Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2012-2013
MACS - 1
C. Basdevant

Examen d'Analyse Numérique du 25 juin 2013

Durée : 3h

Une unique feuille recto-verso de notes personnelles est autorisée. Les téléphones portables et calculatrices ne sont pas autorisés

Question de cours

On considère, pour calculer les solutions de l'équation de transport sur toute la droite réelle, le schéma d'Euler explicite, démontrez de deux manières différentes que ce schéma est inconditionnellement instable.

Problème

On considère l'équation de la chaleur sur $[0,1]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \forall x \in]0,1[\quad , \quad \forall t > 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in]0,1[$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad \forall t \geq 0$$

et on étudiera dans la suite plusieurs schémas de différences finies sur un maillage régulier de pas $h = \frac{1}{(N+1)}$ en espace et Δt en temps, avec $u_j^n \approx u(jh, n\Delta t)$.

Il est très fortement recommandé de lire l'énoncé du problème jusqu'à la fin avant d'en aborder la résolution.

1. Analysez l'ordre, la stabilité et la convergence du schéma suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0 \tag{2}$$

2. Analysez l'ordre, la stabilité et la convergence du schéma suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0 \tag{3}$$

3. On considère dans cette question le schéma "prédicteur-correcteur" :

$$\frac{u_j^{2n+1} - u_j^{2n}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{2n+1} - 2u_j^{2n+1} + u_{j-1}^{2n+1}}{h^2} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{u_j^{2n+2} - u_j^{2n+1}}{\Delta t} - \nu \frac{u_{j+1}^{2n+1} - 2u_j^{2n+1} + u_{j-1}^{2n+1}}{h^2} = 0 \tag{5}$$

   (a) Analysez la stabilité de ce schéma.

(b) En notant U_h^n le vecteur des inconnues u_j^n pour $1 \leq j \leq N$, écrire le schéma sous la forme vectorielle :

$$\begin{aligned} A_h U_h^{2n+1} &= U_h^{2n} \\ U_h^{2n+2} &= B_h U_h^{2n+1} \end{aligned}$$

avec A_h et B_h des matrices à définir.

(c) Montrez que $\|A_h^{-1}\| \leq 1$ et $\|B_h\| \leq \max\{1, |1 - \frac{4\nu\Delta t}{h^2}|\}$ pour une norme à définir. *Note : on rappelle que les valeurs propres de la matrice $N \times N$ tridiagonale M telle que $M_{i,i} = 2$ et $M_{i-1,i} = M_{i,i+1} = -1$ sont $\lambda_k = 4\sin^2 \frac{k\pi}{N+1}$ pour $1 \leq k \leq N$.*

(d) On note $U_h(t_n)$ le vecteur des $u(x_j, t_n)$ pour $1 \leq j \leq N$, avec $u(x,t)$ solution régulière de l'équation. Démontrez que

$$A_h U_h(t_{2n+1}) = U_h(t_{2n}) + \Delta t\, O(\Delta t, h^2)$$

(e) On note U_h^{2n+1*} la solution de $A_h U_h^{2n+1*} = U_h(t_{2n})$.
Démontrez alors la majoration :

$$\|U_h(t_{2n+1}) - U_h^{2n+1*}\| \leq \Delta t\, O(\Delta t, h^2)$$

(f) On définit E_2 par :

$$U_h(t_{2n+2}) = B_h U_h(t_{2n+1}) + \Delta t E_2$$

Expliquez ce que représente E_2 et donnez en une majoration.

(g) On définit E_1 par

$$U_h(t_{2n+2}) = B_h U_h^{2n+1*} + \Delta t E_1$$

Expliquez ce que représente E_1.

(h) Déduisez des questions précédentes l'ordre du schéma.