Université Paris-Nord
Institut Galilée
Département de Mathématiques

Année 2013-2014
MACS 3
C. Basdevant

Corrigé de l'examen d'Analyse Numérique du mercredi 13 novembre 2013

Durée : 3 h
Une feuille recto de notes manuscrites personnelles est autorisée

Problème Paris-Tokyo

On s'intéresse à un trajet en fusée de Paris à Tokyo avec des accélérations limitées à $\pm M$ (avec $M = 3\,g$). On considèrera un vol purement rectiligne horizontal, pour une distance $L = 10000\,km$, pour lequel on contrôle la poussée u de la fusée pour passer de l'état $x(0) = v(0) = 0$ à l'état $x(T) = L$, $v(T) = 0$, les équations du mouvement étant :

$$\dot{x}(t) = v(t), \quad \dot{v}(t) = u(t), \quad \text{avec } |u(t)| \leq M$$

où $x(t)$ est la position, $v(t)$ la vitesse et $u(t)$ le contrôle.

1. Montrez que tout contrôle $u(t)$ menant de l'état initial à l'état final doit vérifier les relations suivantes :

$$\int_0^T u(t)dt = 0, \quad \int_0^T tu(t)dt = -L$$

Corrigé : La première relation découle de $0 = v(T) - v(0) = \int_0^T u(t)dt$, pour la deuxième on écrit $L = x(T) - x(0) = \int_0^T v(t)dt = \int_0^T dt \int_0^t u(\tau)d\tau$ et en permutant les signes somme $L = \int_0^T u(\tau)d\tau \int_\tau^T dt = \int_0^T u(\tau)(T-\tau)d\tau = -\int_0^T \tau u(\tau)d\tau$.

Première étude - trajet en temps minimum

2. On considère dans une première étude le voyage en temps minimum.
   (a) Donnez le hamiltonien associé au problème de contrôle optimal et les équations de l'état adjoint, discutez les conditions de transversalité.

   Corrigé : En prenant $J(u) = \int_0^T 1dt$, on a $H = 1 + p_1 v + p_2 u$ et $\dot{p_1} = 0$ et $\dot{p_2} = -p_1$. L'état final étant imposé on a $\eta = 0$, le temps final est libre donc τ est quelconque, d'où la condition de transversalité $H(T) = 0$, qui conduit à $H(t) = 0$, $\forall t$ puisque le problème est stationnaire.

   (b) Montrez, à l'aide du principe du minimum de Pontriaguine, que le contrôle optimal u est bang-bang avec au plus une commutation. En déduire que le temps minimum de trajet est $T_0 = 2\sqrt{L/M}$.

Corrigé : Le principe du minimum de Pontriaguine nous dit que le contrôle optimal minimise à tout instant le hamiltonien, c'est donc l'argument du minimum de $(p_2 u)$, pour $-M \leq u \leq M$ et donc $u = -M \, \mathrm{sign}(p_2)$, c'est donc bien une commande bang-bang. Mais p_2 étant linéaire en temps, il a au plus un changement de signe et donc il y a au plus une commutation. La solution évidente est qu'il faut accélérer au départ, soit $\ddot{x} = M$ pour $t \in [0, \tau[$, puis décélérer à l'arrivée, soit $\ddot{x} = -M$ pour $t \in [\tau, T[$. Comme $\int_0^T u(t)dt = 0$ on en déduit $\tau = T/2$. Il reste à raccorder ces solutions entre elles et avec les conditions aux limites (raccordement position et vitesse). Donc :

$$x(t) = \frac{1}{2}Mt^2, \ \forall t \in [0, \frac{T}{2}[, \qquad x(t) = -\frac{1}{2}Mt^2 + \alpha t + \beta, \ \forall t \in [\frac{T}{2}, T[$$

$$\frac{1}{2}M(\frac{T}{2})^2 = -\frac{1}{2}M(\frac{T}{2})^2 + \alpha\frac{T}{2} + \beta, \qquad M\frac{T}{2} = -M\frac{T}{2} + \alpha$$

$$L = -\frac{1}{2}MT^2 + \alpha T + \beta, \qquad 0 = -MT + \alpha$$

d'où l'on tire $L = \frac{1}{4}MT^2$ et donc $T = 2\sqrt{L/M} \approx 1825\,s$, un peu plus de 20 minutes. La vitesse maximale atteinte étant $v = \frac{1}{2}MT = \sqrt{ML} \approx 62\,350\,km/h$.

Deuxième étude - consommation minimale

3. Dans une deuxième étude on cherche, toujours pour le trajet entre Paris et Tokyo, mais pour un temps $T > T_0$ fixé, à minimiser la poussée qui est donnée par :

$$J(u) = \int_0^T u^2(t)dt$$

   (a) Donnez le hamiltonien associé au problème de contrôle optimal et les équations de l'état adjoint, discutez les conditions de transversalité.

   Corrigé : On a $H = u^2 + p_1 v + p_2 u$ et $\dot{p_1} = 0$ et $\dot{p_2} = -p_1$. L'état et le temps final étant imposés il n'y a pas de conditions de transversalité.

   (b) Montrez, à l'aide du principe du minimum de Pontriaguine, que le contrôle optimal u est, au cours du temps, soit en butée, soit varie linéairement en temps, avec au plus deux commutations.

   Corrigé : Le principe du minimum de Pontriaguine nous dit que le contrôle optimal minimise à tout instant le hamiltonien, c'est donc l'argument du minimum de $(u^2 + p_2 u)$, pour $-M \leq u \leq M$. Ainsi le contrôle est :

$$u(t) = -M \quad \text{si} \quad -\frac{p_2(t)}{2} \leq -M$$
$$u(t) = +M \quad \text{si} \quad M \leq -\frac{p_2(t)}{2}$$
$$u(t) = -\frac{p_2(t)}{2} \quad \text{si} -M \leq -\frac{p_2(t)}{2} \leq M$$

   p_2 étant linéaire en temps il ne peut y avoir qu'au plus deux commutations et, dans la troisième hypothèse mentionnée le contrôle étant proportionnel à p_2 il est bien linéaire en temps.

(c) Montrez que le contrôle optimal est
   - Si $T_0 < T \leq T_1$: $u(t) = M$ pour $t \in [0, \tau]$, $u(t)$ est linéaire pour $t \in [\tau, T-\tau]$, puis $u(t) = -M$ pour $t \in [T-\tau, T]$
   - Si $T_1 \leq T$: $u(t)$ linéaire de $u(0) = A$ à $u(T) = -A$ avec $0 < A \leq M$

   où $T_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} T_0$. Dans le premier cas déterminez τ en fonction de M, L et T, de même pour A dans le deuxième cas

   Corrigé : Comme il faut démarrer la fusée, au voisinage de $t = 0$ on a $u(t) > 0$, compte tenu de la discussion de la question précédente, et par raison de symétrie, les deux types de solutions s'imposent. Pour déterminer leurs constantes il faut vérifier les relations de la question (1). La première relation est vérifiée trivialement par symétrie, la deuxième conduit après calcul à $A = \frac{6L}{T^2}$ et la condition $A \leq M$ impose $T^2 \geq \frac{3}{2} T_0^2$. Pour l'autre type de solution on obtient pour τ l'équation $\tau^2 - \tau T + \frac{3L}{M} - \frac{T^2}{2} = 0$, ou encore $\tau^2 - \tau T + \frac{1}{2}(T_1^2 - T^2) = 0$, équation qui définit $\tau \in [0, \frac{T}{2}]$ si $T_0 \leq T \leq T_1$, soit $\tau = \frac{1}{2}\left(T - \sqrt{(3(T^2 - T_0^2)}\right)$.

Troisième étude - compromis consommation précision

4. Dans une troisième étude on cherche, toujours pour le trajet entre Paris et Tokyo et pour un temps $T > 0$ fixé, un compromis optimal entre consommation et précision, soit à minimiser

$$J(u) = \int_0^T u^2(t)dt + \alpha(x(T) - L)^2 + \beta v(T)^2$$

   où α et β sont des constantes positives (pour la consistance dimensionnelle on pourra prendre $\alpha = 1/T_x^3$ et $\beta = 1/T_v$, avec T_x et T_v des temps caractéristiques).
   Dans cette étude on n'impose pas de contraintes sur u, c'est à dire $u(t) \in \mathbb{R}$.

   (a) Donnez le hamiltonien associé au problème de contrôle optimal et les équations de l'état adjoint, discutez les conditions de transversalité.

   Corrigé : On a $H = u^2 + p_1 v + p_2 u$ et $\dot{p_1} = 0$ et $\dot{p_2} = -p_1$. Pour les conditions de transversalité, le temps final est fixé ($\tau = 0$) et l'état final est libre (η quelconque)) on obtient $p_1(T) = 2\alpha(x(T) - L)$, $p_2(T) = 2\beta v(T)$. Ce qui permet d'intégrer le système dynamique adjoint :

$$\begin{aligned} p_1(t) =& 2\alpha(x(T) - L), \\ p_2(t) =& 2\alpha(x(T) - L)(T - t) + 2\beta v(T) \end{aligned}$$

   (b) Déduire du principe du minimum de Pontriaguine la solution optimale $x(t)$ pour $0 \leq t \leq T$.

   Corrigé : Le principe du minimum de Pontriaguine nous dit que le contrôle optimal minimise à tout instant le hamiltonien, c'est donc l'argument du minimum de $(u^2 + p_2 u)$, pour $u \in \mathbb{R}$, soit $u(t) = -\frac{p_2(t)}{2}$. On déduit des calculs précédents et des conditions initiales :

$$u(t) = -\alpha(x(T) - L)(T - t) - \beta v(T)$$
$$v(t) = -\alpha(x(T) - L)Tt + \alpha(x(T) - L)\frac{t^2}{2} - \beta v(T)t$$
$$x(t) = -\alpha(x(T) - L)T\frac{t^2}{2} + \alpha(x(T) - L)\frac{t^3}{6} - \beta v(T)\frac{t^2}{2}$$

Il reste à déterminer $x(T)$ et $v(T)$ qui satisfont à :

$$v(T) = -\alpha(x(T) - L)T^2 + \alpha(x(T) - L)\frac{T^2}{2} - \beta v(T)T$$
$$x(T) = -\alpha(x(T) - L)\frac{T^3}{2} + \alpha(x(T) - L)\frac{T^3}{6} - \beta v(T)\frac{T^2}{2}$$

soit

$$\alpha x(T)\frac{T^2}{2} + v(T)(\beta T + 1) = \alpha L\frac{T^2}{2}$$
$$x(T)(\alpha\frac{T^3}{3} + 1) + \beta v(T)\frac{T^2}{2} = \alpha L\frac{T^3}{3}$$

ou encore (pour vérifier la cohérence dimensionnelle des formules) :

$$\frac{1}{2}x(T)\frac{T^2}{T_x^3} + v(T)(\frac{T}{T_v} + 1) = \frac{1}{2}L\frac{T^2}{T_x^3}$$
$$x(T)(\frac{1}{3}\frac{T^3}{T_x^3} + 1) + \frac{1}{2}v(T)\frac{T^2}{T_v} = \frac{1}{3}L\frac{T^3}{T_x^3}$$

(c) Vérifiez que la commande optimale conduit à $x(T) < L$ et $v(T) > 0$. Comment choisir T_x et T_v pour être au plus près de la cible ?

Corrigé : en posant : $\frac{T}{T_x} = \lambda$ et $\frac{T}{T_v} = \mu$:

$$x(T) = L\left(1 - \frac{12(\mu+1)}{\lambda^3(\mu+4) + 12(\mu+1)}\right) < L$$
$$v(T) = \frac{L}{T}\frac{6\lambda^2}{\lambda^3(\mu+4) + 12(\mu+1)} > 0$$

On vérifie que pour λ et μ grands $x(T) \to L$ et $v(T) \to 0$

Quatrième étude - compromis consommation précision par HJB

5. Formez l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman pour le compromis consommation précision envisagé dans la troisième étude et exprimez le contrôle optimal en fonction de la fonction de Bellman. Attention on ne demande pas de résoudre l'équation HJB !

   Corrigé : Soit $V(x, v, t)$ la fonction de Bellman, c'est à dire le minimum du coût J en partant de l'état (x, v) au temps t. Elle vérifie l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, à savoir :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u\left\{u^2 + \frac{\partial V}{\partial x}v + \frac{\partial V}{\partial v}u\right\} = 0$$
$$V(x, v, T) = \alpha(x - L)^2 + \beta v^2, \quad \forall x, v$$

Le contrôle optimal est l'argument du minimum, soit :

$$u(x, v, t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial v}$$

et l'équation HJB devient :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}v - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial v} = 0 \\
&V(x, v, T) = \alpha(x - L)^2 + \beta v^2, \quad \forall\, x, v
\end{aligned}$$