Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2002-2003
MACS - 1
C. Basdevant, S. Boatto

Devoir surveillé d'Analyse Numérique
du vendredi 9 mai 2003

Durée : 1h30
Notes de cours autorisées.

Problème

On considère l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall t > 0$$
$$u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

où u^0 est la condition initiale supposée régulière et bornée.

Pour un maillage régulier en temps $t_n = n\Delta t$ et en espace $x_j = j\Delta x$, on introduit le schéma d'approximation par différences finies où $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - w_j^n + \left(\frac{(\Delta x)^2 - 6\Delta t}{12} \right) \frac{w_{j+1}^n + w_{j-1}^n - 2w_j^n}{(\Delta x)^2} = 0 \quad j \in \mathbb{Z} \ , \ n \geq 0$$
$$\text{avec} \quad w_j^n = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{(\Delta x)^2}$$
$$u_j^0 = u^0(x_j) \qquad j \in \mathbb{Z}$$

1. Ecrire le schéma sous la forme :

$$u_j^{n+1} = a_{-2}\, u_{j-2}^n + a_{-1}\, u_{j-1}^n + a_0\, u_j^n + a_1\, u_{j+1}^n + a_2\, u_{j+2}^n$$

   avec des coefficients a_i que l'on explicitera en fonction de $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.
2. Montrez qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le schéma conserve la positivité s'écrit :

$$\frac{1}{6} \leq \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{2}{3}$$

   En déduire que sous cette condition u_j^n reste borné pour tous j et n.
3. Montrez (proprement !) que, sous la condition de stabilité précédente, l'erreur locale de troncature est majorée par :

$$C_1\, (\Delta t)^2\, \mathrm{Max}|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}| + C_2\, (\Delta x)^4\, \mathrm{Max}|\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}|$$

   où C_1 et C_2 sont deux constantes indépendantes de u, Δt et Δx.

4. En déduire, toujours sous la condition de stabilité, la majoration d'erreur pour $t_n < T$:
$$|u_j^n - u(x_j, t_n)| \leq C\, T\, (\Delta x)^4$$
où C est une constante qui ne dépend que de u.

5. Montrez qu'une analyse de stabilité de von Neumann conduit à la condition nécessaire et suffisante de stabilité :
$$|f(K)| \leq 1 \quad \forall K \in [-1, 1]$$
avec
$$f(K) = 4a_2K^2 + 2a_1K + a_0 - 2a_2$$

6. En étudiant les valeurs de $f(1)$, $f(-1)$, $f'(1)$ et $f'(-1)$ en fonction de λ, montrez que : $\lambda \leq \frac{2}{3}$ est une condition nécessaire et $\lambda \leq \frac{5}{12}$ une condition suffisante de stabilité dans $L^2(\mathbb{R})$.

7. En déduire que le schéma est stable dans $L^2(\mathbb{R})$ pour $\lambda \leq \frac{2}{3}$.