Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2007-2008
MACS 3 & M2 Math-Info
C. Basdevant

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique
du lundi 7 janvier 2008

Durée : 1h
Aucun document n'est autorisé

Problème

On considère un pendule, dont le mouvement autour de la verticale dans un plan est décrit par l'angle $\theta(t)$. En supposant que l'angle reste faible ($\sin(\theta) \approx \theta$), on peut utiliser le modèle linéarisé :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + k\theta = u \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = \theta_1 \end{cases}$$

avec $k > 0$. La fonction scalaire $u(t)$ représente la commande du système qui est assujettie à la contrainte $\boldsymbol{0 \leq u(t) \leq 1}\ \forall \boldsymbol{t}$.
On cherche à trouver la commande u qui ramène le pendule à sa position d'équilibre ($\theta(T) = 0$, $\dot{\theta}(T) = 0$) en temps minimum.

1. Déterminez la loi de commande optimale et en particulier la courbe de commutation.
2. Donnez une estimation du temps de retour à l'équilibre pour un départ loin de l'origine dans l'espace des phases.

Corrigé : Posons $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$, on se ramène alors au problème de contrôle en temps minimal :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = u - kx_1 \end{cases}$$

avec $0 \leq u \leq 1$, $J(u) = \int_0^T 1dt$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

Le Hamiltonien s'écrit $H(x_1, x_2, p_1, p_2, u) = 1 + p_1 x_2 + p_2(u - kx_1)$, l'équation de l'état adjoint (p_1, p_2) est :

$$\begin{cases} \dot{p_1} = kp_2 \\ \dot{p_2} = -p_1 \end{cases}$$

d'où l'on tire $\ddot{p_1} = -kp_1$ puis :

$$\begin{cases} p_1 = \alpha \sin(\sqrt{k}t + \phi) \\ p_2 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{k}} \cos(\sqrt{k}t + \phi) \end{cases}$$

avec α et ϕ des constantes. Les conditions de transversalité en T, avec $\eta = 0$ (la position est fixée) et τ quelconque (le temps est libre) donnent $H(T) = 0$ soit $1 + p_2(T)u(T) = 0$. Le principe du minimum de Pontryaguin nous dit que la commande optimale minimise à

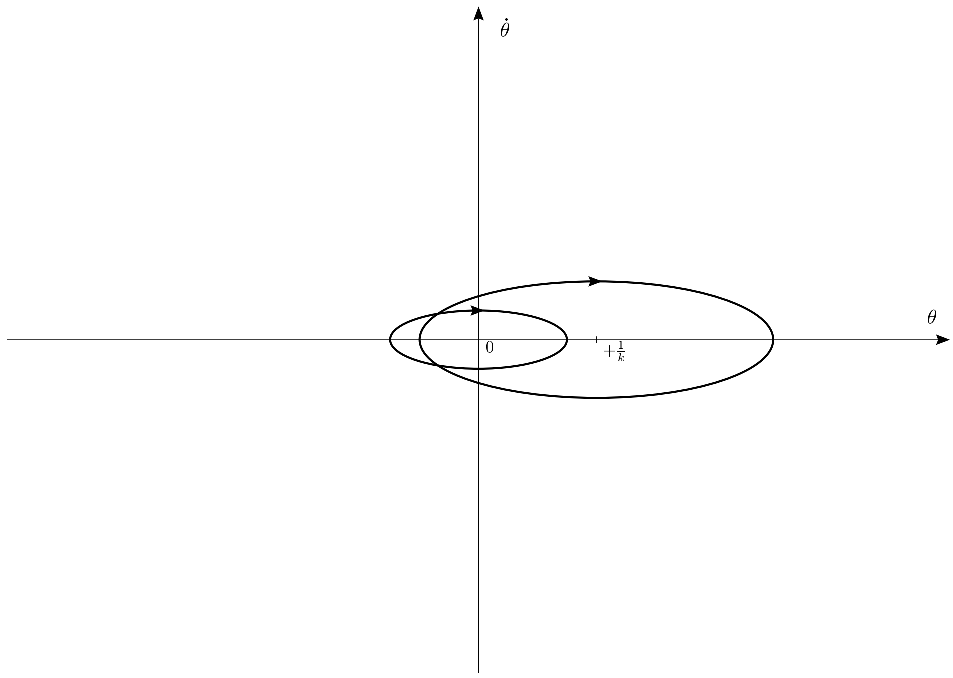

Fig. 1 – Trajectoires à commande constante dans l'espace des phases

tout instant le Hamiltonien, on en déduit que

$$\begin{cases} u_* = 0 & \text{si} \quad p_2 > 0 \\ u_* = 1 & \text{si} \quad p_2 < 0 \end{cases}$$

la commande est donc bien bang-bang. D'après son expression trouvée plus haut p_2 change de signe avec une période de $\pi/\sqrt{k}$, l'intervalle entre deux commutations successives est donc de $\pi/\sqrt{k}$.

Pour étudier les trajectoires à commande constante u_c dans l'espace des phases $(\theta, \dot{\theta})$ posons $y_1 = x_1 - u_c/k$ et $y_2 = x_2$ ce qui donne le système

$$\begin{cases} \dot{y_1} = y_2 \\ \dot{y_2} = -ky_1 \end{cases}$$

d'où l'on tire $ky_1\dot{y_1} + y_2\dot{y_2} = 0$ et donc $ky_1^2 + y_2^2 =$ constante, ce qui prouve que les trajectoires dans l'espace des phases sont des ellipses, centrées en $(u_c/k, 0)$, le rapport entre les deux demi-axes étant $a/b = 1/\sqrt{k}$. y_1 étant croissant quand y_2 est positif, on en déduit que ces ellipses sont parcourues dans le sens des aiguilles d'une montre (voir figure 1). De l'équation $\ddot{y_1} = -ky_1$ on déduit qu'on fait un tour d'ellipse en un temps $2\pi/\sqrt{k}$, et donc qu'entre deux commutations on n'en fait qu'un demi-tour.

La seule trajectoire de l'espace des phases qui atteint la cible $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ est la demi-ellipse de centre $(1/k, 0)$ et de demi-axes $a = 1/k$ et $b = 1/\sqrt{k}$, indiquée sur la figure 2. Ce n'est qu'une demi-ellipse car on n'a pu y rester au maximum que le temps $\pi/\sqrt{k}$ et

donc au maximum un demi-tour.
Remontons maintenant dans le temps une longue trajectoire arrivant sur la cible (voir

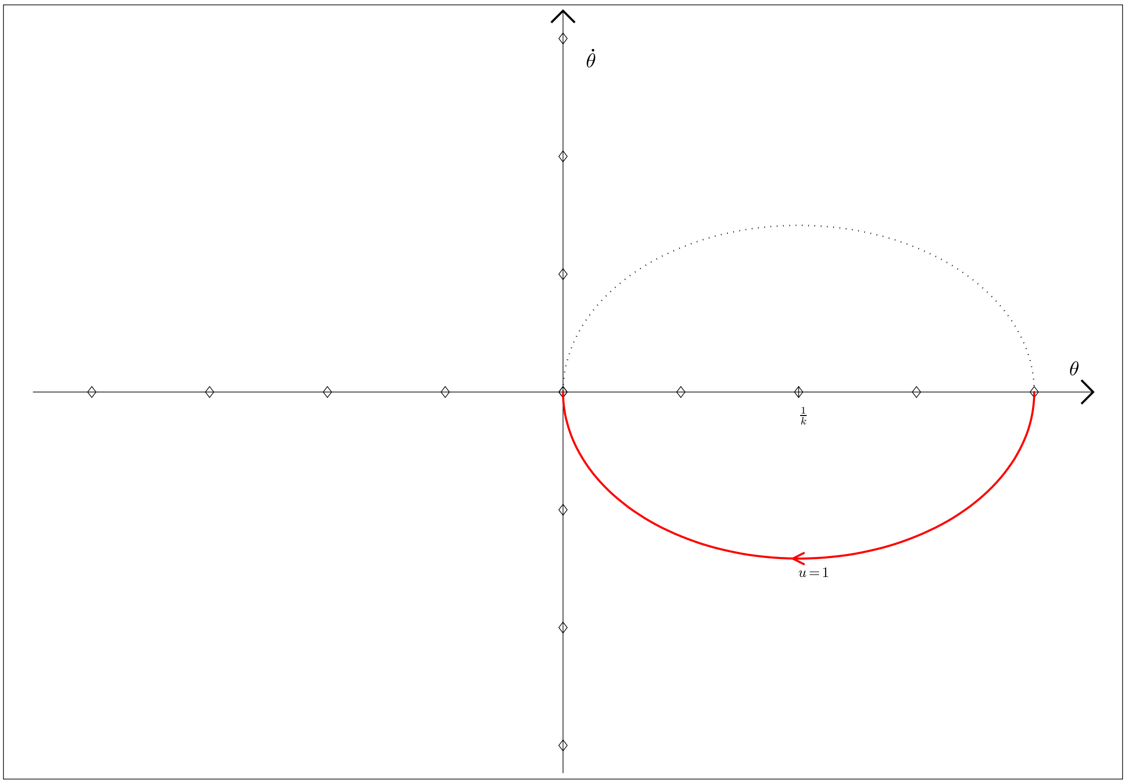

FIG. 2 – L'unique trajectoire atteignant la cible sans commutation ($k = 0.5$)

figure 3). La dernière commutation s'est produite en un point quelconque A_1 de la demi-ellipse de centre $(1/k, 0)$, de demi-axes $1/k$ et $1/\sqrt{k}$, située sous l'axe $\dot\theta = 0$, la portion de trajectoire menant à la cible étant faite avec la commande $u_* = 1$. La portion précédente de trajectoire devait être avec l'autre commande, soit $u_* = 0$, et est donc constituée de la demi-ellipse centrée à l'origine, de même rapport a/b et passant par A_1 . L'avant dernière commutation s'est donc produite au point A_2 symétrique de A_1 dans la symétrie de centre $(0, 0)$. La portion encore précédente de trajectoire était avec $u_* = 1$, et donc une demi-ellipse de centre $(1/k, 0)$, de rapport entre les deux demi-axes $a/b = 1/\sqrt{k}$, passant par A_2 et arrivant au point A_3 symétrique de A_2 par rapport à $(1/k, 0)$ et lieu de l'ante-pénultième commutation, ... et ainsi de suite.
Les points de dernière commutation, passant de la commande $u_* = 0$ à $u_* = 1$, sont sur la demi-ellipse de centre $(1/k, 0)$, de demi-axes $1/k$ et $1/\sqrt{k}$, située sous l'axe. Les points d'avant dernière commutation se déduisent des précédents par la symétrie de centre $(0, 0)$, ils sont donc sur la demi-ellipse de centre $(-1/k, 0)$ et de demi-axes $1/k$ et $1/\sqrt{k}$ située au-dessus de l'axe $\dot\theta = 0$. Les points d'avant avant dernière commutation se déduisent des précédents par la symétrie de centre $(1/k, 0)$, ils sont donc sur la demi-ellipse de centre $(+3/k, 0)$, semblable aux autres, et sous l'axe et ainsi de suite, la suivante étant centrée en $(-3/k, 0)$ et située au-dessus de l'axe. On en déduit que la courbe de commutation, lieu les points de commutation, est la courbe formée des demi-ellipses de demi-axes $1/k$ et $1/\sqrt{k}$, de centres $((2n + 1)/k, 0)$, $n \geq 0$, situées sous l'axe $\dot\theta = 0$, ainsi que des demi-ellipses symétriques par rapport à l'origine, c'est à dire de demi-axes $1/k$ et $1/\sqrt{k}$, de centres $((-2n - 1)/k, 0)$, $n \geq 0$, situées au-dessus de l'axe $\dot\theta = 0$.

En conclusion ceci montre que la loi de feedback consiste à prendre $u_* = 0$ si l'état du système est au-dessus de la courbe de commutation et prendre $u_* = +1$ en-dessous.

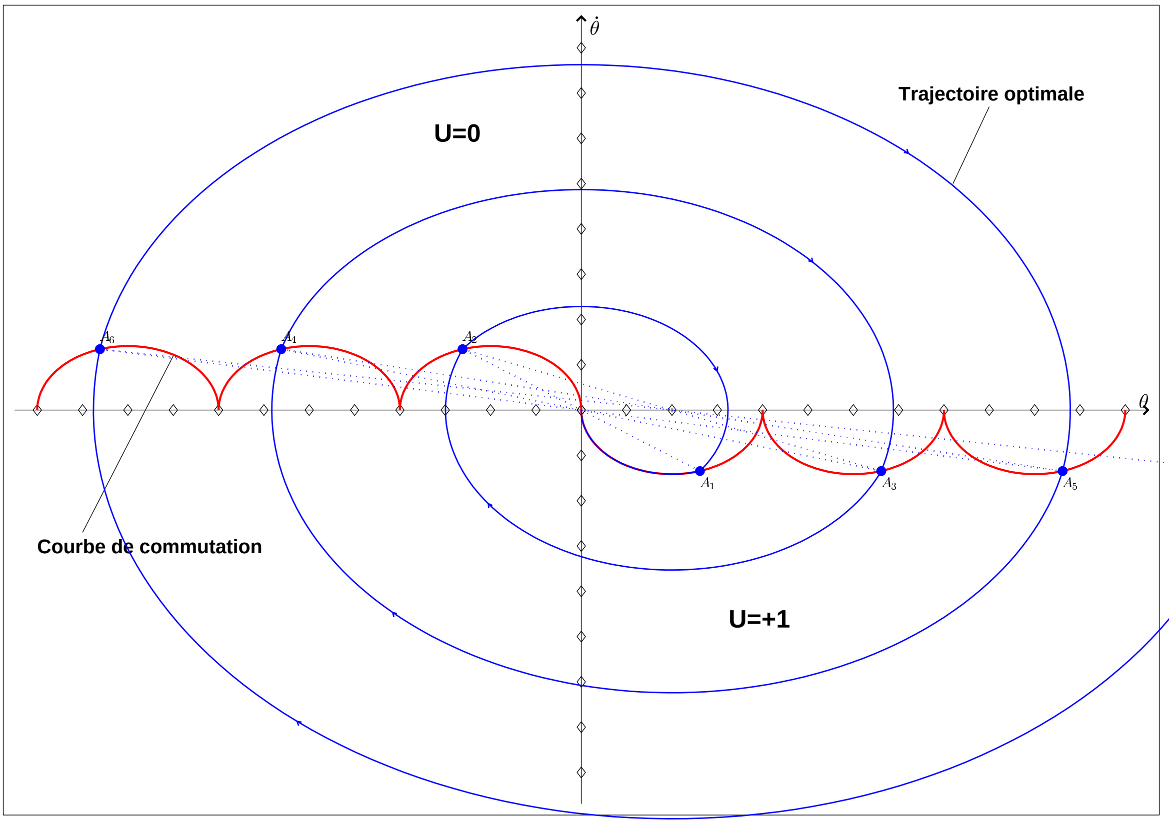

FIG. 3 – Courbe de commutation et exemple de trajectoire optimale ($k = 0.5$)

Considérons maintenant un état initial $(\theta_0, \dot\theta_0)$ et supposons pour fixer les idées $\dot\theta_0 \gg 1/\sqrt{k}$. Sa première commande est donc $u_* = 0$ et le point se déplace dans l'espace des phases sur l'ellipse centrée à l'origine d'équation :

$$\begin{cases} \theta = \rho\cos(\phi) \\ \dot\theta = \sqrt{k}\rho\sin(\phi) \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \rho = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{1}{k}\dot\theta_0^2}$$

et la première commutation, après un temps inférieur ou égal à $\pi/\sqrt{k}$, sera pour une valeur

$$\theta_1 \approx \sqrt{\theta_0^2 + \frac{1}{k}\dot\theta_0^2}$$

au-delà, chaque couple de commandes $u_* = 1$, $u_* = 0$ rapprochera de l'origine ce point de commutation d'une distance $\Delta\theta = 2/k$ (voir figure 3). Un couple de commande durant $2\pi/\sqrt{k}$, le temps de retour à l'origine est donc :

$$T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{k}}\left(\frac{k}{2}\sqrt{\theta_0^2 + \frac{1}{k}\dot\theta_0^2} + \frac{1}{2}\right)$$