Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2013-2014
MACS - 1
C. Basdevant, B. Delourme

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique du 5 mars 2014

Durée : 3h
Une feuille recto-verso de notes personnelles manuscrites est autorisée.

Exercice 1 : méthodes itératives

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée $n \times n$ inversible telle que ses éléments diagonaux soient tous non nuls et soit b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système linéaire $Ax = b$ en utilisant la méthode itérative suivante :
α étant un réel non nul et le vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ étant donné, on construit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par la formule de récurrence

$$x_{k+1} = (I - \alpha D^{-1}A)x_k + \alpha D^{-1}b. \tag{1}$$

où I est la matrice identité et D la matrice diagonale constituée de la diagonale de A ($D_{ii} = A_{ii}$).

1. Montrez que si la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ alors $\bar{x}$ est solution du système linéaire $A\bar{x} = b$.

   Corrigé : Supposons que la suite $(x_k)_{k\to+\infty}$ tende vers $\bar{x}$. Alors $(I-\alpha D^{-1}A)x_k$ tend vers $(I - \alpha D^{-1}A)\bar{x}$. A la limite, on a donc

   $$\bar{x} = (I - \alpha D^{-1}A)\bar{x} + \alpha D^{-1}b$$

   si bien que $A\bar{x} = b$ puisque α est non nul.

2. Exprimez les coefficients de la matrice $(I-\alpha D^{-1}A)$ en fonction des coefficients de A.

   Corrigé : On pose $M = (I - \alpha D^{-1}A)$. Alors

   $$M_{ij} = \begin{cases} 1-\alpha & \text{si } i = j, \\ -\alpha\,\frac{A_{ij}}{A_{ii}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. On suppose que A est à diagonale strictement dominante et que $0 < \alpha \leq 1$. Montrez que

   $$\|I - \alpha D^{-1}A\|_\infty < 1. \tag{2}$$

   On rappelle qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite à diagonale strictement dominante si,

   $$\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n, \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |B_{i,j}| < |B_{i,i}|.$$

Corrigé : Evaluons la norme infinie de M :

$$\|M\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

Or

$$(Mx)_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} x_j = -\frac{\alpha}{A_{ii}} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} A_{ij} x_j + (1-\alpha) x_i$$

Donc, comme $\alpha > 0$, $1-\alpha \geq 0$ et $|x_j| \leq \|x\|_\infty$ $\forall j$,

$$|(Mx)_i| \leq \|x\|_\infty \left(\frac{\alpha}{|A_{ii}|} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{ij}| + (1-\alpha) \right)$$

La matrice étant à diagonale strictement dominante $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |A_{i,j}| < |A_{ii}|$, on obtient

$$\|M\|_\infty < \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

4. Montrez que, sous les hypothèses de la question précédente, la méthode itérative (1) converge.
Corrigé : Comme $\|M\|_\infty < 1$ le rayon spectral $\rho(M)$ de la matrice d'itération est strictement inférieur à 1 et la méthode itérative converge.
5. Quelle méthode étudiée en cours retrouve-t-on quand $\alpha = 1$?
Corrigé : Quand $\alpha = 1$ la méthode est celle de Jacobi, en effet (1) s'écrit $Dx_{k+1} = (D - \alpha A)x_k + \alpha\, b$ et si l'on pose, comme en cours, $A = D - E - F$, avec $\alpha = 1$ on obtient $Dx_{k+1} = (E+F)x_k + b$, la méthode de Jacobi.

Exercice 2 : résolution numérique des EDO

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue, lipschitzienne dans sa deuxième variable, de constante de Lipschitz L. On s'intéresse au problème de Cauchy : trouver une fonction $y \in C^1([0,T])$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in]0,T] \\ y(0) = y^0 \end{cases} \tag{3}$$

Pour une discrétisation régulière $t_n = nh$, $0 \leq n \leq N$, $h = \frac{T}{N}$ du segment $[0,T]$, on souhaite calculer les approximations $y_n \approx y(t_n)$ de la solution exacte par le schéma suivant :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right), \quad 1 \leq n \leq N \\ y_0 = y^0 \end{cases} \tag{4}$$

1. La méthode est-elle implicite ou explicite ? Montrez que cette méthode est bien définie si $h < 2/L$. Cette condition sera toujours supposée remplie dans la suite.
Corrigé : La méthode est implicite, pour calculer y_{n+1} il faut résoudre une équation non linéaire. En effet, y_{n+1} satisfait $y_{n+1} = g(y_{n+1})$ (y_{n+1} est un point fixe de g) où la fonction g (qui dépend de y_n de t_n et de h) est donnée par

$$g(y) = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y)\right).$$

Si la fonction g est contractante, alors l'équation de point fixe aura une unique solution. Or, puisque f est lipschitzienne dans sa deuxième variable,

$$|g(y) - g(z)| = \frac{h}{2}|f(t_n + h, y) - f(t_n + h, z)| \leq \frac{Lh}{2}|y - z|.$$

Autrement dit, si $h < \frac{2}{L}$ alors g est contractante et le schéma numérique est bien défini.

2. Réécrivez le schéma (4) sous la forme générale d'un méthode à un pas :

$$y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(t_n, y_n, h).$$

On explicitera la fonction Φ.

Corrigé : Définissons la fonction φ par :

$$\varphi : \begin{cases} (t, z, d) \mapsto y^* = \varphi(t, z, d) \\ \text{où } y^* = z + \frac{d}{2}\left[f(t, z) + f(t + d, y^*)\right]. \end{cases}$$

Comme vu à la question précédente, cette fonction est parfaitement définie dès que $d < \frac{2}{L}$. A l'aide de cette fonction, on voit que $y_{n+1} = \varphi(t_n, y_n, h)$. Il s'en suit que le schéma se réécrit comme une méthode à un pas

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(t_n, y_n, h) \\ \text{avec } \Phi(t, y, h) = \frac{1}{2}\left[f(t, y) + f\left(t + h, \varphi(t, y, h)\right)\right]. \end{cases}$$

3. On considère un schéma perturbé :

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_{n+1})\right) + \varepsilon_n, \quad 1 \leq n \leq N \\ z_0 = z^0 \end{cases} \tag{5}$$

Montrez que, sous la condition $h < \frac{2}{L}$, il existe des constantes $A(Lh)$ et $B(Lh)$ telles que :

$$|z_n - y_n| \leq A(Lh)^n |z_0 - y_0| + B(Lh)\frac{A(Lh)^n - 1}{A(Lh) - 1}\max_{k \leq n}|\varepsilon_k|$$

En déduire une propriété importante du schéma.

Corrigé : En soustrayant le schéma du schéma perturbé et en utilisant le caractère lipschitzien de f on obtient :

$$|z_{n+1} - y_{n+1}| \leq |z_n - y_n| + \frac{Lh}{2}\left(|z_n - y_n| + |z_{n+1} - y_{n+1}|\right) + |\varepsilon_n|$$

d'où

$$|z_{n+1} - y_{n+1}| \leq \frac{1 + \frac{Lh}{2}}{1 - \frac{Lh}{2}}|z_n - y_n| + \frac{1}{1 - \frac{Lh}{2}}|\varepsilon_n|$$

et par récurrence en posant $A(Lh) = \frac{1+\frac{Lh}{2}}{1-\frac{Lh}{2}}$ et $B(Lh) = \frac{1}{1-\frac{Lh}{2}}$:

$$|z_n - y_n| \leq A(Lh)^n |z_0 - y_0| + B(Lh)\frac{A(Lh)^n - 1}{A(Lh) - 1}\max_{k \leq n}|\varepsilon_k|$$

Cette inégalité prouve la stabilité du schéma, en effet : $\forall \alpha > 2$, $\exists\, x_0(\alpha) < 1$ tel que $\frac{1+x}{1-x} \leq \exp(\alpha x)$ pour $0 \leq x \leq x_0(\alpha)$, ainsi $A(Lh) \leq \exp(\alpha L h)$ pour $h \leq h_0(\alpha) < \frac{2}{L}$, soit $A(Lh)^n \leq \exp(\alpha L t_n)$ et ainsi :

$$|z_n - y_n| \leq \exp(\alpha L t_n)|z_0 - y_0| + n\, B(Lh)\, \exp(\alpha L t_n) \max_{k \leq n} |\varepsilon_k|$$

4. En utilisant (et citant) des théorèmes vus en cours montrez que le schéma est consistant et convergent.

   Corrigé : On a vu en cours qu'un schéma à un pas est consistant si et seulement si $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$, $\forall y$, ce qui est le cas ici, de plus on vient de démontrer la stabilité du schéma et le théorème de Lax et Richtmayer nous dit qu'un schéma stable et consistant est convergent.

5. On suppose que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et on admet que la solution exacte est très régulière sur $[0, T]$ (par exemple, $y \in \mathcal{C}^4([0, T])$). Démontrez que l'erreur locale de troncature r_n vérifie

$$r_n = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \Phi(t_n, y(t_n), h) = K(t_n)h^2 + o(h^2)$$

   où vous exprimerez $K(t_n)$ en fonction de dérivées de la fonction y. En déduire l'ordre du schéma.

   Corrigé : A l'aide de développements de Taylor autour de $t_{n+\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \frac{1}{2}\left(y'(t_n) + y'(t_{n+1})\right) \\ &= y'(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{24} y^{(3)}(t_{n+\frac{1}{2}}) + o(h^2) - \left(y'(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{8} y^{(3)}(t_{n+\frac{1}{2}}) + o(h^2) \right) \\ &= -\frac{h^2}{12} y^{(3)}(t_{n+\frac{1}{2}}) + o(h^2) \end{aligned}$$

   Le schéma est donc d'ordre 2.
   Note : Une majoration utilisant des développements de Taylor-Lagrange évite de garder des $o(h^2)$:

$$\begin{aligned} r_n &= y'(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{24} y^{(3)}(t_{n+\theta_1}) - \left(y'(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{8} y^{(3)}(t_{n+\theta_2}) \right) \\ |r_n| &\leq \frac{h^2}{6} \sup_t |y^{(3)}(t)| \end{aligned}$$

6. Donnez une majoration de l'erreur $e_n = |y(t_n) - y_n|$ explicitant la convergence de la méthode.

   Corrigé : En utilisant l'inégalité de stabilité et la majoration de l'erreur locale de troncature on obtient la convergence de la méthode, pour $h \leq h_0(\alpha)$:

$$|y(t_n) - y_n| \leq n\, B(Lh)\, \exp(\alpha L t_n) \max_{k \leq n} |h\, r_k| \leq B(Lh)\, t_n\, \exp(\alpha L t_n) \left[\frac{h^2}{6} \sup_t |y^{(3)}(t)| \right]$$

Exercice 3 : polynôme d'interpolation

Soit f une fonction réelle, continue et dérivable sur $[-1, 1]$ et $x_0 \in]0, 1[$.
Démontrez qu'il existe un unique polynôme Q de degré inférieur ou égal à 5 vérifiant :

$$\begin{array}{ccc} Q(-x_0) = f(-x_0) & Q(0) = f(0) & Q(x_0) = f(x_0) \\ Q'(-x_0) = f'(-x_0) & Q'(0) = f'(0) & Q'(x_0) = f'(x_0) \end{array}$$

Attention : on ne demande pas de calculer ce polynôme !

Corrigé : Soit $\mathcal{P}_5$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5. Considérons l'application Φ de $\mathcal{P}_5$ dans $\mathbb{R}^6$ qui à un polynôme P associe le sextuplet $(P(-x_0), P(0), P(x_0), P'(-x_0), P'(0), P'(x_0))$. L'existence et l'unicité du polynôme Q est équivalente à la bijectivité de Φ. L'application Φ étant une application linéaire entre deux espace vectoriels de même dimension 6, elle est bijective si et seulement si elle est injective. Pour vérifier l'injectivité de Φ il faut vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul, or si $P \in \ker(\Phi)$ alors $-x_0, 0$ et x_0 sont des racines doubles de P, P étant de degré inférieur ou égal à 5 ce n'est possible que si P est le polynôme nul.