Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2012-2013
MACS - 1
C. Basdevant

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique du 4 septembre 2013

Durée : 2h
Aucun document autorisé.

Question de cours

On considère, pour calculer les solutions de l'équation de transport sur toute la droite réelle, le schéma d'Euler explicite, démontrez de deux manières différentes (Von Neumann et Energie) que ce schéma est inconditionnellement instable.

Problème

On considère, pour l'équation de la chaleur sur tout $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \qquad \forall t > 0$$
$$u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

le schéma d'approximation par différences finies sur un maillage régulier de pas h en espace et Δt en temps :

$$\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + A_h u_h^n = 0$$

où l'opérateur A_h est défini par :

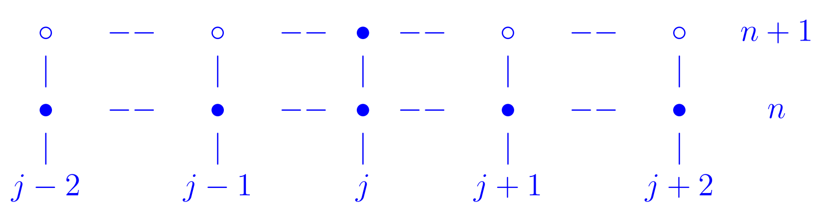
$$(A_h v_h)_j = -\frac{4}{3}\frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} + \frac{1}{3}\frac{v_{j+2} - 2v_j + v_{j-2}}{(2h)^2} - \frac{\Delta t}{2}\frac{v_{j+2} - 4v_{j+1} + 6v_j - 4v_{j-1} + v_{j-2}}{h^4}$$

1. Dessinez le stencil du schéma, de quel type de schéma s'agit-il ? Ecrivez le schéma sous la forme :

$$u_j^{n+1} = \alpha_0 u_j^n + \alpha_1 (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \alpha_2 (u_{j+2}^n + u_{j-2}^n)$$

Note on pourra poser $\beta = \frac{\Delta t}{h^2}$.

Corrigé :



Le schéma est explicite.
Le schéma s'écrit comme indiqué avec :

$$\alpha_0 = 1 - \frac{5}{2}\beta + 3\beta^2 \quad \alpha_1 = \frac{4}{3}\beta - 2\beta^2 \quad \alpha_2 = -\frac{1}{12}\beta + \frac{1}{2}\beta^2$$

2. A quelle condition ce schéma conserve-t-il la positivité ?

   Corrigé : On vérifie que $\alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1$. Le schéma conserve la positivité si et seulement si ces trois coefficients sont positifs ou nuls. On vérifie que α_0 est positif quel que soit β, α_1 est positif pour $\beta \leq \frac{2}{3}$ et α_2 pour $\beta \geq \frac{1}{6}$. Conclusion le schéma conserve la positivité pour :
$$\frac{1}{6} \leq \frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{2}{3}$$

3. Trouvez par une analyse de Von Neumann la CNS de stabilité du schéma. Note : pour la discussion on pourra poser $Y = 1 - \cos(kh) \in [0, 2]$.

   Corrigé : Cherchons une solution du schéma onde pure c'est à dire de la forme $u_j^n = a_n \exp(ikx_j)$, on obtient alors, après simplification par $\exp(ikx_j)$:
$$a_{n+1} = \alpha_0 a_n + \alpha_1 a_n \left(\exp(ikh) + \exp(-ikh)\right) + \alpha_2 a_n \left(\exp(2ikh) + \exp(-2ikh)\right)$$
   et donc le coefficient d'amplification qui doit rester de module inférieur ou égal à 1 pour la stabilité s'écrit :
$$g_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha_0 + 2\alpha_1 \cos(kh) + 2\alpha_2 \cos(2kh)$$
   Soit en posant $Y = 1 - \cos(kh) \in [0, 2]$, avec $\cos(2kh) = 2(1 - Y)^2 - 1$ et en tenant compte de $\alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1$, on obtient :
$$g_n = 1 - 2\alpha_1 Y + 2\alpha_2(-4Y + 2Y^2) = 1 - 2\beta Y + (2\beta^2 - \frac{\beta}{3})Y^2$$

   - Pour la condition $g_n \leq 1$ il faut avoir $\left((2\beta^2 - \frac{\beta}{3})Y - 2\beta\right) Y \leq 0$ pour $Y \in [0, 2]$, soit $(2\beta^2 - \frac{\beta}{3})Y \leq 2\beta$ ou encore $(\beta - \frac{1}{6})Y \leq 1$.
     - Si $\beta \leq \frac{1}{6}$ la condition est réalisée.
     - Par contre si $\beta > \frac{1}{6}$ alors le maximum est obtenu pour $Y = 2$ ce qui donne la condition $\beta \leq \frac{2}{3}$.

   - Pour la condition $g_n \geq -1$ il faut avoir $f(Y) = (2\beta^2 - \frac{\beta}{3})Y^2 - 2\beta Y + 2 \geq 0$ pour $Y \in [0, 2]$ or $f'(Y) = 2(2\beta^2 - \frac{\beta}{3})Y - 2\beta$ et $f'(0) = -2\beta$, $f'(2) = 8\beta(\beta - \frac{5}{12})$.
     - Si $\beta \leq \frac{5}{12}$, $f'(0)$ et $f'(2)$ étant négatifs, $f'(Y)$ est négatif entre 0 et 2, $f(Y)$ est décroissant dans cet intervalle, il faut donc vérifier $f(2) \geq 0$ soit $\beta^2 - \frac{2}{3}\beta + 1 \geq 0$ ce qui est toujours vrai.
     - Si $\beta > \frac{5}{12}$, $f'(0) < 0$ et $f'(2) > 0$, le minimum de $f(Y)$ est atteint pour $Y_0 = \frac{3}{6\beta - 1}$ et il faut vérifier $f(Y_0) \geq 0$ ce qui donne après calculs $\frac{9\beta - 2}{6\beta - 1} \geq 0$ ce qui est vrai pour ces valeurs de β.
   - Conclusion la condition nécessaire et suffisante de stabilité est $\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{2}{3}$.

4. Quel est l'ordre du schéma ? Indication : on poussera les développements limités à l'ordre 3 en temps et 6 en espace.

   Corrigé : Pour évaluer l'ordre on doit faire le développement de l'erreur locale de troncature ε_j^n qui est définie par :
$$\Delta t\, \varepsilon_j^n = u(x_j, t_{n+1}) - \alpha_0 u(x_j, t_n) - \alpha_1(u(x_{j+1}, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)) - \alpha_2(u(x_{j+2}, t_n) + u(x_{j+2}, t_n))$$

Le schéma étant manifestement écrit au temps t_n et au point x_j, faisons des développements limités autour de ces valeurs.

$$\begin{aligned}
u(x_j,t_{n+1}) =& u(x_j,t_n) + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j,t_n) + o(\Delta t^3)\\
u(x_{j+1},t_n) =& u(x_j,t_n) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_n) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t_n) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_n)\\
&+ \frac{h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_j,t_n) + \frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n) + o(h^6)\\
u(x_{j-1},t_n) =& u(x_j,t_n) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_n) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t_n) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_n)\\
&- \frac{h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_j,t_n) + \frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n) + o(h^6)\\
u(x_{j+2},t_n) =& u(x_j,t_n) + 2h\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_n) + \frac{4h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) + \frac{8h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t_n) + \frac{16h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_n)\\
&+ \frac{32h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_j,t_n) + \frac{64h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n) + o(h^6)\\
u(x_{j-2},t_n) =& u(x_j,t_n) - 2h\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_n) + \frac{4h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) - \frac{8h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t_n) + \frac{16h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_n)\\
&- \frac{32h^5}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_j,t_n) + \frac{64h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n) + o(h^6)
\end{aligned}$$

Ce qui donne en combinant ces développements :

$$\begin{aligned}
\Delta t\,\varepsilon_j^n =& \Delta t\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j,t_n) + o(\Delta t^3)\\
&+ u(x_j,t_n)(1-\alpha_0-2\alpha_1-2\alpha_2) - \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n)(2\alpha_1+8\alpha_2)\\
&- \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_n)(2\alpha_1+32\alpha_2) - \frac{h^6}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n)(2\alpha_1+128\alpha_2)\\
&+ (\alpha_1+\alpha_2)\,o(h^6)
\end{aligned}$$

Mais $(1-\alpha_0-2\alpha 1-2\alpha_2)=0$, $\frac{h^2}{2}(2\alpha_1+8\alpha_2)=\Delta t$, $\frac{h^4}{24}(2\alpha_1+32\alpha_2)=\frac{\Delta t^2}{2}$, $\frac{h^6}{720}(2\alpha_1+128\alpha_2)=h^6(\frac{\beta^2}{12}-\frac{\beta}{90})$, $(\alpha_1+\alpha_2)o(h^6)=\Delta t\,o(h^4)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta t\,\varepsilon_j^n =& \Delta t(\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n)) + \frac{\Delta t^2}{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t_n) - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j,t_n))\\
&+ \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j,t_n) + o(\Delta t^3) + h^6(\frac{\beta}{90}-\frac{\beta^2}{12})\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n) + \Delta t\,o(h^4)
\end{aligned}$$

Mais $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ entraîne $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ et $\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3}=\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^6}$, il reste donc :

$$\begin{aligned}
\Delta t\,\varepsilon_j^n =& (\frac{\Delta t^3}{6} + \frac{\Delta t\,h^4}{90} - \frac{\Delta t^2 h^2}{12})\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n) + o(\Delta t^3) + \Delta t\,o(h^4)\\
\varepsilon_j^n =& (\frac{\Delta t^2}{6} + \frac{h^4}{90} - \frac{\Delta t\,h^2}{12})\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_j,t_n) + o(\Delta t^2) + o(h^4)
\end{aligned}$$

Mais $2\Delta t\,h^2 \le \Delta t^2 + h^4$ et donc ε_j^n est en $O(\Delta t^2+h^4)$, le schéma est d'ordre 2 en temps et 4 en espace.