Matrices semblables, matrices équivalentes: applications

Plan

Remarque d'ordre général: il ne faut pas traiter la leçon *Réduction des endomorphismes*. Dans l'idéal, il faut se concentrer sur les classes d'équivalences, de similitude et de congruence: les caractériser, faire le lien entre les deux notions, étudier les orbites (leur nature topologique (ouvertes, fermées, bornées, leur adhérence...), quelles sont les classes de familles particulières que l'on peut y trouver: les matrices diagonales, triangulaires, symétriques, normales...). Bien sûr, il faut parler des invariants de similitude mais à mon avis il ne faut pas se disperser et traiter tout ce que vous savez sur la réduction des endomorphismes: cela dit vous ne pouvez parler que de ce que vous connaissez sinon la séance de questions risque d'être mouvementée. Par exemple vous pouvez dire que les motivations de votre plan sont: donner des critères pour savoir si deux matrices sont équivalentes ou semblables, étudier les classes d'équivalence et de similitude pour elles-mêmes: y trouver des éléments particuliers (matrices diagonales, triangulaires, tridiagonales, symétriques, normales...), décrire leur nature topologique.

- Après avoir donné les définitions de matrices équivalentes et matrices semblables, il faut immédiatement donner l'interprétation en termes de changement de base. En termes d'action de groupe, le problème est de caractériser chacune des orbites.

- Pour ce qui est des classes d'équivalence:

  - sur un corps, elles sont données par le rang. En application, on peut citer le calcul du rang, ou la caractérisation de l'image d'un endomorphisme (ou de manière équivalente, la résolution d'une équation matricielle $AX = B$ avec A pas forcément inversible);
  - sur un anneau principal, elles sont données par les suites $a_1|a_2|\cdots|a_r \neq 0$. En application on citera le théorème de la base adaptée, la classification des groupes abéliens de type fini;
  - on pourra étudier les propriétés topologiques des classes d'équivalences: l'ensemble des matrices complexes (resp. réelles) de rang $r \leq n$ (resp. $r < n$) est connexe et son adhérence est l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égale à r (resp. vraie aussi pour $r = n$).
  - On pourra se lancer dans l'étude des matrices unitairement (resp. orthogonalement) équivalentes, ce qui correspond à la décomposition de Cartan $G = KAK$. Le résultat est que deux matrices sont unitairement équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes valeurs singulières (ce sont les valeurs propres de AA^*. Dans le cas réel, on notera que les valeurs singulières sont en fait les longueurs des demi-axes de l'hyper-ellipsoide image par A de la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. On notera que ces résultats correspondent en fait à la décomposition polaire.

- Pour ce qui est des classes de similitude:

  - la trace des puissances de A, le polynôme caractéristique et minimal (donc les valeurs propres) sont des invariants qui sont insuffisants à caractériser les classes de similitude. En imposant des restrictions à A on peut mentionner:
    * pour les projecteurs, le rang ou la trace caractérise la classe de similitude (i.e. classes d'équivalences et de similitudes se confondent);
    * pour les matrices diagonalisables ou plus généralement semi-simples, la classe de similitude est déterminée par le polynôme caractéristique; ou encore deux matrices diagonalisables sont semblables si et seulement si $trA^k = \mathrm{Tr}\, b^k$ pour tout $1 \leq k \leq n$.
    * les classes de similitude des dilatations sont déterminées par le déterminant;
    * les transvections forment une seule classe de similitude (les invariants de similitudes sont $(X-1), \cdots, (X-1), (X-1)^2$.
  - en introduisant la structure de $K[X]$-module sur V induite par un endomorphisme, on obtient que deux matrices A, B sont semblables si et seulement si $A - X\mathrm{Id}$ et $B - X\mathrm{Id}$ sont équivalentes sur $K[X]$;
  - évoquer le changement de corps: si A et B deux matrices à coefficients dans K sont semblables vues comme matrices dans une extension finie, sont alors semblables sur K.

- deux matrices complexes A, B sont semblables si et seulement si $\dim(A-\lambda \mathrm{Id})^k = \dim(B-\lambda \mathrm{Id})^k$ pour tout k; autrement dit si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $1 \leq k \leq n$, les matrices $(A-\lambda \mathrm{Id})^k$ et $(B-\lambda \mathrm{Id})^k$ sont équivalentes. En particulier pour des matrices nilpotentes, si et seulement si A^k et équivalente à B^k pour tout $1 \leq k \leq n-1$;
- en application on donnera la décomposition en somme directe de sous-espaces cycliques (indécomposables);
- on pourra étudier les classes de similitudes des endomorphismes nilpotents (réduction de Jordan);
- sur $\mathbb{C}$, toute classe de similitude contient une matrice symétrique;
- sur $\mathbb{R}$, pour qu'une classe de similitude contienne des matrices symétriques, il faut et il suffit qu'elle contienne une matrice diagonale.
- en ce qui concerne les propriétés topologiques des classes de similitude on pourra citer:
  * sur $\mathbb{C}$, une classe de similitude est connexe; si elle est bornée alors elle est réduite à un point.
  * Soit $M = S + N$ la décomposition de Dunford de M en semi-simple plus nilpotent. Montrez que S est dans l'adhérence de la classe de similitude de M.
  * f est diagonalisable si et seulement si son orbite est fermée
  * L'adhérence de l'orbite d'un bloc de Jordan de taille maximale est l'ensemble des nilpotents, et plus généralement décrire l'ordre de Chevalley sur les orbites nilpotentes, défini par $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2$ si et seulement si $\mathcal{O}_1$ est dans l'adhérence de $\mathcal{O}_2$: celui-ci correspond à l'ordre habituel sur les tableaux de Young.
- Afin d'étudier les formes quadratiques on est amené à étudier les classes de congruence: A et B sont dites congruentes s'il existe P inversible telle que $A = {}^tPBP$. On remarquera que contrairement au classe de similitude, le caractère symétrique ou anti-symétrique se conserve par congruence: évoquez la signature et la classification des coniques (projectives, affines, euclidiennes)
- Si dans la définition de congruence on impose à la matrice P d'être orthogonale (resp. unitaire), alors A et B sont à la fois semblables et congruentes: cela correspond à un changement de base orthogonale.
- deux matrices réelles unitairement semblables sont orthogonalement semblables: en application on pourra donner la réduction des matrices orthogonales à partir de celle des matrices unitaires; en application $SO(n)$ est connexe par arcs (idem avec $SU(n)$);
- toute orbite sous le groupe unitaire contient une matrice triangulaire, celles qui contiennent des matrices diagonales sont les orbites des matrices normales

- Vous pouvez ensuite faire un paragraphe sur l'effectivité:
  - en ce qui concerne les classes d'équivalence sur un anneau factoriel, on dispose d'un algorithme via les relations de Bézout $ua + vb = 1$ et les matrices $\begin{pmatrix} u & -b \\ v & a \end{pmatrix}$ de $SL_2(A)$;
  - toute matrice est semblable à une matrice de Hessenberg: dans la méthode QR de localisation des valeurs propres si A est de Hessenberg alors tous les A_k aussi ce qui raccourcit les temps de calcul;
  - étant donnée une matrice symétrique A, il existe une matrice P produit de $(n-2)$ matrices de Householder, telle que ${}^tPAP$ soit tridiagonale (Ciarlet p.120). En appliquant alors la méthode de Givens, on obtient des valeurs approchées des valeurs propres: les polynômes caractéristiques des mineures principaux forment une suite de Sturm ce qui permet de localiser les racines aussi précisément que l'on veut par exemple par dichotomie (Ciarlet p.123).

Développements

- Les facteurs invariants version algorithmique;
- A et B sont semblables si et seulement si $A - X\mathrm{Id}$ et $B - X\mathrm{Id}$ sont équivalentes;
- l'adhérence de la classe de similitude d'une matrice nilpotente;

- réduction des matrices symétriques réels: signature
- la classe de similitude de A est fermée (resp. bornée) si et seulement si A est diagonalisable (resp. A est scalaire);

Questions

- Montrez qu'une matrice complexe M est semblable à une matrice réelle si et seulement si elle est semblable à sa conjuguée.
- Montrez que le rang classifie les classes de congruence des matrices symétriques complexes.
- Montrez que si un ouvert de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ contient les matrices diagonales et est stable par similitude, alors il est égal à $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tout entier.
- Montrez que sur $\mathbb{C}$ (resp. sur $\mathbb{R}$) l'ensemble des matrices de rang $r \leq n$ (resp. $r < n$) est connexe et son adhérence est l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égale à r (resp. vraie aussi pour $r = n$)
- Montrez que sur $\mathbb{C}$, toute classe de similitude contient une matrice symétrique et que sur $\mathbb{R}$, pour qu'une classe de similitude contienne des matrices symétriques, il faut et il suffit qu'elle contienne une matrice diagonale.
- Montrez que deux matrices réelles unitairement semblables sont orthogonalement semblables.
- Montrez que toute orbite sous le groupe unitaire contient une matrice triangulaire, celles qui contiennent des matrices diagonales sont les orbites des matrices normales
- Quelles sont les classes de similitudes bornées?
- Montrez que si une classe de similitude de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ n'est constituée que de matrices normales, elle est alors réduite à un seul élément. Même question si on suppose que la classe de similitude ne contient qu'un nombre fini de matrices normales.

Exercices corrigés

Exercice 1. *Montrez qu'une matrice complexe M est semblable à une matrice réelle si et seulement si elle est semblable à sa conjuguée.*

Preuve : Notons déjà qu'une matrice M est semblable à une matrice réelle si et seulement si pour toute racine complexe λ de son polynôme caractéristique réel, l'ensemble des blocs de Jordan relativement à λ sont en bijection avec celui relativement à $\bar{\lambda}$. Dans le sens direct c'est clair, réciproquement on notera que $\begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{pmatrix}$ où A, B sont des matrices réelles, est semblable à la matrice réelle $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$. Le résultat découle alors directement de la description des classes de similitude complexe via les blocs de Jordan.

Exercice 2. *Montrez que sur $\mathbb{C}$, toute classe de similitude contient une matrice symétrique et que sur $\mathbb{R}$, pour qu'une classe de similitude contienne des matrices symétriques, il faut et il suffit qu'elle contienne une matrice diagonale. En déduire en particulier que l'ensemble des matrices symétriques d'une classe de similitude est compacte connexe.*

Preuve : Sur $\mathbb{C}$, en utilisant la théorie de la réduction, on est ramené au cas d'un bloc de Jordan J_n. Il s'agit donc de trouver P telle que $PJ_nP^{-1} = {}^tP^{-1}{}^tJ_n{}^tP$ ou encore $({}^PP)J_n({}^tPP)^{-1} = {}^tJ_n$. Quand P varie, les matrices ${}^tPP$ décrivent toutes les matrices symétriques inversibles (en effet le rang classifie les classes de congruence des matrices symétriques complexes). On est ainsi ramené à trouver une matrice symétrique inversible qui conjugue J_n et sa transposée et on vérifie que la matrice co-unité convient, i.e. celle dont les seuls coefficients non nuls ceux de la co-diagonale qui valent 1.

Sur $\mathbb{R}$, les matrices symétriques réelles étant diagonalisables, la condition est nécessaire; la réciproque est triviale. Ainsi la classe de similitude est fermée et son intersection avec l'ensemble des matrices symétriques est alors une orbite sous l'action de $SO(n)$ d'où le résultat.

Exercice 3. *Montrez que l'ensemble des matrices de rang r est connexe et son adhérence est l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égale à r.*

Preuve : Sur $\mathbb{C}$ on a une surjection $GL_n(\mathbb{C})^2$ sur l'ensemble des matrices de rang r: on envoie (P,Q) sur PI_rQ où I_r est la matrice diagonale dont les r premiers termes sont égaux à 1, les autres étant nuls. La conclusion découle de la connexité de $GL_n(\mathbb{C})$. Sur $\mathbb{R}$, pour $r<n$, on remarque que $PI_rQ = P'I_rQ = PI_rQ' = P'I_rQ'$, où P' (resp. Q') est obtenue à partir de P en multipliant sa dernière ligne (resp. colonne) par -1 de sorte que parmi P, P' (resp. Q, Q') une exactement appartient à $GL_n(\mathbb{R})^+$ qui est connexe. On rappelle par ailleurs que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe; ses composantes connexes étant $GL_n(\mathbb{R})^{\pm}$.

En ce qui concerne l'adhérence, on note que $\mathrm{diag}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_r, 0, \cdots, 0)$ est équivalente à I_r puisque de même rang, de sorte que l'adhérence contient l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à r. Par ailleurs ce dernier ensemble est fermé puisqu'il correspond à l'annulation de tous les mineures d'ordre $r+1$.

Exercice 4. *Quelles sont les classes de similitudes bornées?*

Preuve : En conjuguant M par $I_n + \lambda E_{i,j}$ on obtient

$$(I_n + \lambda E_{i,j})M(I_n - \lambda E_{i,j}) = M + \lambda(E_{i,j}M - ME_{i,j}) + \lambda^2 E_{i,j}ME_{i,j}$$

L'orbite étant bornée, il faut en particulier que $E_{i,j}ME_{i,j} = m_{i,j}E_{i,j}$ soit nul et donc que M soit diagonale ainsi que toutes les matrices de son orbite. Or les matrices diagonales d'une même classe de similitude sont en nombre fini (sur la diagonale, on trouve les valeurs propres) de sorte que l'orbite est finie, comme elle est connexe, elle est alors réduite à un point.

Si on ne veut pas évoquer la connexité, on regarde pour T triangulaire inférieure ou supérieure, $TDT^{-1} = D$ de sorte que D commute avec toutes les triangulaires et donc avec leurs sommes et donc D est dans le centre ce qui donne D scalaire.

Exercice 5. *Montrez que si une classe de similitude de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ n'est constituée que de matrices normales, elle est alors réduite à un seul élément. Même question si on suppose que la classe de similitude ne contient qu'un nombre fini de matrices normales.*

Preuve : Deux matrices normales sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme caractéristique, elle sont alors unitairement semblables de sorte que la classe de similitude est bornée, on applique alors l'exercice précédent.

De la connexité de $U(n)$ on en déduit que l'ensemble des matrices normales dans une classe de conjugaison est connexe de sorte que s'il est fini il est réduit à un unique élément qui commute avec $U(n)$ et qui est donc scalaire.

Exercice 6. *Montrez que toute orbite sous le groupe unitaire contient une matrice triangulaire, celles qui contiennent des matrices diagonales sont les orbites des matrices normales*

Preuve : Pour une matrice complexe M, on choisit par le procédé de Gramm-schmidt, dans un drapeau complet stable une base adaptée orthonormée ce qui fournit une matrice de passage unitaire P telle que PMP^* soit triangulaire. Si celle-ci est diagonale alors $M = P^*DP$ et donc $M^* = P^*D^*P$ commute avec M car D^* et D commutent: ainsi M est normale. Réciproquement si M est normale alors elle est diagonalisable en base orthonormée.

Exercice 7. *Montrez que deux matrices sont unitairement équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes valeurs singulières*

Preuve : Le sens direct découle de $PAP^* = B$, $PA^*P^* = B^*$ soit $PAA^*P^* = BB^*$. Réciproquement, la décomposition polaire donne $A = H_AU_A$, $B = H_BU_B$ avec H_A, H_B hermitiennes définies positives, et U_A, U_B unitaires. On a donc $AA^* = H_AH_A^*$ et $BB^* = H_BH_B^*$. Les matrices H_A, H_B sont diagonalisables de sorte que si AA^* et BB^* ont même valeurs propres alors les valeurs propres de H_A sont égales à celles de H_B au signe près, soit $H_A = P_ADP_A^*$ et $H_B = P_BDD'P_B^*$ avec $D' = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ où les ϵ_i sont égaux à ± 1 de sorte que D' est unitaire. On a donc $D = P_B^*U_B^*BP_BD'$ et $A = U_AP_AP_B^*U_B^*BP_BD'P_A^*$ d'où le résultat.

Exercice 8. *Montrez que si un ouvert de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ contient les matrices diagonales et est stable par similitude, alors il est égal à $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tout entier.*

Preuve : Soit F le fermé complémentaire; s'il était non vide il contiendrait une matrice $M = S + N$, sa décomposition de Dunford, et contiendrait aussi sa partie semi-simple S, laquelle est dans l'adhérence de la classe de similitude de M, d'où la contradiction.

Exercice 9. *Décrivez l'adhérence de l'orbite d'un bloc de Jordan*

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve : On va montrer que cette adhérence est l'ensemble des matrices nilpotentes. Rappelons que d'après la décomposition de Jordan, tout matrice nilpotente est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec sur la diagonale des blocs de Jordan de taille distinctes $J(n_1, \cdots, n_r) := \mathrm{diag}(J_{n_1}, \cdots, J_{n_r})$ avec $\sum_i n_i = n$. On remarque alors que J_n est semblable à

$$\begin{pmatrix} J_{n_1} & \epsilon E_{n_1,n_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \epsilon E_{n_2,n_3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & J_{n_{r-1}} & \epsilon E_{n_{r-1},n_r} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & J_{n_r} \end{pmatrix}$$

où $E_{i,j}$ est la matrice de taille $i \times j$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui du coin en bas à gauche qui vaut 1, et où $\epsilon > 0$. En faisant tendre ϵ vers zéro on en déduit que $J(n_1, \cdots, n_r)$ est dans l'adhérence de l'orbite de J_n.

Exercice 10. *Soit $M = S + N$ la décomposition de Dunford de M en semi-simple plus nilpotent. Montrez que S est dans l'adhérence de la classe de similitude de M.*

Preuve : Cela découle simplement du fait que 0 est dans l'adhérence de la classe de similitude de N.

Exercice 11. *Montrez que sur un corps algébriquement clos, deux matrices A et B sont semblables si et seulement si, pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $k \geq 0$, on a $\mathrm{rg}(A - \lambda I)^k = \mathrm{rg}(B - \lambda I)^k$.*

Preuve : A partir de la forme de Jordan, on rappelle que pour $k \geq 1$, $d_k(A) := \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^k - \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda)^{k-1}$ est égal au nombre de bloc Jordan pour la valeur propre λ qui sont de taille plus grande que k. D'après le théorème du rang, pour tout $k \geq 1$, on a $d_k(A) = d_k(B)$ de sorte que A et B ont les mêmes réduites de Jordan et sont donc semblables.

Exercice 12. *Montrez que deux matrices réelles unitairement semblables sont orthogonalement semblables.*

Preuve : On a $A = UBU^{-1}$ et ${}^tA = U^tBU^{-1}$. On rappelle que deux matrices réelles qui sont semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{C}$. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P^tBP^{-1}$. Soit $P = OS$ la décomposition polaire de P et $A = OSB^{-1}B^{-1}o^{-1}$. Le résultat découle alors du fait que B et S commutent: en effet on a $PBP^{-1} = A = {}^t({}^tA) = {}^tP^{-1}B^tP$. Ainsi B commute avec ${}^tPP$ donc aussi avec S qui est un polynôme en ${}^tPP$.
Remarque: Comme application, on pourra en déduire la réduction des isométries, à partir de la diagonalisation des endomorphismes unitaires.