Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2011-2012
MACS 3
C. Basdevant

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique
du mercredi 9 novembre 2011

Durée : 3 h
Aucun document autorisé

Problème I - Stabilisation du pendule inversé

On considère le système dynamique :

$$\ddot{x}(t) = x(t) - u(t)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}$ est l'état du système et $u(t) \in [-1, 1]$ le contrôle. On veut déterminer la commande optimale pour un retour à l'équilibre $(x(T) = 0, \dot{x}(T) = 0)$ en temps minimum.

1. En posant $z = x + \dot{x}$ et en formant l'équation d'évolution de z^2, montrez que l'équilibre n'est pas atteignable si $|z(0)| > 1$.

   Corrigé : Un calcul simple donne $\dot{z} = z - u$, et donc $\frac{dz^2}{dt} = 2(z^2 - uz)$, ce qui prouve que si $|z| > 1$, z^2 est croissant et donc l'état du système ne peut pas retourner à l'origine.

2. Pour $|z(0)| < 1$ déterminez la commande optimale en fonction de l'état initial $(x(0), \dot{x}(0))$ du système. Vous utiliserez le principe du minimum de Pontriagine. Vous montrerez que la commande optimale est bang-bang puis que pour une commande constante les trajectoires dans l'espace des phases sont des hyperboles d'asymptotes fixes. Vous donnerez en particulier l'équation de la courbe de commutation.

   Corrigé : Posons $Y = (x, \dot{x})$, le système dynamique s'écrit alors $\dot{Y} = (Y_2, Y_1 - u)$ et le critère à minimiser $J(u) = \int_0^T 1dt$. Le hamiltonien est $H = 1 + p_1 Y_2 + p_2(Y_1 - u)$. L'équation de l'état adjoint $\dot{p} = (-p_2, -p_1)$, conduit à $\ddot{p}_2 = p_2$ et $p_2(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t}$. La condition de transversalité au temps final ($\eta = 0, \tau$ quelconque) donne $H(T) = 0$, et le temps n'intervenant pas $H(t) = 0$, $\forall t$. La commande optimale minimisant le hamiltonien à tout instant on obtient $u(t) = \text{signe}(p_2(t))$. Comme p_2 s'annule au plus une fois, on en déduit qu'une commande optimale est bang-bang avec au plus une commutation.
   Etudions alors les trajectoires dans l'espace des phases (Y_1, Y_2) pour une commande constante. Du système dynamique on obtient $Y_2\dot{Y}_2 = (Y_1 - u)\dot{Y}_1$ et donc $Y_2^2 - (Y_1 - u)^2 = C$ avec C une constante arbitraire. Les trajectoires dans l'espace des phases sont donc des hyperboles de centre $(u, 0)$, d'asymptotes $Y_2^2 = (Y_1 - u)^2$ et d'axe $Y_2 = 0$ si $C < 0$ et $Y_1 = u$ si $C > 0$, comme représentées sur la figure 1. Le sens de parcours se déduit de l'équation $\dot{Y}_1 = Y_2$: Y_1 est croissant quand Y_2 est positif. On peut alors vérifier graphiquement le résultat de la première question : si $|Y1 + Y2| > 1$ il est impossible de retourner à l'origine, les deux trajectoires passant par un tel point emmènent à l'infini.
   La courbe de commutation est formée des deux portions d'hyperboles correspondant

aux deux commandes en butée et arrivant à l'origine, soit $(Y_1 - u)^2 - Y_2^2 = u^2$, avec $Y_2 > 0$ pour $u = +1$ et $Y_2 < 0$ pour $u = -1$. La commande optimale est alors $u = -1$ pour les points situés sous la courbe de commutation (et vérifiant $|Y1 + Y2| < 1$) et $u = +1$ au-dessus (voir la figure 2).

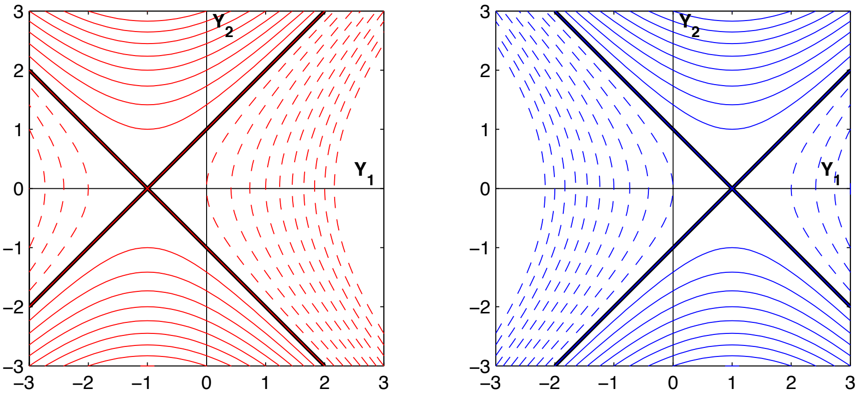

FIG. 1 – Trajectoires à commande en butée dans l'espace des phases, à gauche pour $u = -1$, à droite pour $u = +1$. Elles sont parcourues avec Y_1 croissant pour Y_2 positif et Y_1 décroissant pour Y_2 négatif. Les courbes en trait plein correspondent à des constantes C positives, les courbes en tirets à C négatif.

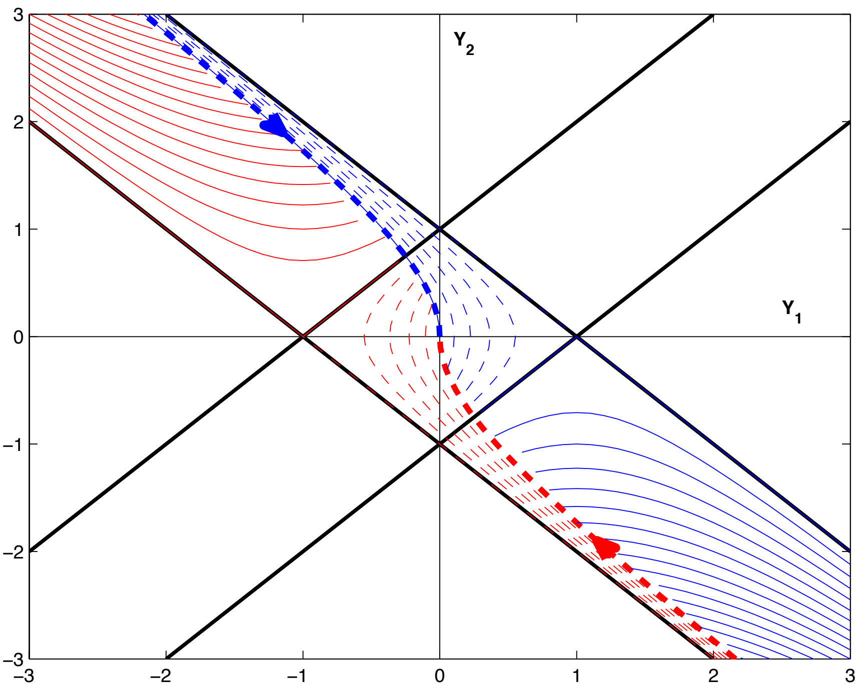

FIG. 2 – Trajectoires de commandes optimales dans l'espace des phases, en bleu pour $u = +1$, et rouge pour $u = -1$. Elles sont parcourues avec Y_1 croissant pour Y_2 positif et Y_1 décroissant pour Y_2 négatif. La courbe de commutation, trajectoire finale, est tracée en tirets épais.

Problème II - Orbite maximale de transfert

L'exemple exposé ci-dessous est extrait du livre "Applied optimal control : optimization, estimation, and control ", de A.E. Bryson et Yu-Chi Ho.

1. Il vous est demandé d'analyser cet exemple en détail et d'expliquer les différentes étapes de la résolution du problème de contrôle qu'il propose. En particulier, vous expliquerez d'où proviennent et ce que signifient les équations (2.5.13) à (2.5.24), ce que sont les quantités $H, \Phi, \lambda_r, \lambda_u, \lambda_v, \nu_1, \nu_2$.
   Notes : Il n'est pas demandé de justifier les équations (2.5.10) à (2.5.12). Les conditions (2.5.5), (2.5.6) et (2.5.9) auxquelles il est fait référence sont des relations classiques vues en cours.

   Corrigé :
   - L'état du système est défini par le triplet (r, u, v) et le contrôle par l'angle ϕ. L'équation d'état est donnée par (2.5.10) à (2.5.12).
   - Les relations (2.5.13) à (2.5.15) définissent l'état initial, orbite circulaire de rayon r_0, vitesse radiale nulle, vitesse tangentielle donnée par la loi de gravitation universelle..
   - Les relations (2.5.16) et (2.5.17) imposent que l'état final soit en orbite circulaire, le rayon final $r(t_f)$ devant être maximisé au bout du temps t_f fixé.
   - Les conditions finales (2.5.16) et (2.5.17) sont pénalisées au moyen de deux multiplicateurs ν_1 et ν_2 dans le critère Φ à maximiser, qui est donc un critère portant uniquement sur l'état final.

– La quantité notée H est le hamiltonien classique avec comme état adjoint le triplet $(\lambda_r, \lambda_u, \lambda_v)$
– Les équations (2.5.18) à (2.5.20) sont alors les équations d'évolution de l'état adjoint, obtenues par la formule classique $\dot{p} = -H_y$.
– La relation (2.5.21) exprime que le contrôle optimal maximise à tout instant le hamiltonien et donc ici que $\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$.
– Les équations (2.5.22) à (2.5.24) sont les conditions de transversalité à l'instant final. Les conditions finales sur u et v ayant été pénalisées dans Φ, les trois composantes de l'état du système sont libres à t_f, soit (η_r, η_u, η_v) quelconques et $\tau = 0$. La condition de transversalité s'écrivant

$$\lambda_r(t_f)\eta_r + \lambda_u(t_f)\eta_u + \lambda_v(t_f)\eta_v = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\eta_r + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\eta_u + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\eta_v$$

on en déduit :

$$\lambda_r(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \lambda_u(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \lambda_v(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

Ce qui correspond bien aux équations en question.

2. Montrez qu'une autre formulation consiste à prendre pour définition de Φ l'équation $\Phi = r(t_f)$, les relations (2.5.22) à (2.5.24) étant alors remplacées par l'équation :

$$\lambda_r(t_f) - \lambda_v(t_f)\frac{v(t_f)}{2r(t_f)} = 1$$

Corrigé : Dans cette autre formulation on maximise $r(t_f)$ sans pénaliser les contraintes finales (2.5.16) et (2.5.17). La cible est alors définie par : $r(t_f)$ libre, $u(t_f) = 0$ et $v^2(t_f)r(t_f) = \mu$ (voir (2.5.16) et (2.5.17)). Ce qui donne pour les conditions de transversalité finales $\eta_u = 0$ et η_r et η_v liés par $2v(t_f)r(t_f)\eta_v + v^2(t_f)\eta_r = 0$. Avec la condition de transversalité qui se réduit à $\lambda_r(t_f)\eta_r + \lambda_v(t_f)\eta_v = \eta_r$ on obtient la condition indiquée en éliminant η_v et en prenant η_r arbitraire.

lem with q parameters ν to be found in (2.5.8) so that the q side conditions (2.5.9) are satisfied.

Example. *Maximum radius orbit transfer in a given time.* Given a constant-thrust rocket engine, T = thrust, operating for a given length of time, t_f, we wish to find the thrust-direction history, $\phi(t)$, to transfer a rocket vehicle from a given initial circular orbit to the largest possible circular orbit. The nomenclature is defined in Figure 2.5.1, below.

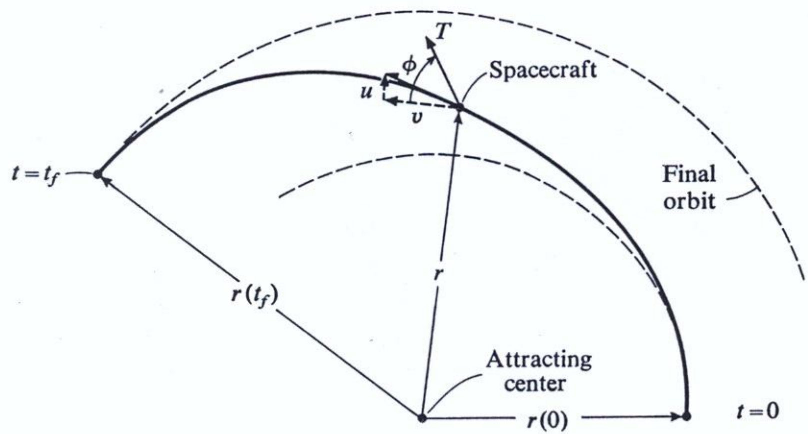

Figure 2.5.1. Maximum radius orbit transfer in a given time (or minimum time for a given final radius).

r = radial distance of spacecraft from attracting center
u = radial component of velocity
v = tangential component of velocity
m = mass of spacecraft, $\dot{m}$ = fuel consumption rate (constant)
ϕ = thrust direction angle
μ = gravitational constant of attracting center

Using this nomenclature, the problem may be stated as:
Find $\phi(t)$ to maximize $r(t_f)$ subject to

$$\dot{r} = u\,, \tag{2.5.10}$$

$$\dot{u} = \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T\sin\phi}{m_o - |\dot{m}|t}\,, \tag{2.5.11}$$

$$\dot{v} = -\frac{uv}{r} + \frac{T\cos\phi}{m_o - |\dot{m}|t}\,, \tag{2.5.12}$$

and

$$r(0) = r_o\,, \tag{2.5.13}$$

$$u(0) = 0\,, \tag{2.5.14}$$

$$v(0) = \sqrt{\frac{\mu}{r_o}}\,, \tag{2.5.15}$$

$$\psi_1 = u(t_f) = 0\,, \tag{2.5.16}$$

$$\psi_2 = v(t_f) - \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}} = 0\,. \tag{2.5.17}$$

The Hamiltonian is, therefore,

$$H = \lambda_r u + \lambda_u\left(\frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T\sin\phi}{m_o - |\dot{m}|t}\right) + \lambda_v\left(-\frac{uv}{r} + \frac{T\cos\phi}{m_o - |\dot{m}|t}\right)$$

and

$$\Phi = r(t_f) + \nu_1 u(t_f) + \nu_2\left[v(t_f) - \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}}\right].$$

Thus, the necessary conditions (2.5.5), (2.5.6), and (2.5.9) become

$$\dot{\lambda}_r = -\lambda_u\left(-\frac{v^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r^3}\right) - \lambda_v\left(\frac{uv}{r^2}\right), \tag{2.5.18}$$

$$\dot{\lambda}_u = -\lambda_r + \lambda_v\frac{v}{r}\,, \tag{2.5.19}$$

$$\dot{\lambda}_v = -\lambda_u\frac{2v}{r} + \lambda_v\frac{u}{r}\,, \tag{2.5.20}$$

$$0 = (\lambda_u \cos\phi - \lambda_v \sin\phi)\frac{T}{m_o - |\dot{m}|t} \Rightarrow \tan\phi = \frac{\lambda_u}{\lambda_v}, \qquad (2.5.21)$$

$$\lambda_r(t_f) = 1 + \frac{\nu_2\sqrt{\mu}}{2[r(t_f)]^{3/2}}, \qquad (2.5.22)$$

$$\lambda_u(t_f) = \nu_1, \qquad (2.5.23)$$

$$\lambda_v(t_f) = \nu_2. \qquad (2.5.24)$$

The *six* differential equations (2.5.10), (2.5.11), (2.5.12), (2.5.18), (2.5.19), and (2.5.20) are to be solved subject to the *six* boundary conditions (2.5.13), (2.5.14), (2.5.15), (2.5.22), (2.5.23), and (2.5.24), with the choice of ν_1 and ν_2 available to satisfy the additional two boundary conditions (2.5.16) and (2.5.17). The control $\phi(t)$ is determined in terms of λ_u and λ_v from (2.5.21).

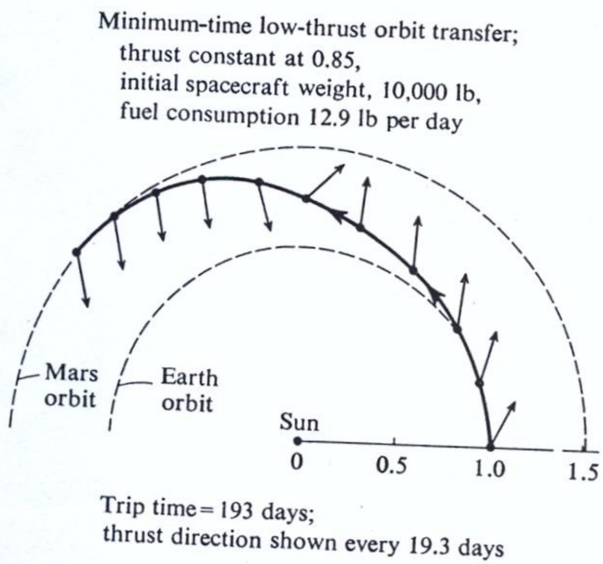

Figure 2.5.2. A particular minimum-time low-thrust orbit transfer path.

A numerical solution of this problem for

$$\frac{T/m_o}{\mu/r_o^2} = .1405, \qquad |\dot{m}|\sqrt{\mu/r_o}/T = 0.533, \qquad \frac{t_f}{\sqrt{r_o^3/\mu}} = 3.32$$

has been given by Kopp and McGill.† Interpreted for a 10,000-lb

†See A. V. Balakrishnan and L. W. Neustadt (eds.), *Computing Methods in Optimization Problems*. New York: Academic Press, 1964.

spacecraft moving out from the earth's orbit, the thrust would be 0.85 lb, the fuel consumption 12.9 lb/day, and the trip time 193 days. The optimal thrust direction and the resulting trajectory are shown in Figure 2.5.2. Note that the radial component of thrust is outward for the first half (roughly) of the flight, and inward for the second half.

2.6 Multistage systems: functions of the