utiliser une méthode explicite pour calculer un bon prédicteur de la solution et de ne faire qu'une itération (ou quelques itérations) de la méthode implicite utilisée alors comme correcteur explicite. Ce sont les méthodes *Prédicteur-Correcteur*.

Il existe de nombreuses variantes des méthodes prédicteur-correcteur. On présente ici deux méthodes à une seule itération :

Méthode $PECE$: Prédicteur Evaluation Correcteur Evaluation

Prédicteur explicite ($\beta_q^* = 0$)

$$\alpha_q^* \, y_{k+q}^* + \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i^* \, y_{k+i} = h \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i^* \, f_{k+i}$$

Correcteur ($\beta_q \neq 0$)

$$\alpha_q \, y_{k+q} + \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i \, y_{k+i} = h \left(\beta_q \, f_{k+q}^* + \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i \, f_{k+i} \right)$$

où l'on a posé : $f_{k+i} = f(x_{k+i}, y_{k+i})$ et $f_{k+i}^* = f(x_{k+i}, y_{k+i}^*)$

Méthode PEC : Prédicteur Evaluation Correcteur

Prédicteur explicite ($\beta_q^* = 0$)

$$\alpha_q^*\, y_{k+q}^* + \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i^*\, y_{k+i} = h \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i^*\, f_{k+i}^*$$

Correcteur ($\beta_q \neq 0$)

$$\alpha_q\, y_{k+q} + \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i\, y_{k+i} = h \left(\beta_q\, f_{k+q}^* + \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i\, f_{k+i}^* \right)$$

où l'on a posé $f_{k+i}^* = f(x_{k+i}, y_{k+i}^*)$. A la différence de la méthode $PECE$, dans la méthode PEC les pentes f ne sont pas réévaluées après l'étape de correction.

2 Propriétés

Proposition III.1
La contribution à l'erreur du prédicteur est d'un ordre inférieur à celle du correcteur. Pour avoir une méthode d'ordre p on pourra prendre un prédicteur d'ordre $p-1$ et un correcteur d'ordre p.

Proposition III.2
On démontre que la stabilité du prédicteur n'influe pas sur la stabilité de la méthode prédicteur-correcteur. On peut même utiliser un prédicteur instable.

3 Exemples $PECE$

P : Leapfrog ordre 2, C : Adams-Moulton ordre 3

$$\left| \begin{array}{l} y_{k+1}^* = y_{k-1} + 2hf_k \\ \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\left(5f_{k+1}^* + 8f_k - f_{k-1}\right) \end{array} \right.$$

P : Adams-Bashforth ordre 3, C : Adams-Moulton ordre 4

$$\left| \begin{array}{l} y_{k+1}^* = y_k + \frac{h}{12}\left(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}\right) \\ \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(9f_{k+1}^* + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}\right) \end{array} \right.$$

P : Adams-Bashforth ordre q, C : Adams-Moulton ordre q+1

$$\left| \begin{array}{l} y_{k+1}^* = y_k + h\sum_{j=0}^{q-1} \beta_{q,j} f_{k-j} \\ \\ y_{k+1} = y_k + h\left(\beta_{q,0}^* f_{k+1}^* + \sum_{j=1}^{q} \beta_{q,j}^* f_{k+1-j}\right) \end{array} \right.$$

Chapitre IV

Compléments sur les méthodes numériques

1 Contrôle du pas

S'il est difficile de faire varier le pas h de la méthode en cours d'intégration dans les méthodes à pas multiples, il existe plusieurs techniques utilisables pour les méthodes à un pas. L'objectif est de déterminer le pas de discrétisation h en x afin de garder l'erreur locale sous un seuil ε fixé.

Soit une méthode à un pas d'ordre p, alors :

$$y(x_{k+1}) - y_{k+1} = \Psi(y(x_k))\, h^{p+1} + O(h^{p+2}) \tag{IV.1}$$

où Ψ est une fonction inconnue.
Calculons alors une autre approximation $\tilde{y}_{k+1}$ de $y(x_{k+1})$ avec un pas $2h$:

$$y(x_{k+1}) - \tilde{y}_{k+1} = \Psi(y(x_{k-1}))\, (2h)^{p+1} + O(h^{p+2})$$

ce qui donne en développant $y(x_{k-1})$ au voisinage de $y(x_k)$:

$$y(x_{k+1}) - \tilde{y}_{k+1} = \Psi(y(x_k))\, (2h)^{p+1} + O(h^{p+2}) \tag{IV.2}$$

En retranchant (IV.1) de (IV.2) on obtient :

$$(2^{p+1} - 1)h^{p+1}\Psi(y(x_k)) = y_{k+1} - \tilde{y}_{k+1} + O(h^{p+2})$$

On obtient de cette manière une estimation de l'erreur avec le pas h :

$$e_{k+1} = y(x_{k+1}) - y_{k+1} \approx \frac{y_{k+1} - \tilde{y}_{k+1}}{2^{p+1} - 1}$$

Si $|e_{k+1}|$ est inférieur à la tolérance ε on continue avec le même pas h, sinon on refait l'estimation avec $h/2$. Par contre si $|e_{k+1}| < \varepsilon/2^{p+1}$ on double le pas.

Une autre approche, qui a le mérite de demander moins d'évaluations de f est d'utiliser en parallèle deux méthodes de Runge et Kutta. Une méthode d'ordre p à s évaluations et une méthode d'ordre $p+1$ à $s+1$ évaluations, Mais on choisit les deux méthodes pour que s évaluations soient communes aux deux méthodes, minimisant ainsi les calculs supplémentaires. La différence des deux calculs donne une évaluation de l'erreur pour le schéma d'ordre le plus bas. Ceci s'écrit symboliquement :

$$\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & c^T \\ & \tilde{c}^T \\ \hline & E^T \end{array}$$

où la méthode d'ordre p est identifiée par ses coefficients a, B et c et la méthode d'ordre $p+1$ par ses coefficients a, B et $\tilde{c}$. $E = c - \tilde{c}$ permet de calculer l'erreur locale : $e_{k+1} = h \sum_1^{s+1} E_i \, k_i$ sans évaluation supplémentaire.

La méthode de Runge et Kutta Fehlberg, ou RK45, est d'ordre 4, elle associe une méthode d'ordre 4 à une méthode d'ordre 5 à 6 évaluations. Son tableau s'écrit :

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & 0 & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & & & & \\
\frac{3}{8} & \frac{3}{32} & \frac{9}{32} & 0 & & & \\
\frac{12}{13} & \frac{1932}{2197} & -\frac{7200}{2197} & \frac{7296}{2197} & 0 & & \\
1 & \frac{439}{216} & -8 & \frac{3680}{513} & -\frac{845}{4104} & 0 & \\
\frac{1}{2} & -\frac{8}{27} & 2 & -\frac{3544}{2565} & \frac{1859}{4104} & -\frac{11}{40} & 0 \\
\hline
 & \frac{25}{216} & 0 & \frac{1408}{2565} & \frac{2197}{4104} & -\frac{1}{5} & 0 \\
 & \frac{16}{135} & 0 & \frac{6656}{12825} & \frac{28561}{56430} & -\frac{9}{50} & \frac{2}{55} \\
\hline
 & \frac{1}{360} & 0 & -\frac{128}{4275} & -\frac{2197}{75240} & \frac{1}{50} & \frac{2}{55}
\end{array}$$

2 A-stabilité

2 - a Définitions

On va s'intéresser dans cette section au comportement de la solution numérique quand la variable tend vers l'infini. On dira qu'une méthode numérique est absolument stable, si, pour le pas h fixé, la solution y_k du schéma reste bornée quand k tend vers l'infini. Pour évaluer cette propriété de stabilité on regarde la réponse du schéma au problème test suivant :

$$\begin{cases} y' = \lambda y, \quad x \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{IV.3}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$. La solution du problème (IV.3) est $y(x) = e^{\lambda x}$ et $|y(x)|$ tend vers zéro à l'infini si et seulement si $\mathcal{R}(\lambda) < 0$, où $\mathcal{R}(\lambda)$ désigne la partie réelle du complexe λ.

Définition IV.1
Une méthode numérique pour l'approximation du problème (IV.3) *est absolument stable si* $|y_k| \longrightarrow 0$ *quand* $x_k \longrightarrow \infty$
La région de stabilité absolue de la méthode est :

$$\mathcal{A} = \{z = \lambda h \in \mathbb{C} \mid |y_k| \longrightarrow 0 \text{ quand } x_k \longrightarrow \infty\}$$

Une méthode est A-stable si $\mathbb{C}^- \subset \mathcal{A}$.
Une méthode est θ-stable, pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, *si le secteur du plan complexe défini par* $|\pi - \arg z| < \theta$ *est inclus dans la région de stabilité absolue de la méthode.*

Remarque IV.1 Les méthodes A-stables sont particulièrement importantes pour résoudre les problèmes raides.

2 - b A-stabilité de quelques méthodes à 1 pas

Euler forward
Le schéma d'Euler forward appliqué au problème (IV.3) s'écrit $u_{k+1} = u_k + h\lambda\, u_k$, soit $u_k = (1 + h\lambda)^k$. La région de stabilité absolue de la méthode est donc le disque unité centré en -1. La méthode est conditionnellement A-stable.

Euler backward
Le schéma d'Euler backward appliqué au problème (IV.3) s'écrit $u_{k+1} = u_k + h\lambda\, u_{k+1}$, soit $u_k = 1/(1 - h\lambda)^k$. La région de stabilité absolue de la méthode est donc l'extérieur du disque unité centré en 1. La méthode est A-stable.

Crank-Nicolson
Le schéma de Crank-Nicolson appliqué au problème (IV.3) s'écrit $u_{k+1} = u_k + \frac{\lambda h}{2}\,(u_k + u_{k+1})$, soit $u_k = ((2 + \lambda h)/(2 - \lambda h))^k$. La région de stabilité absolue de la méthode est donc $\mathbb{C}^-$. La méthode est A-stable.

Remarque IV.2 Il n'existe pas de schéma explicite A-stable

2 - c A-stabilité des méthodes de Runge & Kutta

Soit une méthode de Runge et Kutta à q évaluations :

$$\Phi(x, y, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i\, k_i$$

$$k_i = f\left(x + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\, k_j\right), \quad 1 \le i \le q$$

$$a_i = \sum_{j=1}^{q} b_{i,j}$$

et son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & c^T \end{array}$$

Appliquons la méthode au problème test (IV.3), il vient :

$$y_{k+1} = y_k + \sum_{i=1}^{q} c_i k_i, \quad k_i = \lambda(y_k + h \sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\, k_j)$$

En désignant par k le vecteur colonne des k_i, et e le vecteur colonne dont les q composantes sont toutes égales à 1, on peut écrire matriciellement :

$$k = \lambda(y_k\, e + hBk), \quad \text{soit} \quad k = \lambda y_k (I - \lambda hB)^{-1}\, e$$

et ainsi :

$$y_{k+1} = y_k R(\lambda h), \quad \text{avec} \quad R(\lambda h) = 1 + \lambda h (c, (I - \lambda hB)^{-1}\, e)$$

$R(\lambda h)$ est la fonction de stabilité de la méthode de Runge et Kutta. La région de stabilité absolue est déterminée par $\{z = \lambda h \in \mathbb{C} \,|\, |R(z)| < 1\}$.

On montre que les méthodes de Runge et Kutta implicites à q évaluations et d'ordre $2q$ sont A-stables. Et que pour les méthodes explicites la taille des régions de stabilité absolue augmente avec l'ordre de la méthode.

2 - d A-stabilité des méthodes à q pas

Une méthode à q pas appliquée au problème test (IV.3) conduit à l'équation récurrente à q termes :

$$\sum_{0}^{q} (\alpha_i - \lambda h \beta_i) y_{k+i} = 0$$

dont le polynôme caractéristique est :

$$\pi(r) = \rho(r) - \lambda h\, \sigma(r)$$

Proposition IV.1 (Condition de racines absolues)
La méthode à q pas satisfait la condition de stabilité absolue si les racines du polynôme $\pi(r)$ sont dans le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

Remarque IV.3 Les régions de stabilité absolue des méthodes d'Adams-Bashforth et d'Adams-Moulton sont bornées, elles diminuent quand l'ordre augmente.

Remarque IV.4 Les régions de stabilité absolue des méthodes BDF, pour $q \leq 6$, sont non bornées et contiennent toujours les réels négatifs

Théorème IV.2 (Seconde barrière de Dahlquist)
Une méthode explicite à q pas linéaire ne peut être ni A-stable ni θ-stable.
Il n'y a pas de méthode à q pas linéaire A-stable d'ordre supérieur à 2.
Pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, il n'existe des méthodes à q pas linéaires, θ-stables et d'ordre q que pour $q = 3$ et $q = 4$.

3 Systèmes raides

Considérons le système différentiel linéaire dans $\mathbb{R}^n$:

$$y'(x) = Ay(x) + \phi(x), \quad \text{avec} \quad A \text{ matrice } n \times n, \ \phi(x) \in \mathbb{R}^n$$

On supposera que A possède n valeurs propres distinctes λ_j qui sont toutes de partie réelle strictement négative. La solution du système s'écrit alors :

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j x} v_j + \psi(x)$$

où les C_j sont des constantes, (v_j) une base de vecteurs propres de A et $\psi(x)$ une solution particulière de l'équation différentielle.

Le fait que les valeurs propres de A soient de partie réelle strictement négative implique l'existence d'une solution stationnaire vers laquelle y tend aux grands x. Par ailleurs $\sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j x} v_j$ peut être vue comme une composante transitoire de la solution. Une petite valeur de $\mathcal{R}(\lambda_j)$ implique un long temps d'intégration pour atteindre la solution stationnaire. Une grande valeur de $\mathcal{R}(\lambda_j)$ implique un pas d'intégration très petit pour la stabilité. Si on a des valeurs propres de parties réelles très petites et très grandes on a donc des difficultés d'intégration.

Définition IV.2 (Système raide)
On dit que le système est raide si :

$$\frac{\max \mathcal{R}(\lambda_j)}{\min \mathcal{R}(\lambda_j)} \gg 1$$

Les systèmes raides se rencontrent en cinétique chimique, dans le nucléaire, en contrôle ... et plus généralement dans tous les domaines où interagissent une dynamique lente et une dynamique rapide.

Les méthodes conditionnellement absolument stable ne sont pas adaptées pour les sytèmes raides. On préfèrera des méthodes implicites. Néanmoins il faut prendre garde à ce que la solution de l'équation implicite n'impose pas des conditions strictes sur h. On préfèrera pour cela des algorithmes dont la convergence ne dépend pas de h (algorithmes de Newton et ses variantes).

Troisième partie

Interpolation, dérivation et quadrature

Chapitre I

Interpolation de Lagrange

1 Existence et unicité

Soit f une fonction réelle de la variable réelle dont on connait les valeurs prises $f(x_i)$ en $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k$, $k+1$ points distincts de $\mathbb{R}$. On désire calculer une approximation de f en un point x quelconque (mais proche des x_i). On va pour cela construire un polynôme qui interpole f aux points x_i, c'est à dire qui prend les mêmes valeurs que f en ces points.

Théorème I.1 (Polynôme d'interpolation de Lagrange)
Soit $k+1$ points distincts de $\mathbb{R}$, $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k$. Il existe un unique polynôme p_k de degré inférieur ou égal à k tel que $f(x_i) = p_n(x_i), \forall i$. Ce polynôme s'écrit :

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i)\, \ell_{i,k}(x)$$

avec $\ell_{i,k}$ $0 \leq i \leq k$ la base canonique de Lagrange des polynômes de degré inférieur ou égal à k :

$$\ell_{i,k}(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \ell_{i,k}(x_j) = \delta_{i,j}$$

2 Majoration de l'erreur d'interpolation

Théorème I.2
Soit p_k le polynôme de Lagrange d'interpolation de f aux $k+1$ points distincts $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k$ de $[a, b]$.
Si $f \in C^{k+1}([a, b])$, alors, $\forall x \in [a, b]$, il existe un ξ_x appartenant au plus petit fermé contenant x et les x_i, tel que :

$$f(x) - p_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi_x)}{(k+1)!} \prod_{i=0}^{k} (x - x_i)$$

Corollaire I.3
Soit $x_i = x_0 + ih$, $0 \leq i \leq k$, *(k+1) points régulièrement espacés,* $f \in C^{k+1}([x_0, x_k])$ *et* p_k *son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points* x_i. *On a la majoration d'erreur :*

$$|f(x) - p_k(x)| \leq C_k\, h^{k+1} \sup_{[x_0,x_k]} |f^{(k+1)}(t)|, \quad \forall x \in [x_0, x_k]$$

avec C_k *une constante qui ne dépend que de* k.

Remarque I.1 Attention, en général le polynôme d'interpolation de Lagrange p_k ne converge pas uniformément vers la fonction f quand le nombre de points d'interpolation sur le segment $[a, b]$ tend vers l'infini. On n'utilisera le polynôme d'interpolation de Lagrange qu'avec un nombre modeste de points. Les bonnes méthodes d'interpolation pour un grand nombre de points ($k \geq 10$) sont soit des interpolations locales, polynomiales par morceaux, soit des interpolations globales comme les splines.

3 Majoration de l'erreur sur la dérivée

Quelle erreur commet-on si on remplace la valeur de la dérivée $f'(x_i)$ par la dérivée au point x_i du polynôme d'interpolation de Lagrange de f ?

Lemme I.4
Soit p_k *le polynôme de Lagrange d'interpolation de* f *aux* $k+1$ *points distincts* $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k$ *de* $[a, b]$. *Posons :*

$$\begin{cases} g(x) = \frac{f(x)-p_k(x)}{\Pi(x)} & \text{si } x \neq x_i,\ \forall i \\ \\ g(x_i) = \frac{f'(x_i)-p'_k(x_i)}{\Pi'(x_i)} \end{cases}$$

avec $\Pi(x) = \prod_{i=0}^{i=k}(x - x_i)$.

$$\left| \begin{array}{ll} \text{Si } f \in C^2([a, b]) & \text{alors } g \in C^2([a, b]) \\ \text{Si } f \in C^{m+1}([a, b]) & \text{alors } g \in C^m([a, b]) \end{array} \right.$$

Théorème I.5
Soit p_k *le polynôme de Lagrange d'interpolation de* f *aux* $k+1$ *points distincts* $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k$ *de* $[a, b]$.
Si $f \in C^{k+1}([a, b])$, *alors,* $\forall x_i$, *il existe un* ξ_i *appartenant au plus petit fermé contenant les* x_i, *tel que :*

$$f'(x_i) - p'_k(x_i) = \frac{f^{(k+1)}(\xi_i)}{(k+1)!} \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$$

Corollaire I.6
Soit $x_i = x_0 + ih$, $0 \leq i \leq k$, (k+1) points régulièrement espacés, $f \in C^{k+1}([x_0, x_k])$ et p_k son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points x_i. On a alors la majoration d'erreur :

$$|f'(x_i) - p_k'(x_i)| \leq C_k' \, h^k \sup_{[x_0,x_k]} |f^{(k+1)}(t)|, \quad \forall i$$

4 Approximations de différences finies

Soit $\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots$, avec $x_i = x_0 + ih$, des points équidistants de $\mathbb{R}$. Par dérivation du polynôme d'interpolation de Lagrange aux points x_i on obtient les approximation de différences finies de la dérivée d'une fonction f suivantes :

polynôme de degré 1

$$f'(x_0) \quad = \tfrac{1}{h}\,[f(x_1) - f(x_0)] \quad + \tfrac{h}{2} f^{(2)}(\xi_0)$$

polynôme de degré 2

$$\begin{aligned}
f'(x_{-1}) &= \tfrac{1}{2h}\,[-f(x_1) + 4f(x_0) - 3f(x_{-1})] && + \tfrac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_1) \\
f'(x_0) &= \tfrac{1}{2h}\,[f(x_1) - f(x_{-1})] && - \tfrac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_2) \\
f'(x_1) &= \tfrac{1}{2h}\,[3f(x_1) - 4f(x_0) + f(x_{-1})] && + \tfrac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_3)
\end{aligned}$$

polynôme de degré 4

$$\begin{aligned}
f'(x_{-2}) &= \tfrac{1}{12h}\,[-3f(x_2) + 16f(x_1) - 36f(x_0) + 48f(x_{-1}) - 25f(x_{-2})] \\
&\quad + \tfrac{h^4}{5} f^{(5)}(\zeta_1) \\
f'(x_{-1}) &= \tfrac{1}{12h}\,[f(x_2) - 6f(x_1) + 18f(x_0) - 10f(x_{-1}) - 3f(x_{-2})] \\
&\quad - \tfrac{h^4}{20} f^{(5)}(\zeta_2) \\
f'(x_0) &= \tfrac{1}{12h}\,[-f(x_2) + 8f(x_1) - 8f(x_{-1}) + f(x_{-2})] \\
&\quad - \tfrac{h^4}{80} f^{(5)}(\zeta_3)
\end{aligned}$$

dérivée seconde, polynôme de degré 2, erreur en $O(h^2)$

$$f''(x_0) \quad \approx \tfrac{1}{h^2}\,[f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_{-1})]$$

dérivée seconde, polynôme de degré 4, erreur en $O(h^4)$

$$\begin{aligned}
f''(x_{-2}) &\approx \tfrac{1}{12h^2}\,[11f(x_2) - 56f(x_1) + 114f(x_0) - 104f(x_{-1}) - 35f(x_{-2})] \\
f''(x_{-1}) &\approx \tfrac{1}{12h^2}\,[-f(x_2) + 4f(x_1) + 6f(x_0) - 20f(x_{-1}) + 11f(x_{-2})]) \\
f''(x_0) &\approx \tfrac{1}{12h^2}\,[-f(x_2) + 16f(x_1) - 30f(x_0) + 16f(x_{-1}) - f(x_{-2})]
\end{aligned}$$

Chapitre II

Formules de quadrature

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, l'objectif est d'évaluer l'intégrale $\int_a^b f(x)w(x)dx$ où w est une fonction poids donnée, strictement positive sur $]a, b[$. On supposera toujours fw intégrable sur $[a, b]$.
Le principe sera de découper l'intégrale en une somme d'intégrales sur des petits segments :

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)w(x)dx$$

et d'appliquer sur chacun des petits segments une *formule de quadrature élémentaire.* La somme constituant une *formule de quadrature composée.*

Dans la suite $\mathcal{P}_k$ désignera l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à k.

1 Formules de quadrature élémentaires de type interpolation

Définition II.1 (Formule de type interpolation)
Soit $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$, $k+1$ points distincts du segment $[a, b]$. Une formule de quadrature de type interpolation pour estimer $\int_a^b f(x)w(x)dx$ consiste à utiliser l'intégrale sur $[a, b]$ du polynôme d'interpolation de Lagrange de f pour les points x_i.

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_0^k W_i f(x_i), \quad \text{avec} \quad W_i = \int_a^b \ell_{i,k}(x)w(x)dx$$

Théorème II.1
La formule de quadrature $\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_0^k W_i f(x_i)$ est exacte pour $f \in \mathcal{P}_k$ si et seulement si elle est du type interpolation.

Proposition II.2 (Estimation d'erreur)
Si $f \in C^{k+1}([a,b])$ et si la formule de quadrature est exacte sur $\mathcal{P}_k$ on a l'estimation d'erreur :

$$|\int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_0^k W_i f(x_i)| \leq \frac{\sup|f^{(k+1)}|}{(k+1)!} \int_a^b |\prod_i (x-x_i)|w(x)dx$$

Remarque II.1 Le théorème de Péano, qui n'est pas traité dans ces notes, permet de relier dans bien des cas l'erreur de la formule de quadrature à une dérivée d'ordre supérieur de la fonction f.

2 Exemples de formules élémentaires

2 - a Formules de Newton-Cotes fermées

Les formules de Newton-Cotes fermées sont des formules de quadrature, pour une fonction poids $w(x) \equiv 1$, utilisant les valeurs de la fonction f en des points équidistants avec un point à chaque extrémité de l'intervalle.
Les formules à $k+1$ points sont a priori exactes sur $\mathcal{P}_k$, mais par raison de symétrie, quand k est pair elles sont exactes sur $\mathcal{P}_{k+1}$.

Formule des trapèzes 2 points, exacte sur $\mathcal{P}_1$

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{2}\big[f(a)+f(b)\big] - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\xi)$$

Formule de Simpson 3 points, exacte sur $\mathcal{P}_3$

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{6}\big[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\big] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

Formule de Newton 4 points, exacte sur $\mathcal{P}_3$

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{8}\big[f(a)+3f(\frac{2a+b}{3})+3f(\frac{a+2b}{3})+f(b)\big] + O((b-a)^5 f^{(4)})$$

Formule de Boole-Villarceau 5 points, exacte sur $\mathcal{P}_5$

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{90}\big[7f(a)+32f(\frac{3a+b}{4})+12f(\frac{a+b}{2})+ \\ 32f(\frac{a+3b}{4})+7f(b)\big] + O((b-a)^7 f^{(6)})$$

A partir de $k=8$ on obtient des poids W_i négatifs et donc des risques d'erreurs numériques par compensation.

2 - b Formules de Newton-Cotes ouvertes

Les formules de Newton-Cotes ouvertes sont semblables aux formules fermées mais n'utilisant pas les bornes de l'intervalle.
Les formules à k points, k pair, sont exactes sur $\mathcal{P}_{k-1}$, et pour k impair exactes sur $\mathcal{P}_k$ par raison de symétrie.

Formule de Poncelet 1 point, exacte sur $\mathcal{P}_1$

$$\int_a^b f = (b-a)\ f(\frac{a+b}{2}) + O((b-a)^3 f^{(2)})$$

Formule 2 points, exacte sur $\mathcal{P}_1$

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{2}\big[f(\frac{2a+b}{3}) + f(\frac{a+2b}{3})\big] + O((b-a)^3 f^{(2)})$$

Formule 3 points, exacte sur $\mathcal{P}_3$

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{3}\big[2f(\frac{3a+b}{4}) - f(\frac{a+b}{2}) + 2f(\frac{a+3b}{4})\big] + O((b-a)^5 f^{(4)})$$

Formule 4 points, exacte sur $\mathcal{P}_3$

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{24}\big[11f(\frac{4a+b}{5}) + f(\frac{3a+2b}{5}) + f(\frac{2a+3b}{5}) + 11f(\frac{a+4b}{5})\big] + O((b-a)^5 f^{(4)})$$

3 Formules de Gauss

Dans les formules de quadrature des paragraphes précédents on choisissait a priori les $k+1$ points x_i d'évaluation de f et il restait le choix des $k+1$ poids W_i, on pouvait ainsi obtenir des formules exactes sur $\mathcal{P}_k$. Le principe des formules de Gauss consiste à chercher les meilleurs points x_i et les meilleurs poids W_i. On a ainsi le choix de $2k+2$ paramètres et on peut espérer être exact sur $\mathcal{P}_{2k+1}$.

3 - a Formules de Gauss ouvertes

Théorème II.3
Il existe un unique choix des $k+1$ points x_i de $[a,b]$ et des poids W_i tels que la formule de quadrature :

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_0^k W_i f(x_i)$$

soit exacte sur $\mathcal{P}_{2k+1}$.
La formule est de type interpolation, les x_i étant les racines du polynôme orthogonal de degré $k+1$ pour le poids $w(x)$ sur $]a,b[$.

Exemple II.1 (Formules de Gauss-Legendre)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0) \qquad \text{exacte sur } \mathcal{P}_1$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}) + f(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) \qquad \text{exacte sur } \mathcal{P}_3$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \tfrac{5}{9}f(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}) + \tfrac{8}{9}f(0) + \tfrac{5}{9}f(\sqrt{\tfrac{3}{5}}) \qquad \text{exacte sur } \mathcal{P}_5$$

Exemple II.2 (Formule de Gauss-Tchebychev)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{k+1}\sum_{0}^{k} f\left(\cos(\frac{2i+1}{2k+2}\pi)\right) \quad \text{exacte sur } \mathcal{P}_{2k+1}$$

3 - b Formules de Gauss-Lobatto

Les formules de Gauss-Lobatto sont des formules fermées à $k+1$ points dans lesquelles on impose $x_0 = a,\ x_k = b$.

Théorème II.4
Il existe un unique choix des $k-1$ points $x_i,\ 1 \le i \le k-1$, de $]a, b[$ et des $k+1$ poids $W_i,\ 0 \le i \le k$, tels que la formule de quadrature, avec $x_0 = a,\ x_k = b$:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{0}^{k} W_i f(x_i)$$

soit exacte sur $\mathcal{P}_{2k-1}$.
La formule est de type interpolation, les $x_i,\ 1 \le i \le k-1$, étant les racines du polynôme orthogonal de degré $k-1$ pour le poids $(x-a)(b-x)w(x)$ sur $]a, b[$.

4 Formules composées

En découpant l'intégrale sur $[a, b]$ en une somme d'intégrales sur des petits segments :

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)w(x)dx$$

sur chacun desquels on applique une formule de quadrature élémentaire, on obtient une formule de quadrature composée.
En posant $h = \frac{b-a}{n} = x_{i+1} - x_i$, si la méthode élémentaire est exacte sur $\mathcal{P}_k$, son erreur est en $O(h^{k+2})$. La somme de ces n erreurs majore l'erreur sur la formule composée, celle-ci est donc en $O((b-a)h^{k+1})$.

Formule des trapèzes composée

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + f(b)\Big) - \frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)$$

avec $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Formule de Simpson composée

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6}\Big(f(a)+f(b)+4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Big)-\frac{(b-a)}{180}(\frac{h}{2})^4 f^{(4)}(\xi)$$

avec $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i+x_{i+1}}{2}$.

Chapitre III

Polynômes orthogonaux

1 Définition

Etant donné un intervalle $]a, b[$, borné ou non borné, et une fonction poids $w(x)$ définie, continue, strictement positive sur $]a, b[$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^n|w(x)$ soit intégrable sur $]a, b[$, on considère l'espace vectoriel des fonctions continues :

$$\mathcal{L}^2_w(a, b) = \left\{f \mid f \in C(]a, b[), \int_a^b f(x)w(x)dx < \infty\right\}$$

muni du produit scalaire et de la norme :

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx, \quad \|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème III.1 (Polynômes orthogonaux pour le poids w)
Il existe une unique suite p_n de polynômes unitaires (le coefficient du terme de plus haut degré est 1), orthogonaux deux à deux dans $\mathcal{L}^2_w(a, b)$, tels que le degré de p_n soit n.

2 Propriétés

Proposition III.2
Les polynômes orthogonaux pour le poids w sur $]a, b[$ vérifient la relation de récurrence :

$$p_n(x) = (x - \lambda_n)p_{n-1}(x) - \mu_n p_{n-2}(x), \quad n \geq 2$$

avec

$$\lambda_n = \frac{(xp_{n-1}, p_{n-1})}{\|p_{n-1}\|^2} \qquad \mu_n = \frac{\|p_{n-1}\|^2}{\|p_{n-2}\|^2}$$

Théorème III.3 (Racines des polynômes orthogonaux)
Le polynôme orthogonal p_n de degré n pour le poids w sur $]a, b[$ a n racines distinctes dans $]a, b[$.
Les racines des polynômes orthogonaux forment une suite de Sturm, c'est à dire que les n racines du polynôme p_n séparent les $n + 1$ racines de p_{n+1}.

3 Exemples

Polynômes de Legendre. Ils sont orthogonaux sur $]-1,1[$ pour le poids $w(x)=1$.

$$L_0(x)=1,\ L_1(x)=x,\ L_2(x)=x^2-\tfrac{1}{3},\ L_3(x)=x^3-\tfrac{3}{5}x$$

$$L_n(x)=x\,L_{n-1}(x)-\frac{(n-1)^2}{(2n-1)(2n-3)}\,L_{n-2}(x)$$

Les polynômes de Legendre sont solutions de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

Polynômes de Laguerre. Ils sont orthogonaux sur $]0,+\infty[$ pour le poids $w(x)=e^{-x}$.

$$L_0(x)=1,\ L_1(x)=x-1,\ L_2(x)=x^2-4x+2$$

$$L_3(x)=x^3-9x^2+18x-6$$

$$L_n(x)=(x+1-2n)\,L_{n-1}(x)-(n-1)^2\,L_{n-2}(x)$$

$$L_n(x)=(-1)^n e^x\,\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$$

Les polynômes de Laguerre sont solutions de l'équation différentielle :

$$xy''+(1-x)y'+ny=0$$

Polynômes d'Hermite. Ils sont orthogonaux sur $]-\infty,+\infty[$ pour le poids $w(x)=e^{-x^2}$.

$$H_0(x)=1,\ H_1(x)=x,\ H_2(x)=x^2-\tfrac{1}{2},\ H_3(x)=x^3-\tfrac{3}{2}x$$

$$H_n(x)=x\,H_{n-1}(x)-\frac{n-1}{2}\,H_{n-2}(x)$$

$$H_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n}e^{x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

Les polynômes d'Hermite sont solutions de l'équation différentielle :

$$y''-2xy'+2ny=0$$

Polynômes de Tchebychev. Ils sont orthogonaux sur $]-1,1[$ pour le poids $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$p_n(x)=\frac{t_n(x)}{2^{n-1}}\quad\text{avec}\quad t_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

$$t_0(x)=1,\ t_1(x)=x,\ t_2(x)=2x^2-1,\ t_3(x)=4x^3-3x$$

$$t_n(x)=2x\,t_{n-1}(x)-t_{n-2}(x)$$

Les racines de p_n sont $x_i=\cos(\frac{2i+1}{2n}\pi),\quad 0\le i\le n-1$.
Les polynômes de Tchebychev sont solutions de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$$

Bibliographie

[1] Crouzeix M., A.L. Mignot
Analyse numérique des équations différentielles
Masson

[2] Demailly Jean-Pierre
Analyse numérique et équations différentielles
EDP Sciences

[3] Quarteroni, A., R. Sacco, F. Salieri
Méthodes numériques pour le calcul scientifique
Springer

[4] Schatzman Michelle
Analyse Numérique une approche mathématique
Dunod

Table des matières