Utilisation des groupes en géométrie

prérequis : tout ce dont vous pourrez avoir besoin de la théorie des groupes ou de la géométrie. Le but est de présenter quelques interactions entre ces deux domaines : les thèmes sont très nombreux, il me semble toutefois qu'il est difficile de faire l'impasse sur quelques points autour du programme d'Erlangen (cf. le I) et sur quelques résultats de classification (cf. le II) selon vos connaissances.

Remarque : ce qui suit a été fait rapidement (trop) ; attention donc aux erreurs... en attendant la version 2.

1. Exemple de plan

I- *Notions géométriques associés à un groupe*

On se propose dans de premier paragaphe de présenter rapidement le programme d'Erlangen d'après Klein en 1872 dont l'objectif est de comparer les différentes géométries apparues au cours du XIXe siècle pour en dégager les points de similitude. L'idée est de fonder la géométrie sur les notions d'action de groupe et d'invariant.

Comme première illustration, selon le programme du collège, nous allons dans les différents contexte, faire agir notre groupe sur un ensemble de points ou de droites et donner des exemples d'énoncés intrinsèque à la géométrie en question.

1) *Géométrie affine* : on considère l'espace affine $\mathbb{R}^n$ sur lequel on fait agir le groupe affine $GA(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes GL_n(\mathbb{R})$:

- *points alignés* : l'action du groupe affine sur les couples de points a deux orbites : celle des points confondus et celle des points distincts ce qui ne fournit aucune notion particulière. Par contre l'action sur les triplets de points alignés, outre le cas de 3 points confondus...) les orbites sont indexées par $\mathbb{R}^\times \cup \{\infty\}$: il s'agit du rapport de proportionnalité $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$;
- *droites coplanaires* : en procédant comme pour les points, l'action sur les couples de droites distinctes fait apparaitre deux orbites dont celles des droites parallèles. L'action sur les triplets de droites en position générale (et donc sur les triangles) a une seule orbite donc pas de notion particulière.
  Remarque : l'action du groupe linéaire sur l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^n$ est transitive ; cependant comme $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes, l'action de la composante contenant I_n définit alors deux orbites : on définit ainsi l'orientation de l'espace comme étant le choix d'une de ces deux orbites.
- *énoncés* : Ceva, Menelaus...

2) *Géométrie semblable* : l'espace affine avec le groupe des similitudes $GO(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes GO_n(\mathbb{R})$ où $GO_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^\times \times O_n(\mathbb{R})$:

- *points alignés* : rien de neuf par rapport au cas affine, la seule notion à dégager est encore le rapport de proportionnalité ;
- *droites coplanaires* : l'action sur les couples de droites distinctes passant par un point O permet de définir la notion d'angle de droite (orienté ou pas) ; en faisant de même sur les demi-droites on définit la notion d'angle de demi-droite (orienté ou pas). L'action sur les triplets de droites en position générale (et donc sur les triangles) permet de définir la notion de triangles semblables...
- *énoncés* : **Triangles podaires** Soit ABC un triangle et P un point intérieur au triangle. On considère A_1, B_1, C_1 les pieds des perpendiculaires menées de P aux cotés du triangle. Le triangle $A_1B_1C_1$ est dit triangle podaire de ABC pour P. Soit alors $A_2B_2C_2$ le triangle

podaire de $A_1B_1C_1$ pour P et $A_3B_3C_3$ le triangle podaire de $A_2B_2C_2$ pour P. Alors ABC et $A_3B_3C_3$ sont semblables et le rapport de similitude est égal au rapport du produit des distances de P aux trois côtés sur le produit des distances aux trois sommets.

3) *Géométrie euclidienne* : l'espace est $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique avec le groupe des isométries $Is(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R})$:

- *points alignés* : les orbites de l'action sur les couples de points sont données par la distance ;
- *droites coplanaires* : idem que pour la géométrie semblable pour les couples de droite ; sur les triangles, on peut parler de triangle équilatéral, isocèle, rectangle...
- *énoncés* : sur les cercles on a le théorème de l'angle inscrit...

4) *Géométrie projective* : l'espace projectif est $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$ qui s'identifie à l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$; le groupe projectif est $PGL_{n+1}(\mathbb{R})$:

- *points alignés* : l'action sur les triplets de points distincts alignés est transitive ainsi la notion de proportionnalité disparait. Les orbites de l'action du groupe projectif sur les quadruplets de points alignés sont indexées par $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$: c'est le bi-rapport.
- *droites coplanaires* :
- *énoncés* : Pappus, Desargues

Une des idées fondamentales de Klein est de plonger les différentes géométrie dans la géométrie projective : on fixe une figure d'un espace projectif et on considère le groupe des transformations projectives qui la laisse stable. On cherche alors des invariants et des quantités qui permettent les classifier sous l'action du groupe. On obtient de cette façon les principales géométries classiques : ainsi puisque la géométrie projective peut être basée sur l'algèbre linéaire, toutes les géométries ainsi définies admettent des modèles basés sur l'algèbre linéaire.

- la géométrie affine : on considère l'hyperplan $H = \{x_{n+1} = 0\}$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et on prend le stabilisateur G de H dans $PGL_{n+1}(\mathbb{R})$; H est isomorphe à l'espace affine et G au groupe affine de dimension n ;
- la géométrie euclidienne ou semblable : la quadrique projective $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 0$ de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ et le groupe des similitudes s'identifie au sous-groupe du groupe affine du point précédent qui conserve la quadrique projective complexe ci-dessus.
- *la géométrie elliptique* : on prend l'hyperplan à l'infini de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et le sous-groupe du groupe projectif qui conserve la quadrique complexe $x_1^2 + \cdots + x_n^2$; ainsi l'hyperplan à l'infini de la géométrie euclidienne est la géométrie elliptique ;
- *la géométrie sphérique* : on note S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, orientée.
  - Pour $x, y \in S$, on note $d(x,y) = \arccos(x|y)$: les géodésiques sont les grands cercles.
  - triangles sphériques : les cotés sont les morceaux de grand cercle qui relient les points entre eux, les angles étant définis par l'angle entre les vecteurs tangents dans le plan tangent euclidien : $\alpha = d(x_y, x_z)$ où x_y (resp. x_z) est le deuxième vecteur fourni après x par l'orthonormalisation de Schmidt appliqué à $\{x, y\}$, i.e. $x_y = \frac{\lambda}{||\lambda||}$ avec $\lambda = y - (x|y)x$; c'est aussi l'angle entre les plans correspondants.
  - formule fondamentale de la trigonométrie sphérique :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

  - deux triangles sphériques ayant les mêmes angles sont isométriques.
  - l'aire d'un triangle sphérique est égale à la somme des angles moins π.

  - toutes les droites se coupent en 2 point, en passant en projectif et donc en identifiant x et $-x$, on obtient un modèle de la géométrie elliptique, où toutes les droites se coupent en un point (pas de droites parallèles).
- *la géométrie conforme* : en dimension 2, il s'agit de la sphère de Riemann S^2, en dimension quelconque on prend le plan affine euclidien E auquel on rajoute un point à l'infini $\hat{E} = E \cup \{\infty\}$ (on passe de l'une à l'autre par la projection stéréographique) ; la topologie sur $\hat{E}$ est celle de E à laquelle on rajoute les ouverts du type $(E \backslash K) \cup \{\infty\}$ où K est un compact de E ; la projection stéréographique est un homéomorphisme
  - pour une similitude f du plan affine euclidien, on la prolonge en posant $f(\infty) = \infty$; les inversion et les similitudes de $\hat{E}$ engendrent un groupe appelé le groupe conforme ou groupe des homographies ; la géométrie conforme est l'étude de l'action du groupe conforme sur $\hat{E}$.
  - si on rajoute la conjugaison, on obtient le groupe circulaire qui vu comme automorphismes de S^2, correspond aux automorphismes qui conservent les cercles tracés sur S^2. Une transformation circulaire droite ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) (resp. gauche $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$) conserve (resp. change en son opposé) les angles orientés de droites.

5) *Géométrie hyperbolique* : on définit les *angles hyperboliques* dans un E espace vectoriel réel de dimension 2 muni d'une forme quadratique q de signature $(1,1)$ de la même manière que les angles euclidiens. On fixe une base (e_1, e_2) de E telle que la matrice de q y soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Un élément f de $O^+(q)$ (resp. $O^-(q)$) a pour matrice dans la base (e_1, e_2) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 & k^{-1} \\ k & 0 \end{pmatrix}$) pour $k \in \mathbb{R}^*$. On note $O^{++}(q)$ la composante connexe de $O^+(E)$. On fait agir $O(q)$ sur les droites de E ; cette fois-ci il y a 3 orbites selon que la restriction de q y est nulle, définie positive ou négative. L'action de $O^{++}(q)$ sur l'orbite des droites telles que la restriction de q est définie positive est simplement transitive ce qui permet de définir la notion d'angle hyperbolique de "deux" droites ainsi que sa mesure : on retrouve alors les fonctions ch, sh et th.

L'espace hyperbolique est un espace métrique homéomorphe à l'espace euclidien dont l'intérêt vient de la taille de son groupe d'isométrie qui est de dimension $n(n+1)/2$; seuls l'espace euclidien et la sphère font aussi bien. Parmi les modèles classiques de l'espace hyperbolique de dimension 2 citons :
- le modèle non conforme de Klein : $E = \mathbb{R}^{2+1}$ est identifié au produit $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ et les vecteurs notés $v = (z,t)$ avec $z \in \mathbb{R}^2$ et $t \in \mathbb{R}$. On considère l'hyperplan affine H défini par $t = 1$ et on désigne par q la forme quadratique $-\sum_{i=1}^n x_i^2 + x_{n+1}^2$ de signature $(1,n)$, par P sa forme polaire et on note $Q = q^{-1}(0)$ son cône isotrope. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des droites de E telles q y soit strictement positive et on définit
$$\Phi : \mathcal{P} \to \mathcal{B} \qquad (z,t) \mapsto \frac{z}{t}$$
  où $\mathcal{B}$ est la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^2$. La distance entre deux points de $\mathcal{B}$ est la valeur absolue de l'angle hyperbolique des deux droites associées. Les droites sont des cordes par contre les angles entre deux cordes ne sont pas directement visibles : il faut repasser en dimension 3 et lire l'angle sur le plan tangent correspondant...
- le modèle conforme $\mathcal{C}$: en utilisant la projection stéréographique, on définit une bijection de $\mathcal{B}$ sur lui-même. On obtient alors le modèle de Poincaré où la distance est l'image de

la distance hyperbolique du modèle précédent. Les droites sont alors soit des diamètres soit la trace de cercle orthogonaux à $\mathcal{B}$. L'avantage de ce modèle est qu'il est conforme, i.e. les angles se lisent directement.

– le modèle $\mathcal{H}$ du demi-espace de Poincaré : On considère l'image de $\mathcal{C}$ par une inversion de $\mathbb{R}^n$ dont le pôle est situé sur S^{n-1}. Les droites sont soit les demi-droites verticales, soit des demi-cercles centrés sur l'axe des x. La distance hyperbolique entre $x = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ est donnée par la formule

$$\mathrm{ch} d(z, z') = \frac{(x - x')^2 + y^2 + y'^2}{2yy'}$$

et la mesure invariante est $\frac{dxdy}{y^2}$. Le sous-groupe des isométries s'identifie à $PGL_2(\mathbb{R})$, où les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant positif (resp. négatif) agissent par les homographies

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \qquad \text{resp. } z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

Remarque : le groupe des isométries de l'espace hyperbolique est $O^+(q)$.

II- *Classification*

Dans les différentes géométries, on considère l'action du groupe correspondant sur un ensemble d'objet : les énoncés de classification consistent à donner un représentant particulier de chaque orbite.

1) Coniques : on fait agir le groupe affine (projectif, orthogonal) sur l'ensemble des coniques...

2) Réseaux : deux réseaux Λ, Λ' sont dits équivalents s'il existe une similitude g telle que $g(\Lambda) = \Lambda'$. En dimension 2 tout réseau (w_1, w_2) est équivalent à un réseau de la forme $(1, \tau)$ où $\tau = w_1/w_2 \in \mathcal{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ où $\mathcal{H}$ est le demi-plan de Poincaré : si (w'_1, w'_2) est une autre base, alors il existe $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tel que $w'_1 = aw_1 + bw_2$ et $w'_2 = cw_1 + dw_2$, alors $\tau' = w'_1/w'_2 = A.\tau := \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$.
Remarque : étant donné un réseau de base $(a_1, \cdots, a_n)$; on l'envoie sur $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique, par l'application linéaire $a_i \mapsto e_i$. On transforme du même coup le produit scalaire de l'espace euclidien en un forme quadratique de matrice $A = ((a_i|a_j))_{1 \leq i,j \leq n} = {}^tBB$. Réciproquement, toute forme quadratique définie positive A provient d'un réseau, défini à une transformation orthogonale près : on l'obtient en "redressant" l'ellipsoïde de la forme quadratique en une sphère. On a donc définit une correspondance bijective entre réseaux à isométries près (si on change la base orthonormée (e_i), O étant la matrice de passage, et si on change la base (a_i) par $(b_i) = P(a_i)$ avec $P \in GL_n(\mathbb{Z})$ alors $B' = OBP$ et $A' = {}^tPAP$) et classes de formes quadratiques définies positives.
Soit $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, une forme quadratique définie, i.e. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. On dira que q est **réduite** si et seulement si

$$-a < b \leq a < c \text{ ou } 0 \leq b \leq a = c$$

Deux formes quadratique q, q' seront dites géométriquement équivalentes s'il existe $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $Q' = {}^tAQA$.

Remarque : empilement de sphères : en dimension 2 on peut montrer que l'empilement le meilleur est obtenu pour un réseau ; de la description de $\mathcal{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ on remarque que le meilleur réseau est le réseau hexagonal.

Applications : dans $SL_2(\mathbb{Z})$ on note

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– considérons l'application de $\mathbb{Z}/2\ Zm * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ qui à $(1,0)$ associe S et à $(0,1)$ $T^{-1}S$: comme $S^2 = (ST)^3$ ce morphisme est bien défini, pour montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme il suffit de montrer que tout mot en $X = S$ et $Y = T^{-1}S$ de la forme $X^{e_1}Y^{f_1}X^{e_2}Y^{f_2}\cdots X^{e_r}Y^{f_r}$ avec $e_1 = 0,1$, $e_i = 1$, $0 < f_i < 3$ et $0 \leq f_r \leq 2$. Il suffit de vérifier que l'image de i est distincte de i ce qui permet de se ramener au cas où le mot est un produit de XY et XY^2. Or on vérifie aisément que XY et XY^2 conserve le deuxième cadran et font baisser l'ordonnée, d'où le résultat ;
– on note $\Gamma(2)$ le noyau de $SL_2(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. En considérant l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et en jouant au "ping-pong" avec les parties $P_A =]-1,1[$ et $P_B = P_A^c$, on montre que $\Gamma(2)$ est le groupe libre engendré par A et B.

3) Polyèdres réguliers : ils doivent se réaliser dans l'ensemble des pôles d'un sous-groupe fini de $O_3(\mathbb{R})$; c'est comme cela qu'on les trouve tous.

4) Pavage : (euclidien, elliptique, hyperbolique) étant donné un espace topologique E localement compact et un groupe G de bijections continues de E : on choisit des compacts $K_1, \cdots, K_l$ de E appelés pavés standards. On appelle alors pavé compact P de E, les compacts $d(K_i)$ pour $g \in G$. Un pavage de E est alors un ensemble $\mathcal{P}$ de pavés tels que

(i) $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P = E$

(ii) $\forall P, Q \in \mathcal{P}$, l'intersection de leur intérieur est vide ;

(iii) pour tout compact K de E, les pavés P de $\mathcal{P}$ qui rencontrent K sont en nombre fini.

Remarque : le pavage est dit périodique s'il existe un ensemble fini $\mathcal{F}$ de pavés de $\mathcal{P}$ tels que tout pavé de $\mathcal{P}$ est l'image d'un pavé de $\mathcal{F}$ par un élément g du groupe de symétrie du pavage $\Gamma_{\mathcal{P}} = \{g \in G : \ g\mathcal{P} = \mathcal{P}\}$. Un groupe de la forme $\Gamma_{\mathcal{P}}$ est dit cristallographique.

– *cas euclidien* : (iii) est un conséquence de (i) et (ii). En ce qui concerne les pavages périodique, la description des groupes cristallographiques de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est réglé par les théorèmes suivants dus à **Bieberbach** :
  – le sous-groupe Γ' des translation d'un groupe cristallographique Γ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est d'indice fini engendré et isomorphe à $\mathbb{Z}^n$;
  – tout isomorphisme de groupes abstraits entre deux groupes cristallographiques est de la forme $\phi(g) = h \circ g \circ h^{-1}$ où h est une bijection affine de $\mathbb{R}^n$;
  – il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de groupes cristallographiques (17 en dimension 2, 219 en dimension 3, un meilleure compréhension de la table est toujours un sujet d'actualité.

  Remarque : l'exemple le plus célèbre de pavage non périodique est du à Penrose : cerf volant et flèche...
– *cas du plan hyperbolique* : rappelons qu'un polygone hyperbolique P est une partie compacte connexe délimitée par un nombre fini de géodésiques. Dans le modèle de Klein, cela correspond à la notion de polygone euclidien en faisant attention que les angles aux sommets ne sont pas ceux que l'on voit ; dans le modèle conforme $\mathcal{C}$, les côtés sont des

arcs de cercles ou de droites orthogonaux au bord, les angles sont les bons. L'exemple le plus simple est l'analogue du pavage carré du plan euclidien : on part d'un polygone hyperbolique convexe P_0 dont les angles sont le la forme $\alpha_i = 2\pi/d_i$ avec $d_i \geq 3$ tous pairs. On construit alors les polygones symétriques du polygone de départ par rapport à chacun de ses côtés (via $O^+(q)$) et ainsi de suite... Contrairement au cas euclidien il existe de nombreux tels polygones hyperboliques (par exemple pour tout $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \pi$, il existe un triangle hyperbolique dont ce sont les angles). L'analogue des théorèmes de Bieberbach est :

- **Selberg** tout groupe cristallographique du plan hyperbolique admet un sous-groupe d'indice fini sans torsion, i.e. $g^n \neq 1$ pour tout $g \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$;
- **Poincaré** pour tout $g \geq 2$, le groupe $\Gamma_{(g)}$ engendré par $a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g$ et soumis à l'unique relation
$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$$
est isomorphe à un groupe cristallographique et tout groupe cristallographique sans torsion est isomorphe à un $\Gamma_{(g)}$, ceux-ci étant non isomorphes deux à deux mais admettent un sous-groupe d'indice fini isomorphe.

Remarque : en dimension supérieur, les résultats sont différent puisque d'après **Borel 1963**, il existe une famille infinie de groupes cristallographiques Γ_i tels que pour $i \neq j$, aucun sous-groupe de Γ_i n'est conjugué à un sous-groupe d'indice fini de Γ_j.

Remarque : en ce qui concerne les pavages non périodiques, **Margulis et Mozes 1998**, ont montré que si T_0 est un triangle isocèle du plan hyperbolique d'angles α, β avec $5\alpha + 8\beta = 2\pi$ et $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$, alors T_0 permet un pavage du plan hyperbolique mais ne permet pas de pavage hyperbolique périodique.

III- *Structures de groupes sur des objets géométriques*

1) Sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ via les quaternions : paradoxe de Banach-Tarski

2) Coniques : les coniques sont de genre 0 et donc isomorphes à $\mathbb{P}^1$ ce qui permet de les munir d'une structure de groupe. Par ailleurs la réunion d'une conique et d'une droite est une cubique qui peut se voir comme la déformation d'une courbe elliptique de sorte que la loi de groupe (construite géométriquement) sur la courbe elliptique muni l'ensemble des points de la conique qui n'intersectent pas la droite en question, d'une loi de groupe.

Remarque : la loi de groupe sur l'hyperbole, permet de justifier que toutes les solutions de l'équation de Pell-Fermat s'obtiennent à partir de la solution minimale.

3) Courbes elliptiques : ce sont des cubiques irréductibles lisses. Elles sont donc de genre 1 isomorphes à leur jacobienne, ce qui permet de les munir d'une structure de groupe.

Application : grand théorème de Poncelet

Plus généralement on peut définir la notion de schéma en groupes et plus particulièrement celle de variétés abéliennes...

IV- *Construction de nouveaux espaces et groupes*

1) Espaces homogènes : si G est un groupe topologique localement compact et dénombrable à l'infini (i.e. réunion dénombrable de compacts) opérant continûment et transitivement sur un espace E localement compact alors $G/G.x \to E$ est un homémorphisme : un tel espace est dit *homogène* : pour des résultats sur la structure différentiable des espaves homogènes linéaires, cf. [**1**] §4.10.

Exemples $SO(n)/SO(n-1) \simeq S^{n-1}$ ce qui prouve par récurrence que $SO(n)$ est connexe (idem pour $SU(n)$).

2) Revêtements : une application $p : Y \to X$ continue et surjective entre deux espaces topologiques est un revêtement si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V dans X tel que $p^{-1}(V)$ soit une réunion d'ouverts $(U_i)_i$ de Y tels que $p_{|U_i}$ est un homéomorphisme de U_i sur V.
Exemples si un groupe G opère librement et proprement sur X (i.e. $gx = x$ implique $g = 1$ et l'ensemble des g tel que $gK \cap K \neq \emptyset$ est fini, quelque soit le compact K), alors la projection $p : X \to X/G$ est un revêtement topologique. On a ainsi un procédé de construction de nouveau espace. On pourra mentionner le revêtement du cercle par une hélice ou encore la bande de Moebius...

Le groupe fondamental d'un espace topologique pointé (X, x) est l'ensemble des classes d'homotopie de lacets de X basés en x. Muni de la composition des lacets, on obtient un groupe noté $\Pi_1(X, x)$. Une application continue $f : X \to Y$ induit un homomorphisme de groupe f^* entre $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(Y, f(x))$: on a $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$ de sorte que si f est un homéomorphisme alors f^* est un isomorphisme.
Remarque : lorsque X est connexe par arcs, le groupe fondamental ne dépend pas du point base x. On a aussi $\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$. Dans le cas où X est un groupe topologique, on remarque que son π_1 est commutatif.
Exemples $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ et pour $n \geq 2$, $\pi_1(S^n) = \{1\}$, $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{a, b\}) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ...

Un espace est dit simplement connexe si son π_1 est trivial. On dit que $G_1 \to G_2$ est un revêtement universel si c'est un revêtement et si G_1 est connexe par arcs et simlement connexe : deux revêtement universels sont isomorphes. Par ailleurs si G est un groupe connexe localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe (i.e. tout $x \in G$ admet un voisinage U_x tel que tout lacet de base x dans U_x est homotope au lacet constant) ; alors G possède un revêtement universel qui est donc unique à isomorphisme près.
Exemples les applications $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ et $\phi : SU(2) \to SO(3)$ sont des revêtements universels.

Moralité, sous les hypothèses précédentes, on peut construire de nouveaux espaces et de nouveaux groupes, revêtements universels d'espaces ou de groupes déjà connus (cf. le groupe des spinneurs...).

3) Espaces symétriques (resp. hermitien) : c'est une variété riemannienne (resp. ave une structure complexe) connexe avec une métrique riemanienne (resp. hermitienne) munie d'une application différentiable $(x, y) \mapsto s_x(y)$ (symétrique de y par rapport à x) vérifiant les propriétés suivantes :

- $s_x(x) = x$;
- $s_x(s_x(y)) = y$;
- $s_x(s_z(y)) = s_{s_x(z)}(s_x(y))$;
- il existe pour tout x, un voisinage de x dans lequel $s_x(y) = y \Leftrightarrow y = x$.
- le groupe des automorphismes, qui est égal au groupe des isométries, agit transitivement.

Exemples toute grassmanienne réelle ou complexe, quotient d'un groupe de Lie par le groupe des invariants d'une involution.

Le groupe des isométries d'un espace symétrique (resp. hermitien) a une structure naturel de groupe de Lie. En ce qui concerne les espaces symétriques hermitiens, ils se répartissent en trois familles :

– de type non compact (exemple $\mathcal{H} \simeq SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ ou plus généralement $SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$), de courbure négative ;
– de type compact (exemple $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$), de courbure positive ;
– euclidienne (exemple $\mathbb{C}/\Lambda$) de courbure nulle

de sorte qu'un espace général E se décompose en le produit $E \times E^+ \times E^0$. Le sous-groupe des isométries positives qui fixent un point $e \in E$ est un sous-groupe compact tel que l'application canonique $Is(E)^+/K_p \simeq E$.
Remarque : $Is^+(E)$ est aussi le groupe engendré par les $s_x \circ s_y$ dont on peut montrer directement qu'il agit transitivement. Evidemment les espaces intéressant sont ceux du premier type ; leurs diverses compactifications sont intimement liées aux propriétés de leur groupe d'isométries.

4) Espaces classifiant : l'ensemble des courbes elliptiques à isomorphismes près est en bijection avec $\mathcal{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$ qui peut être vu comme une surface de Riemann et donc comme une courbe algébrique sur $\mathbb{Q}$ et qui est isomorphe à $\mathbb{A}^1$.

Dans le langage de Grothendieck ces problèmes de variété modulaires se mettent en famille : i.e. on considère le foncteur contravariant qui à un schéma S associe l'ensemble des courbes elliptiques sur S munies de données additionnelles (par exemple un sous-groupe d'ordre N, une structure de niveau N ...) : la question est alors de savoir si ce foncteur est représentable, i.e. s'il existe un schéma X tel que pour tout S, l'ensemble en question s'identifie aux morphisme de S dans X. Il est impossible de rendre compte des résultats obtenus sur ce thème, on renvoie le lecteur intéressé à la nombreuse littérature sur le sujet.
Remarque : si on procède de même avec les variétés abéliennes, les variétés modulaires correspondantes sont dites de Shimura.

5) ...

2. Développements

– angles hyperbolique et espace hyperbolique ;
– classification des réseaux du plan à similitude près et présentation de $PSL_2(\mathbb{Z})$;
– polyèdres réguliers : construction du de l'icosaèdre ;
– pavages du plan euclidien ;
– pavages du plan hyperbolique ;
– lois de groupes sur les coniques (application aux équations de Pell-Fermat) ;
– grand théorème de Poncelet...

3. Questions

4. Solutions

Références

[1] F. Mneimné, R. et Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.* Hermann, 1997.