Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2011-2012
MACS - 1
C. Basdevant

Corrigé du devoir surveillé d'Analyse Numérique
du mardi 29 mai 2012

Durée : 1h30

Une unique feuille recto de notes personnelles est autorisée.
Les téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés.

On considère l'approximation de différences finies sur une grille régulière de l'opérateur Laplacien définie par :

$$\Delta_h^{(4)} = \frac{4}{3}\Delta_h^{(2)} - \frac{1}{3}\Delta_{2h}^{(2)}$$

dans lequel l'opérateur de différences finies $\Delta_h^{(2)}$ sur une grille de pas h est donné

$$\text{en dimension 1, par } (\Delta_h^{(2)}u)_i = \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2\,u_i}{h^2}$$

$$\text{en dimension 2, par } (\Delta_h^{(2)}u)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4\,u_{i,j}}{h^2}$$

1. Montrez que $\Delta_h^{(4)}$ est une approximation d'ordre 4 du Laplacien, aussi bien en dimension 1 qu'en dimension 2.

Corrigé : Des développements limités à l'ordre 4 donnent :

$$\frac{u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i) + O(h^4)$$

On en déduit en dimension 1 que :

$$\begin{aligned}
(\Delta_h^{(4)}u)_i &= \frac{4}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i) + O(h^4)\right) \\
&\quad -\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i) + \frac{(2h)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i) + O(h^4)\right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i) + O(h^4)
\end{aligned}$$

En dimension 2 on remarque que :

$$(\Delta_h^{(2)}u)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4\,u_{i,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2\,u_{i,j}}{h^2}$$

L'opérateur est donc la somme d'un opérateur différentiel dans la direction x et d'un dans la direction y, le résultat précédent peut donc être utilisé dans les deux directions successives et ainsi :

$$(\Delta_h^{(4)}u)_{i,j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) + O(h^4)$$

2. On considère dans la suite des schémas sur une grille régulière pour l'équation des ondes dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall t > 0$$

On désignera par u_h^n l'approximation de $u(x_i, t_n)$ sur la grille régulière, avec $x_i = i\,h$ et $t_n = n\,\tau$.

(a) Analysez l'ordre et la stabilité du schéma :

$$\Delta_\tau^{(2)} u_h^n - c^2 \Delta_h^{(4)} u_h^n = 0 \tag{1}$$

Corrigé : D'après la question précédente le schéma est d'ordre 2 en temps et 4 en espace. Analysons sa stabilité par la méthode de Von Neumann. Posons $u_j^n = a_n \exp(ikx_j)$, le schéma s'écrit alors :

$$a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n + c^2\tau^2 \left(\frac{4}{3}\frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{kh}{2}) - \frac{1}{3}\frac{4}{4h^2} \sin^2(\frac{2kh}{2}) \right) a_n = 0$$

$$a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n + \frac{4c^2\tau^2}{3h^2} \left(4\sin^2(\frac{kh}{2}) - \sin^2(\frac{kh}{2}) \cos^2(\frac{kh}{2}) \right) a_n = 0$$

$$a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n + \frac{4c^2\tau^2}{3h^2} \sin^2(\frac{kh}{2}) \left(3 + \sin^2(\frac{kh}{2}) \right) a_n = 0$$

La suite a_n est donc une suite récurrente à deux termes d'équation caractéristique $x^2 - \mu x + 1 = 0$ avec $\mu = 2 - \frac{4c^2\tau^2}{3h^2} \sin^2(\frac{kh}{2}) \left(3 + \sin^2(\frac{kh}{2})\right)$. D'après un résultat connu cette équation aura ses deux racines de module inférieur à 1 si et seulement si $|\mu| \leq 2$, soit $\frac{c^2\tau^2}{3h^2} \sin^2(\frac{kh}{2}) \left(3 + \sin^2(\frac{kh}{2})\right) \leq 1$, $\forall k$, soit $\frac{4c^2\tau^2}{3h^2} \leq 1$ et donc la condition nécessaire et suffisante de stabilité s'écrit $\frac{c\tau}{h} \leq \sqrt{\frac{3}{4}}$.

(b) Analysez l'ordre et la stabilité du schéma :

$$\Delta_\tau^{(4)} u_h^n - c^2 \Delta_h^{(4)} u_h^n = 0 \tag{2}$$

Corrigé : D'après la première question le schéma est a priori d'ordre 4 en temps et 4 en espace. Analysons sa stabilité par la méthode de Von Neumann. Posons $u_j^n = a_n \exp(ikx_j)$, le schéma s'écrit alors, en utilisant les calculs précédents :

$$\frac{4}{3}(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n) - \frac{1}{3}\left(\frac{a_{n+2} + a_{n-2} - 2a_n}{4} \right) + \frac{4c^2\tau^2}{3h^2} \sin^2(\frac{kh}{2}) \left(3 + \sin^2(\frac{kh}{2}) \right) a_n = 0$$

soit :
$a_{n+2} - 16a_{n+1} + (30 - 16\lambda)a_n - 16a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ avec $\lambda = \frac{c^2\tau^2}{h^2} \sin^2(\frac{kh}{2}) \left(3 + \sin^2(\frac{kh}{2})\right)$
La suite a_n est donc une suite récurrente à quatre termes d'équation caractéristique $x^4 - 16x^3 + (30 - 16\lambda)x^2 - 16x + 1 = 0$. Pour $k = 0$ elle se réduit à $x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 16x + 1 = 0$ une équation dont on vérifie que $x = 1$ est racine double et donc qui se factorise en $(x-1)^2\,(x^2 - 14x + 1) = 0$. Ce dernier trinôme possède une racine strictement supérieure à 1, le schéma est donc inconditionnellement instable.

(c) Analysez l'ordre du schéma :

$$\Delta_\tau^{(2)} u_h^n - c^4 \frac{\tau^2}{12} (\Delta_h^{(2)})^2 u_h^n - c^2 \Delta_h^{(4)} u_h^n = 0 \tag{3}$$

avec $(\Delta_h^{(2)})^2 = \Delta_h^{(2)} \circ \Delta_h^{(2)}$

Corrigé : Analysons l'ordre du schéma terme par terme. Pour le premier terme on a vu que :

$$\Delta_\tau^{(2)} u_h^n = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n) + \frac{\tau^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_n) + O(\tau^4)$$

et pour le dernier :

$$c^2 \Delta_h^{(4)} u_h^n = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) + O(h^4)$$

Regardons maintenant le terme médian :

$$\begin{aligned}
(\Delta_h^{(2)})^2 u_h^n &= \Delta_h^{(2)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_n) + O(h^4) \right) \\
&= \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_n) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_i, t_n) + O(h^4) + \\
&\quad \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_i, t_n) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^8 u}{\partial x^8}(x_i, t_n) + O(h^4) \right) \\
&= \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t_n) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_i, t_n) + O(h^4)
\end{aligned}$$

Mais comme $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, on a $\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ et donc :

$$c^4 \frac{\tau^2}{12} (\Delta_h^{(2)})^2 u_h^n = \frac{\tau^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_n) + c^4 \frac{\tau^2 h^2}{72} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_i, t_n) + O(\tau^2 h^4)$$

en utilisant la majoration $2\tau^2 h^2 \leq \tau^4 + h^4$ et en regroupant les trois termes on conclut que le schéma est d'ordre 4 en temps et en espace.

(d) Explicitez l'opérateur $\left((\Delta_h^{(2)})^2 u \right)_i$

Corrigé :

$$\begin{aligned}
\left((\Delta_h^{(2)})^2 u \right)_i &= \Delta_h^{(2)} \left(\frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2\, u_i}{h^2} \right) \\
&= \frac{(u_{i+2} + u_i - 2\, u_{i+1}) + (u_i + u_{i-2} - 2\, u_{i-1}) - 2\,(u_{i+1} + u_{i-1} - 2\, u_i)}{h^4} \\
&= \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{h^4}
\end{aligned}$$

(e) Analysez la stabilité du schéma (3).

Corrigé : Analysons sa stabilité par la méthode de Von Neumann. Posons $u_j^n = a_n \exp(ikx_j)$. Nous connaissons déjà la forme que prennent les premier et dernier termes, regardons la forme du terme médian ; d'après la question précédente il donne :

$$\begin{aligned}
(\Delta_h^{(2)})^2 u_h^n &= \frac{e^{2ikh} - 4e^{ikh} + 6 - 4e^{-ikh} + e^{-2ikh}}{h^4} a_n \exp(ikx_j) \\
&= \frac{2\cos(2kh) - 8\cos(kh) + 6}{h^4} a_n \exp(ikx_j) \\
&= \frac{2(1 - 2\sin^2(kh)) - 8(1 - 2\sin^2(\frac{kh}{2})) + 6}{h^4} a_n \exp(ikx_j) \\
&= \frac{-16\sin^2(\frac{kh}{2})\cos^2(\frac{kh}{2}) + 16\sin^2(\frac{kh}{2})}{h^4} a_n \exp(ikx_j) \\
&= \frac{16}{h^4}\sin^4(\frac{kh}{2}) a_n \exp(ikx_j)
\end{aligned}$$

Regroupons maintenant tous les termes :

$$a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n - c^4\frac{\tau^4}{12}\frac{16}{h^4}\sin^4(\frac{kh}{2})a_n + \frac{4c^2\tau^2}{3h^2}\sin^2(\frac{kh}{2})\left(3 + \sin^2(\frac{kh}{2})\right)a_n = 0$$

La suite a_n est donc une suite récurrente à deux termes d'équation caractéristique $x^2 - \mu x + 1 = 0$ avec $\mu = 2 + c^4\frac{4\tau^4}{3h^4}\sin^4(\frac{kh}{2}) - \frac{4c^2\tau^2}{3h^2}\sin^2(\frac{kh}{2})\left(3 + \sin^2(\frac{kh}{2})\right)$, comme précédemment pour la stabilité il faut $|\mu| \leq 2$ soit, pour $\mu \leq 2$ la condition $\frac{c^2\tau^2}{h^2} \leq 2$, et pour $\mu \geq -2$ la condition s'écrit $Y^2X^2 - YX + 3 \geq 0$ avec $Y = \frac{c^2\tau^2}{h^2}$ et $X = \sin^2(\frac{kh}{2})$ or ce trinôme, pour X fixé, n'a pas de racine réelle et est donc bien positif pour tout Y, la condition $\mu \geq -2$ est donc vérifiée. En conclusion le schéma (3) est stable sous la condition $\dfrac{c\tau}{h} \leq \sqrt{2}$.