Groupe opérant sur un ensemble: exemples et applications

Plan

Remarque d'ordre général: il faut éviter le piège qui consiste à recoller des bouts de plan des différentes leçons qui contiennent dans leur preuve des groupes opérant sur un ensemble. L'idée est d'essayer d'organiser vos exemples dans un plan dont l'axe directeur est la notion de groupe opérant sur un ensemble.

Ce qui suit a été fait à la va-vite à la demande des élèves, alors en attendant une version plus travaillée, l'auteur réclame l'indulgence du lecteur.

- Une première partie consacrée aux généralités:
  - on dit qu'un groupe G opère sur un ensemble G s'il existe un morphisme de groupe $G \to \mathfrak{S}(E)$;
  - l'orbite d'un élément $e \in E$ est par définition le sous-ensemble $\mathcal{O}_G(e) = \{g.e \ / \ g \in G\}$; évidemment si $e' \in \mathcal{O}_G(e)$ alors $\mathcal{O}_G(e) = \mathcal{O}_G(e')$;
  - le stabilisateur de $e \in E$ est par définition le sous-groupe $\mathrm{Stab}_G(e) = \{g \in G \ / \ g.e = e\}$; si $e' = g.e$ alors $\mathrm{Stab}_G(e') = g\mathrm{Stab}_G(e)g^{-1}$;
  - on a $|\mathcal{O}_G(e)| = [G : \mathrm{Stab}_G(e)]$;
  - équations aux classes: $|E| = |E^G| + \sum_{\mathcal{O}_G(e) \in \mathcal{O} \ / \ |\mathcal{O}_G(e)| \neq 1} |\mathcal{O}_G(e)|$ où $\mathcal{O}$ est l'ensemble des orbites;
  - formule de Burnside: $\sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| = |\mathcal{O}|.|G|$
  - l'action est fidèle si $G \to \mathfrak{S}(E)$ est injective
  - l'action est transitive s'il n'y a qu'une seule orbite; notion d'action n-transitive
- Cas où E est un groupe:
  - $E = G$: il y a 3 actions classiques, translation à gauche, à droite par g^{-1} et par conjugaison.
    * On s'intéresse en particulier aux classes de conjugaison (ex: le groupe symétrique avec la décomposition en cycles à supports disjoints)
    * le centre d'un p groupe n'est pas réduit à l'élément neutre
    * tout corps fini est commutatif
  - E est un sous-groupe de G:
    * s'il est distingué, on peut faire opérer G par conjugaison (ex: soit H un sous-groupe distingué de cardinal p dans un p-groupe; montrer que H est contenu dans le centre)
    * les classes de similitude, d'équivalence, de congruence avec les matrices
    *
  - E est un quotient de G:
    * soit H un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice $1 < k < n$ (resp. $k = n$); montrez que $k = 2$ et $H = \mathcal{A}_n$ (resp. $H \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$);
    * soit H un sous-groupe d'indice p de G où p est le plus petit premier divisant $|G|$; en déduire que H est distingué dans G;
  - E est un ensemble de sous-groupe de G:
    * théorèmes de Sylow
    * si G possède un 2-Sylow cyclique alors G n'est pas simple
  - E est un autre groupe: on demande que $G \to \mathfrak{S}(E)$ s'envoie sur $\mathrm{Aut}(E)$ ce qui permet de définit la notion de produit semi-direct
    * groupe diédral
    * trouver tous les groupes d'ordre 30

- de la géométrie:
  - opération transitive de $GL_n(K)$ sur les bases de K^n ce qui dans le cas réel nous amène à la notion d'orientation
  - les différentes géométries: affine (rapport de proportionnalité), projectives (birapport), semblable (angles), hyperboliques (angles hyperboliques)...
  - sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ et polyèdres réguliers;
  - lemme du ping-pong: soit G un groupe opérant sur un ensemble X et soient H, H' deux sous-groupes de G. On suppose qu'il existe deux parties non vides X, X' de X telles que

    $$hX' \subset X \text{ si } h \in H \backslash 1 \text{ et } h'X \subset X' \text{ si } h' \in H' \backslash 1$$

    Alors si H' n'est pas réduit à 2 éléments et $X' \nsubseteq X$ alors le morphisme canonique $H * H' \to < H, H' >$ est un isomorphisme. (applications à $PSL_2(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)
  - action des homographies sur le demi-plan de Poincarré: domaine fondamental, générateurs et relations pour $PSL_2(\mathbb{Z})$ (ou $\Gamma(2)$ qui est un groupe libre de rang 2)
  - classification des quadriques projectives
  - décomposition de Bruhat: $T(n, \mathbb{C}) \backslash GL(n, \mathbb{C}) / T(n, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{S}_n$ où $T(n, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices triangulaires supérieures. On interprète ce résultat en termes de drapeaux: l'ensemble des classes de paires de drapeaux complets sous l'action de $GL(n, \mathbb{C})$, est en bijection avec $\mathfrak{S}_n$.
  - groupe circulaire
  - un groupe libre de rand 2 dans $SO_3(\mathbb{R})$ et paradoxe de Banach-Tarski
  - groupes de pavages (euclidiens, sphériques ou hyperboliques)
  - $PGL_n(K)$ agit sur $\mathbb{P}^{n-1}(K)$: applications à $n = 2, 3$ et $K = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$.
  - action d'un groupe topologique: si G est un groupe topologique compact agissant sur un espace séparé X alors pour tout $x \in X$, $G/\mathrm{Stab}_G(x) \to \mathcal{O}_G(x)$ est un homéomorphisme (par exemple $SO(n)/SO(n-1)$ et $\mathbb{S}^{n-1}$ sont homéomorphes, de sorte qu'en particulier $SO(n)$ est connexe)
  - quaternions et groupe orthogonal
- de la combinatoire:
  - Soit G un groupe de cardinal pq qui opère sur un ensemble E de cardinal $n = pq - p - q$; montrer qu'il existe au moins un point fixe et que n est le plus grand cardinal tel que cet énoncé soit vrai.
  - nombre de coloriages du cube avec c couleurs
  - collier de perles avec 4 bleus, 3 rouges et 2 vertes
- théorie des représentations des groupes finis: exemple du groupe symétrique
- polynôme symétriques et antisymétriques

Développements

- formule de Burnside et application au dénombrement de colliers
- groupe des isométries du cube et application au nombre de coloriages du cube avec c couleurs
- tout corps fini est commutatif
- théorème de Sylow
- le centre d'un p-groupe n'est pas réduit à l'élément neutre + si H de cardinal p est distingué dans un p-groupe alors H est contenu dans le centre

- un sous-groupe d'indice $1 < k < n$ (resp $k = n$) de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathcal{A}_n$ (resp. à $\mathfrak{S}_{n-1}$)
- sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$
- groupes de pavages
- $PSL_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Questions

- donnez la définition d'un angle orienté de deux demi-droites
- les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$)
- Qu'est-ce qu'un espace affine?
- Expliquez ce qu'est une notion de géométrie affine (resp. projective, euclidienne...).
- Montrez que tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.
- Montrez que $PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$.

exos