Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2014-2015
MACS - 1

C. Basdevant, B. Delourme

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique du 5 janvier 2015

Durée : 3h
Une feuille recto-verso de notes personnelles manuscrites est autorisée.

Problème I (5/20)

Soit la A matrice réelle d'ordre $(n-1) \geq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \cdots, n-1$$

1. Calculez les valeurs propres et le rayon spectral de la matrice de Jacobi $\mathcal{J}$ appliquée à un système linéaire $Ax = b$. (Indication : on remarquera que $\mathcal{J}$ est un polynôme en A).
   Corrigé : Avec les notations habituelles la matrice de Jacobi s'écrit $\mathcal{J} = D^{-1}(E + F) = D^{-1}(D - A) = I - D^{-1}A$. Ici $D = 2I$, d'où $\mathcal{J} = I - \frac{A}{2}$, donc les valeurs propres de $\mathcal{J}$ sont $\mu_k = 1 - \frac{\lambda_k}{2} = 1 - 2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \cos(\frac{k\pi}{n})$ et son rayon spectral est $\rho(\mathcal{J}) = \cos(\frac{\pi}{n})$.
2. Calculez le développement limité à l'ordre 2 en $\alpha = \frac{1}{n}$ de $\rho(\mathcal{J})$ pour n grand.
   Corrigé : $\rho(\mathcal{J}) = \cos(\frac{\pi}{n}) = 1 - \frac{\pi^2}{2}\alpha^2 + O(\alpha^4)$
3. Montrez que $\|\mathcal{J}^k\|_2 = \rho(\mathcal{J})^k$, en déduire que l'erreur $e_k = x_k - x$ à l'itération k de la méthode de Jacobi vérifie :

   $$\|e_k\|_2 \leq \rho(\mathcal{J})^k \|e_0\|_2$$

   Corrigé : On a vu que $\mathcal{J} = I - \frac{A}{2}$, $\mathcal{J}$ est donc une matrice symétrique et l'on sait que pour les matrices normales (donc en particulier les symétriques) le rayon spectral est égal à la norme matricielle induite par la norme Euclidienne, d'où $\|\mathcal{J}\|_2 = \rho(\mathcal{J})$ et le résultat demandé.
   L'itération de Jacobi s'écrit $x_k = \mathcal{J}x_{k-1} + D^{-1}b$ et l'erreur vérifie $e_k = \mathcal{J}e_{k-1} = \mathcal{J}^k e_0$, d'où la majoration demandée.

4. Soit $\epsilon > 0$, partant d'une donnée initiale x_0 telle que $\|e_0\|_2 = 1$, combien d'itérations k_0 de la méthode de Jacobi sont elles nécessaires pour avoir $\|e_k\|_2 \leq \epsilon$, $\forall k \geq k_0$? Donnez un équivalent de k_0 fonction de n.

   Corrigé : On veut $\rho(\mathcal{J})^{k_0}\|e_0\|_2 \leq \epsilon$, soit

$$k_0 \geq \frac{\ln \epsilon}{\ln \rho(\mathcal{J})} \approx \frac{-\ln \epsilon}{\frac{\pi^2}{2}\alpha^2} = -2\frac{\ln \epsilon}{\pi^2}n^2$$

Problème II (5/20)

Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction suffisamment continûment différentiable. On pose :

$$g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

On suppose f et g Lipschitziennes par rapport à y :

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,z)| &\leq L\,|y-z| \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall y,z \in \mathbb{R} \\ |g(x,y) - g(x,z)| &\leq M\,|y-z| \end{aligned}$$

Pour résoudre numériquement le problème :

$$y' = f(x,y) \quad \forall x \in [a,b], \quad y(a) = \eta \tag{1}$$

on utilise la méthode à un pas implicite :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{(1+\alpha)f_{k+1} + (1-\alpha)f_k\} - \frac{h^2}{4}\{(\beta+\alpha)g_{k+1} - (\beta-\alpha)g_k\} \tag{2}$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$, $y_0 = \eta$, $f_k = f(x_k, y_k)$, $g_k = g(x_k, y_k)$ et α et β sont des réels à déterminer au mieux.

1. Donnez une méthode itérative de calcul de la solution y_{k+1} de l'équation (2) et une condition suffisante sur h pour qu'elle converge.

   Corrigé : y_{k+1} est solution de l'équation $G(y) = y$ avec

$$G(y) = y_k + \frac{h}{2}\{(1+\alpha)f(x_{k+1},y) + (1-\alpha)f_k\} - \frac{h^2}{4}\{(\beta+\alpha)g(x_{k+1},y) - (\beta-\alpha)g_k\}$$

   Montrons que, pour h suffisamment petit, G est contractante, alors G aura un unique point fixe qui pourra être obtenu par l'itération $y^{n+1} = G(y^n)$.

$$|G(y) - G(z)| = |\frac{h}{2}(1+\alpha)\left(f(x_{k+1},y) - f(x_{k+1},z)\right) - \frac{h^2}{4}(\beta+\alpha)\left(g(x_{k+1},y) - g(x_{k+1},z)\right)|$$
$$|G(y) - G(z)| \leq \left(\frac{h}{2}|1+\alpha|L + \frac{h^2}{4}|\beta+\alpha|M\right)|y-z|$$

   et donc pour h assez petit, i.e. $\frac{h}{2}|1+\alpha|L + \frac{h^2}{4}|\beta+\alpha|M < 1$, G est contractante.

2. Déterminez l'ordre de la méthode (2) pour α et β quelconques.

3. Pour quelle valeur de β la méthode est-elle d'ordre 3 ?
4. Pour quelle valeur du couple α, β est-elle d'ordre 4 ?

   Corrigé : Pour déterminer l'ordre on est amené à faire des développements limités, à l'ordre 5, autour du point x_k, de l'erreur locale de troncature η_k soit :

$$\begin{aligned}\eta_k =& \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} - \frac{1}{2}\left\{(1+\alpha)y'(x_{k+1}) + (1-\alpha)y'(x_k)\right\} \\ &+ \frac{h}{4}\left\{(\beta+\alpha)y''(x_{k+1}) - (\beta-\alpha)y''(x_k)\right\}\end{aligned}$$

   Le terme d'ordre le plus bas définit alors l'ordre de la méthode, tout calcul fait on trouve :
   – Pour α et β quelconques la méthode est d'ordre 2,
   – Pour $\beta = \frac{1}{3}$ et α quelconque elle est d'ordre 3,
   – Pour $\beta = \frac{1}{3}$ et $\alpha = 0$ elle est d'ordre 4.
   En effet, on trouve, en omettant les arguments (x_k) :

$$\frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} = y' + \frac{h}{2}y^{(2)} + \frac{h^2}{6}y^{(3)} + \frac{h^3}{24}y^{(4)} + \frac{h^4}{120}y^{(5)}(\xi_1)$$
$$\frac{1}{2}\left((1+\alpha)y'(x_{k+1}) + (1-\alpha)y'(x_k)\right) = y' + (1+\alpha)\left(\frac{h}{2}y^{(2)} + \frac{h^2}{4}y^{(3)} + \frac{h^3}{12}y^{(4)} + \frac{h^4}{48}y^{(5)}(\xi_2)\right)$$
$$\frac{h}{4}\left\{(\beta+\alpha)y''(x_{k+1}) - (\beta-\alpha)y''(x_k)\right\} = \frac{h}{2}\alpha y^{(2)} + (\beta+\alpha)\left(\frac{h^2}{4}y^{(3)}\frac{h^3}{8}y^{(4)} + \frac{h^4}{24}y^{(5)}(\xi_3)\right)$$

   et ainsi

$$\eta_k = \frac{h^2}{4}y^{(3)}(\beta - \frac{1}{3}) + \frac{h^3}{24}y^{(4)}(3\beta + \alpha - 1) + O(h^4 y^{(5)})$$

Problème III (10/20)

Soit $f(t,y) : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment continûment différentiable et Lipschitzienne par rapport à y :

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq L\,|y-z| \quad \forall t \in [a,b], \quad \forall y,z \in \mathbb{R}$$

Pour résoudre numériquement le problème :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in [a,b], \quad y(a) = \eta \tag{3}$$

on considère des méthodes à un pas :

$$y_{k+1} = y_k + h\,\Phi_\alpha(t_k, y_k, h) \tag{4}$$

1. Soit $\phi \in C^3([x, x+h])$, montrez qu'il existe $\xi \in [x, x+h]$ tel que :

$$\phi(x+h) - \phi(x) = h\phi'(x + \frac{h}{2}) + \frac{h^3}{24}\phi^{(3)}(\xi) \tag{5}$$

Corrigé : Faisons des développements limités de Taylor Lagrange à l'ordre 3 au voisinage de $x + \frac{h}{2}$:

$$\phi(x+h) = \phi(x+\frac{h}{2}) + \frac{h}{2}\phi'(x+\frac{h}{2}) + \frac{h^2}{8}\phi''(x+\frac{h}{2}) + \frac{h^3}{48}\phi^{(3)}(\xi_1)$$
$$\phi(x) = \phi(x+\frac{h}{2}) - \frac{h}{2}\phi'(x+\frac{h}{2}) + \frac{h^2}{8}\phi''(x+\frac{h}{2}) - \frac{h^3}{48}\phi^{(3)}(\xi_2)$$

avec $\xi_1 \in [x+\frac{h}{2}, x] + h$ et $\xi_2 \in [x, x+\frac{h}{2}]$, par soustraction on obtient :

$$\phi(x+h) - \phi(x) = h\phi'(x+\frac{h}{2}) + \frac{h^3}{48}\left(\phi^{(3)}(\xi_1) + \phi^{(3)}(\xi_2)\right)$$

et le résultat (5) vient en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue $\phi^{(3)}$.

2. Soit $\psi \in C^2([x, x+h])$, montrez qu'il existe $\eta \in [x, x+h]$ tel que :

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \psi(t)dt = \psi(x+\frac{h}{2}) + \frac{h^2}{24}\psi^{(2)}(\eta) \tag{6}$$

Corrigé : En désignant par $\phi(x) = \int^x \psi(t)dt$ une primitive de ψ, la formule (6) se déduit simplement de la formule (5).

3. En utilisant les résultats précédents pour évaluer l'erreur locale de troncature, montrez que la méthode à un pas définie par :

$$\Phi(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}\Phi_\alpha(t, y, \frac{h}{2})\right)$$

est d'ordre supérieur ou égal à 2 dès que Φ_α est une méthode à un pas d'ordre p supérieur ou égal à 1.

Corrigé : Pour déterminer l'ordre de la méthode on cherche q tel que l'erreur locale de troncature ϵ_Φ vérifie :

$$\epsilon_\Phi = |\frac{y(t+h) - y(t)}{h} - f\left(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{h}{2}\Phi_\alpha(t, y(t), \frac{h}{2})\right)| \leq Ch^q$$

pour toute solution régulière $y(t)$ de l'équation (3).
Φ_α étant d'ordre p par hypothèse, on a :

$$y(t) + \frac{h}{2}\Phi_\alpha(t, y(t), \frac{h}{2}) = y(t+\frac{h}{2}) + O(h^{p+1})$$

et en utilisant (5), puis l'équation (3) :

$$\epsilon_\Phi = |y'(t+\frac{h}{2}) + O(h^2) - f\left(t+\frac{h}{2}, y(t+\frac{h}{2}) + O(h^{p+1})\right)|$$
$$\epsilon_\Phi = |f\left(t+\frac{h}{2}, y(t+\frac{h}{2})\right) - f\left(t+\frac{h}{2}, y(t+\frac{h}{2}) + O(h^{p+1})\right) + O(h^2)|$$

enfin en invoquant le caractère Lipschitzien de f :

$$\epsilon_\Phi \leq L\,O(h^{p+1}) + O(h^2)$$

d'où le résultat demandé.

4. Plus généralement, soit la formule de quadrature vérifiant pour $\psi \in C^n([x, x+h])$:

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \psi(t)dt = \sum_{k=1}^{k=p} w_k \psi(x+\theta_k h) + O(h^n)\sup|\psi^{(n)}|$$

où les $\theta_k \in [0,1]$, on pose alors :

$$\Phi(t,y,h) = \sum_{k=1}^{k=p} w_k f\left(t+\theta_k h, y+\theta_k h \Phi_k(t,y,\theta_k h)\right)$$

avec les Φ_k des méthodes à un pas d'ordres respectifs p_k.
Montrez que la méthode à un pas ainsi définie par Φ est d'ordre supérieur ou égal à $\min\left(n, \min_k(p_k+1)\right)$.
Corrigé : Le raisonnement est semblable au précédent :

$$\epsilon_\Phi = |\frac{1}{h}\int_t^{t+h} y'(u)du - \sum_{k=1}^{k=p} w_k f\left(t+\theta_k h, y(t)+\theta_k h\Phi_k(t,y(t),\theta_k h)\right)|$$

$$\epsilon_\Phi = |\sum_{k=1}^{k=p} w_k \left[f(t+\theta_k h, y(t+\theta_k h)) - f\left(t+\theta_k h, y(t)+\theta_k h\Phi_k(t,y(t),\theta_k h)\right)\right] + O(h^n)|$$

Φ_k étant d'ordre p_k par hypothèse, on a :

$$y(t)+\theta_k h\Phi_k(t,y(t),\theta_k h) = y(t+\theta_k h) + O(h^{p_k+1})$$

et en utilisant le caractère Lpschitzien de f :

$$\epsilon_\Phi \leq \sum_{k=1}^{k=p} w_k L\, O(h^{p_k+1}) + O(h^n)$$

d'où le résultat.

5. Soit $\psi \in C^3([0,h])$, montrez que :

$$\frac{1}{h}\int_0^h \psi(t)dt = \frac{1}{4}\psi(0) + \frac{3}{4}\psi(\frac{2h}{3}) + O(h^3)\sup|\psi^{(3)}|$$

Corrigé : Si la formule donnée est juste, c'est une formule exacte pour les polynômes de degré 2, c'est donc une formule de type interpolation. On vérifie facilement que $\frac{h}{4}\psi(0) + \frac{3h}{4}\psi(\frac{2h}{3})$ est bien égal à $\int_0^h P(t)dt$ avec $P(t)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de ψ aux points 0 et $\frac{2h}{3}$.
Pour avoir le terme d'erreur, posez $\phi(h) = \int_0^h \psi(t)dt$ et faites des développements de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 au voisinage de 0 des termes de $\phi(h) - \frac{h}{4}\phi'(0) - \frac{3h}{4}\phi'(\frac{2h}{3})$, on trouve alors $(\frac{h^4}{24}\phi^{(4)}(\alpha) - \frac{h^4}{27}\phi^{(4)}(\beta))$ avec α et β dans $[0,h]$ (notez qu'ici les coefficients étant de signe contraire on ne peut invoquer le théorème des valeurs intermédiaires). Ce qui correspond au résultat demandé.

6. Construisez alors une méthode à un pas d'ordre 3.

Corrigé : Prenons comme méthode d'ordre 1 la méthode d'Euler-Cauchy, soit $\Phi_1(t,y,h) = f(t,y)$. Le résultat de la question 3 permet de construire une méthode d'ordre 2 : $\Phi_2(t,y,h) = f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right)$. Maintenant la formule de la question 4, utilisée avec la formule de quadrature de la question 5 permet de construire une méthode d'ordre $\min\left(n, \min_k(p_k+1)\right)$ avec $n=3$ et $p_k=2$, on a ainsi une méthode d'ordre 3 soit :

$$\Phi_3(t,y,h) = \frac{1}{4}f(t,y) + \frac{3}{4}f\left(t+\frac{2h}{3}, y+\frac{2h}{3}\Phi_2(t,y,\frac{2h}{3})\right)$$

$$\Phi_3(t,y,h) = \frac{1}{4}f(t,y) + \frac{3}{4}f\left(t+\frac{2h}{3}, y+\frac{2h}{3}f\left(t+\frac{h}{3}, y+\frac{h}{3}f(t,y)\right)\right)$$