Endomorphismes remarquables d'un espace hermitien

Plan

Remarque d'ordre général: il conviendra en préambule de donner le contexte: un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit hermitien.

- Dans un premier paragraphe, donnez les définitions élémentaires de rigueur: définition de l'adjoint, d'un endomorphisme hermitien (les opérateurs hermitiens jouent un rôle important en mécanique quantique. Ils représentent les grandeurs physiques. Les valeurs propres (réelles) représentent les valeurs possibles de la grandeur et les fonctions propres (ou vecteurs) les états associés), anti-hermitien, unitaire, normal et l'interprétation matricielle.

- De la réduction des endomorphismes normaux (via les sous-espaces stables) on en déduit la réduction des hermitiens et des unitaires.

- en application:
  - deux matrices réelles unitairement semblables sont orthogonalement semblables: en application on pourra mentionner
    - la réduction des matrices orthogonales à partir de celle des matrices unitaires;
    - que $SO(n)$ est connexe par arcs ;
    - la réduction des endomorphismes normaux sur un espace euclidien;
  - pour u hermitienne de valeurs propres $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ alors
$$\lambda_k = \inf_{F \in \mathcal{E}_k} \sup_{0 \neq x \in F} \frac{(u(x), x)}{||x||^2} = \sup_{F \in \mathcal{E}_{n-k+1}} \inf_{0 \neq x \in F} \frac{(u(x), x)}{||x||^2}$$
  - réduction simultanée: pour A hermitienne définie positive et B hermitienne, il existe P inversible telle que $P^*AP = I_n$ et P^*BP soit diagonale

- les décompositions classiques avec des applications topologiques:
  - l'exponentielle réalise un homéomorphisme (resp. une surjection) des hermitiennes (resp. anti-hermitiennes) sur les hermitiennes définies positives (resp. sur $SU(n)$); l'ensemble des endomorphismes hermitiens (resp. hermitiens définis positifs) est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$; tout endomorphisme unitaire s'écrit sous la forme $\exp(iH)$ avec H hermitien;
  - décomposition QR: pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple (Q, R) avec Q unitaire et R triangulaire supérieure à éléments diagonaux dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que $A = QR$.
  - décomposition polaire (il faut le voir comme une généralisation de l'écriture $z = |z|e^{i\theta}$ d'un nombre complexe); $GL_n(\mathbb{C})$ (resp. $SL_n(\mathbb{C})$) est homéomorphe à $U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$ (resp. $SU(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$); $U(n)$ est un sous-groupe compact maximal
  - décomposition d'Iwasawa;
  - décomposition de Cartan.

- Dans un autre paragraphe on étudiera le groupe unitaire en mettant en avant les points suivants:
  - le centre est l'ensemble des λI_n où λ est une racine de l'unité;
  - $U(n)$ est homéomorphe à $SU(n) \times S^1$;
  - $U(n)$ et $SU(n)$ sont connexes par arcs;
  - $U(n)$ est un sous-groupe compact maximal et tout sous-groupe compact maximal est conjugué à $U(n)$;
  - $SU(n)$ est simple pour $n > 1$;

- $SU(2)$ et les quaternions: simplement connexe, revêtement de $SO(3)$;
- toute orbite sous le groupe unitaire contient une matrice triangulaire, celles qui contiennent des matrices diagonales sont les orbites des matrices normales
- $U(n)$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité $B = \{a \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) : \ |a| \leq 1\}$;

- Les matrices de Householder qui sont hermitiennes et unitaires (cf. M-T p.186) avec en application:
  - ce sont exactement les matrices de $U(n)$ qui sont hermitiennes de signature $(n-1, 1)$;
  - toute matrice de $SU(n)$ est un produit pair de matrices de Householder;
  - le sous-groupe de $U(n)$ engendré par les matrices hermitiennes de $U(n)$ est le sous-groupe de $U(n)$ constitué des matrices de déterminant ± 1;
  - étant donnée une matrice symétrique A, il existe une matrice P produit de $(n-2)$ matrices de Householder, telle que ${}^tPAP$ soit tridiagonale (Ciarlet p.120). En appliquant alors la méthode de Givens, on obtient des valeurs approchées des valeurs propres: les polynômes caractéristiques des mineures principaux forment une suite de Sturm ce qui permet de localiser les racines aussi précisément que l'on veut par exemple par dichotomie (Ciarlet p.123).

- d'autres thèmes possibles, plus ou moins difficiles:
  - les déterminants de Gram
  - Hausdorffien d'un opérateur: pour A une matrice à coefficients complexe, on note $H(A)$ l'image de la sphère unité de l'espace hermitien $\mathbb{C}^n$ par l'application $x \mapsto (A(x), x)$. On a alors les résultats suivants: (M-T p.326, M p.97)
    * si A est normale, $H(A)$ est l'enveloppe convexe de ses valeurs propres;
    * $H(A)$ est une partie convexe compacte du plan;
    * en dimension 2,$H(A)$ est une ellipse (pleine éventuellement dégénérée) dont les foyers sont les valeurs propres de A;
    * toute matrice A est unitairement semblable à une matrice ayant des coefficients diagonaux identiques.
  - théorème de Horn: les vecteurs constitués des diagonales des matrices hermitiennes d'une même orbite sous l'action de $U(n)$ décrivent exactement l'enveloppe convexe des vecteurs de coordonnées $(\lambda_{\sigma(1)}, \cdots, \lambda_{\sigma(n)}$ où $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres attachées à l'orbite et σ décrit les permutations de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$.

Développements

- $U(n)$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité $B = \{a \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) : \ |a| \leq 1\}$;
- théorème de Liapounov (M p.99)
- réduction des endomorphismes normaux
- la décomposition polaire est un homéomorphisme
- tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{C})$ est contenu dans un conjugué de $U(n)$
- l'exponentielle réalise un homéomorphisme des hermitiennes sur les hermitiennes définies positives
- décomposition de Cartan
- décomposition d'Iwasawa
- matrices de Householder et réduction à une forme tridiagonale

- Haussdorfien...

Questions

- Montrez que deux matrices normales A et B sont semblables si et seulement si $\mathrm{Tr}A^k = \mathrm{Tr}B^k$. (le théorème de Specht est une vaste généralisation: les fonctions $A \mapsto \mathrm{Tr}(m(A, A^*))$ où m est un mot quelconque (de degré $\leq 2n^2$ d'après un théorème de Pearcy), séparent les orbites sous l'action de la conjugaison de $U(n)$).
- (Tauvel p.417) Montrez que u est diagonalisable de spectre réel si et seulement si u est le produit de deux endomorphismes hermitiens, l'un au moins d'entre eux étant défini positif
- (Tauvel p.418) Pour $n \geq 2$ et A hermitienne non nulle de taille n, montrez que A est définie positive ou négative si et seulement si pour toute matrice B hermitienne, AB est diagonalisable.
- (M-T p.219 ou M p.92) Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres d'une matrice complexe $A = (a_{i,j})$. Montrez que A est normale si et seulement si $\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$. (remarquez que $\mathrm{Tr}(AA^*) = \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2$ est $U(n)$-invariante)
- Montrer que A est normale si et seulement si $\mathrm{Tr}(AA^*)^2 = \mathrm{Tr}A^2A^{*2}$. (notez que la matrice hermitienne $H = AA^* - A^*A$ est nulle si et seulement si $\mathrm{Tr}H^2 = 0$)
- A est normale si et seulement si A^* est un polynôme en A
- Si A est normale, montrez que l'orbite de A est homéomorphe à $U(n)/U(k_1) \times \cdots \times U(k_r)$.
- Montrez que deux matrices sont unitairement équivalentes si et seulement si elles ont même valeurs singulières.
- Les matrices de Householder sont exactement les matrices de $U(n)$ qui sont hermitiennes de signature $(n-1, 1)$.

Exercices corrigés

Exercice 1. *(Tauvel p.417) Montrez que u est diagonalisable de spectre réel si et seulement si u est le produit de deux endomorphismes hermitiens, l'un au moins d'entre eux étant défini positif*

Preuve : Supposons que u est diagonalisable de spectre réel: soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée et soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une base formée de vecteurs propres de u de valeurs propres réelles $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On définit f et g par $f(x_i) = e_i$ et $g(e_i) = \lambda_i e_i$ de sorte que $u = f{-}1 \circ g \circ f$. Soit alors $f = qr$ la décomposition polaire de f avec q unitaire et r hermitienne définie positive. On obtient ainsi en posant $l = r \circ l \circ r^{-1} = q^* \circ g \circ q$ qui est hermitienne, alors $u = r^{-1} \circ l \circ r = (r^{-1} \circ l \circ r^{-1}) \circ r^2$ avec donc $r^{-1} \circ l \circ r^{-1}$ et r^2 hermitiennes.

Réciproquement si $u = v \circ w$ avec w (resp. v) hermitienne (resp. hermitienne définie positive). Notons $l = v^{1/2}$ qui est hermitienne définie positive, on a $u = l \circ (l \circ w \circ l) \circ l^{-1}$. Comme $l \circ w \circ l$ est hermitienne, elle est diagonalisable à spectre réel et il en est donc de même de u qui lui est semblable.

Exercice 2. *(Tauvel p.418) Pour $n \geq 2$ et A hermitienne non nulle de taille n, montrez que A est définie positive ou négative si et seulement si pour toute matrice B hermitienne, AB est diagonalisable.*

Preuve : Le sens direct découle de l'exercice précédent. Supposons donc que pour toute matrice hermitienne B, AB est diagonalisable. Soit P unitaire telle que $A = PDP^*$ avec D diagonale réelle. Comme $AB = P(DP^*BP)P^{-1}$, on voit que AB est diagonalisable si et seulement si DP^*BP l'est. Par ailleurs comme P^*BP est hermitienne, on peut supposer $A = D$.

On se ramène aisément en dimension 2 avec $A = \mathrm{diag}(x^2, -y^2)$ avec x, y réels. Soient alors $B = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $y \neq 0$, on a $AB \neq 0$ et $(AB)^2 = 0$. Si $y = 0$ alors $AB' \neq 0$ et $(AB')^2 = 0$. Ainsi AB (resp. AB') est nilpotente non nulle et donc non diagonalisable.

Exercice 3. *(M-T p.219 ou M p.92) Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres d'une matrice complexe $A = (a_{i,j})$. Montrez que A est normale si et seulement si $\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$.*

Preuve : Rappelons que $\mathrm{Tr}(AA^*) = \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2$ est $U(n)$-invariante de sorte que si A est normale elle est alors unitairement semblable à la matrice diagonale des λ_i d'où le sens direct. Réciproquement toute matrice complexe est unitairement semblable à une matrice triangulaire T de diagonale formée des λ_i. L'égalité implique alors que les termes qui ne sont pas sur la diagonale sont nulle, i.e. que T est diagonale.

Exercice 4. *Montrer que A est normale si et seulement si* $\mathrm{Tr}(AA^*)^2 = \mathrm{Tr}A^2A^{*2}$.

Preuve : D'après l'exercice précédent, la matrice hermitienne $H = AA^* - A^*A$ est nulle si et seulement si $\mathrm{Tr}H^2 = 0$. Ainsi A est normale si et seulement si la trace de $(AA^*)^2 - A(A^*)^2A - A^*A^2A^* + (A^*A)^2$ est nulle. Or rappelons que $\mathrm{Tr}AB = \mathrm{Tr}BA$ de sorte que $\mathrm{Tr}(A^*A)^2 = \mathrm{Tr}(AA^*)^2$ et $\mathrm{Tr}A^*A^2A^* = \mathrm{Tr}A(A^*)^2A = \mathrm{Tr}A^2A^{*2}$, d'où le résultat.

Exercice 5. *A est normale si et seulement si A^* est un polynôme en A*

Preuve : La réciproque étant évidente, montrons le sens direct. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres pour A: $Ae_i = \lambda_i e_i$. De même on a $A^*e_i = \overline{\lambda_i} e_i$. On construit alors un polynôme interpolateur de Lagrange P tel que $P(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$ de sorte que $A^* = P(A)$.

Exercice 6. *Si A est normale, montrez que l'orbite de A sous l'action du groupe unitaire est homéomorphe à $U(n)/U(k_1) \times \cdots \times U(k_r)$.*

Preuve : Il suffit de remarquer que le centralisateur de A est isomorphe à $U(k_1) \times \cdots \times U(k_r)$ où les k_i sont les dimensions des sous-espaces propres.

Exercice 7. *Montrez que deux matrices sont unitairement équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes valeurs singulières*

Preuve : Le sens direct découle de $PAP^* = B$, $PA^*P^* = B^*$ soit $PAA^*P^* = BB^*$. Réciproquement, la décomposition polaire donne $A = H_AU_A$, $B = H_BU_B$ avec H_A, H_B hermitiennes définies positives, et U_A, U_B unitaires. On a donc $AA^* = H_AH_A^*$ et $BB^* = H_BH_B^*$. Les matrices H_A, H_B sont diagonalisables de sorte que si AA^* et BB^* ont même valeurs propres alors les valeurs propres de H_A sont égales à celles de H_B au signe près, soit $H_A = P_ADP_A^*$ et $H_B = P_BDD'P_B^*$ avec $D' = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ où les ϵ_i sont égaux à ± 1 de sorte que D' est unitaire. On a donc $D = P_B^*U_B^*BP_BD'$ et $A = U_AP_AP_B^*U_B^*BP_BD'P_A^*$ d'où le résultat.

Exercice 8. *(M-T p.187) Les matrices de Householder sont exactement les matrices de $U(n)$ qui sont hermitiennes de signature $(n-1, 1)$.*

Preuve : Rappelons qu'une matrice de Householder associée au vecteur colonne $v \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ est $H(v) = I - 2\frac{vv^*}{v^*v}$. La matrice vv^* est hermitienne de rang 1; ses valeurs propres sont 0 à l'ordre $n-1$ et $\mathrm{Tr}(vv^*) = v^*v$. Ainsi les valeurs propres de $H(v)$ qui est clairement hermitienne et unitaire sont 1 à l'ordre $n-1$ et -1 à l'ordre 1.

Réciproquement si H est une matrice hermitienne unitaire, ses valeurs propres sont réelles de module 1; vu l'hypothèse sur la signature et le fait que H est diagonalisable dans une base orthonormée $H = UDU^*$ avec $D = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$, c'est à dire $H = UH(e_1)U^{-1} = H(U(e_1))$.