Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications

Plan

Remarque d'ordre général: il ne s'agit pas de faire la leçon *Réduction des endomorphismes*, il faut donc éviter de donner tout ce que vous savez sur le sujet. La leçon et tous les résultats que vous donnerez doivent l'être sous l'optique des sous-espaces stables. Dans l'idéal, il faut partir de la problématique: les sous-espaces stables quels sont-ils? Comment les trouver tous? Quels sont les endomorphismes dont l'ensemble des sous-espaces stables vérifie telle propriétés?...

A mon avis, il faut dès le début préciser les notions que l'on suppose connues (rapport endomorphismes-matrices, notions de valeurs propres, polynôme caractéristique, polynôme minimal, espaces caractéristiques et plus généralement admettre toute la théorie de la réduction générale) afin de se concentrer sur le sujet. C'est donc a vous de bien préciser les choses.

- Après avoir précisé les notions connues, faites un premier paragraphe: *généralités et premières propriétés* dans lequel vous donnerez la définition d'un sous-espace stable, de l'endomorphisme induit, les premiers exemples (noyau, image), le lemme des noyaux qui vous donnera vos prochains exemples (sous-espace propre et caractéristique). Vous remarquerez ensuite que l'ensemble des $\operatorname{Ker} P(u)$ et l'ensemble des $\operatorname{Im} Q(u)$ donnent les mêmes sous-espaces stables et que ceux-ci sont en nombre fini de sorte que la liste ne peut être complète (si un sous-espace propre est de dimension supérieure ou égale à 2 alors il y a une infinité de droites propres (si le corps est infini!)).

- Il est bon de faire le lien avec la dualité: F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par $f^\perp$. Dans le cas d'un espace euclidien (resp. hermitien) où la structure euclidienne (resp. hermitienne) donne un isomorphisme canonique entre E et son dual, si F est stable par f alors $F^\perp$ est stable par f^*: en particulier si f est normal si F est stable par f alors $F^\perp$ est stable par f.

- Dans un deuxième paragraphe, vous présenter la théorie de la réduction sous l'angle des sous-espaces stables. Étant donné un endomorphisme u d'un espace vectoriel V:

  - introduisez la notion d'espace u indécomposable, i.e. que l'on ne peut pas écrire sous la forme comme une somme directe de deux sous-espaces stables stricts; u est alors indécomposable si et seulement si son polynôme caractéristique est la puissance d'un irréductible.
  - Dans la direction opposée, u est dit semi-simple si tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable; u est semi-simple si et seulement si son polynôme minimal est premier avec sa dérivée. Sur un corps algébriquement clos, semi-simple=diagonalisable, sur $\mathbb{R}$ un endomorphisme semi-simple est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont soient de dimension 1 soit de dimension 2 de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

  Ainsi la théorie de la réduction s'exprime alors comme suit:

  - le théorème des invariants de similitude donne une décomposition de V en une somme directe de sous-espaces stables indécomposables.
  - Dans le cas d'un endomorphisme nilpotent, on a la décomposition de Jordan.
  - La décomposition de Dunford permet d'écrire tout endomorphisme comme la somme d'un semi-simple plus d'un nilpotent qui commutent et qui sont des polynômes en u.

- on pourra alors évoquer le problème de trouver les invariants de similitude d'un sous-espace stable: on pourra évoquer le cas de $\operatorname{Ker} P(u)$, le cas cyclique puis semi-simple.

- parler aussi des endomorphismes normaux (auto-adjoints, unitaires, isométries vectorielles).

- Dans une dernière partie, on peut revenir sur la problématique en suivant par exemple le questionnement suivant:
  - Que peut-on dire sur la dimension des sous-espaces stables? Par exemple sur la dimension minimale d'un sous-espace stable, sur $\mathbb{C}$ on obtient 1, sur $\mathbb{R}$, 1 en dimension impaire et 2 en général en dimension paire (pensez aux rotations), alors que sur $\mathbb{Q}$ il existe des endomorphismes simples en toute dimension.
  - Quels sont les u qui stabilise tous les sous-espaces de dimension $r < n$? (les homothéties)
  - Quels sont les u qui n'admettent pas de sous-espaces stables?
  - Quels sont les u qui n'admettent qu'un nombre fini de sous-espaces stables?
  - Quels sont les u dont tous les sous-espaces stables sont de la forme $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ pour P un polynôme?
  - Dans le cas cyclique, on connaît toute la liste des sous-espaces stables. On pourra aussi traiter le cas diagonalisable.
  - De manière générale on pourra évoquer voire traiter les faits simples suivant:
    * Soit E un K-espace vectoriel et F un sous-espace. Montrez que l'ensemble des supplémentaires de F dans E est un espace affine de direction $\hom_K(E/F, F)$.
    * Soit u un endomorphisme de E et soit F un sous-espace stable par u. Montrer que l'ensemble des supplémentaires de F stables par u est, quand il est non vide, un espace affine de direction le sous-espace vectoriel de $\hom_K(E/F, F)$ des s tels que $s \circ \bar{u} - u_{|F} \circ s = 0$.
    * Soit F un sous-espace stable sous M; on suppose qu'il existe un supplémentaire G stable $E = F \oplus G$. Donnez une CNS pour que G soit l'unique supplémentaire stable de F.
  - pour les isométries vectorielles en dimension 3, donner les sous-espaces stables;
  - pour les homographies du plan projectif réel, donner les points et les droites stables;
  - théorème de Maschke;
  - Drapeaux: il s'agit d'une suite de sous-espaces stables $(0) = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_r = V$. Dans le cas où $r = \dim V$, le drapeau est dit maximal et cela correspond à une trigonalisation. Plus généralement cela correspond aux matrices échelonnées. On pourra citer les résultats suivant:
    * si le polynôme caractéristique de u est scindé, alors il existe un drapeau maximal;
    * sur n'importe quel corps, on peut se ramener à une matrice de Hessenberg, ce qui correspond à $\dim V_1 = 2$ et $r = n - 1$;
    * l'espace étant muni d'un produit scalaire, le procédé de Gram-Schmidt permet, à partir d'une base adaptée à un drapeau de E, d'obtenir une base orthonormale adaptée à ce même drapeau. On peut alors introduire les groupes paraboliques, la décomposition de Bruhat, l'ordre de Bruhat...
    * Étant donné un drapeau, $\underline{V} := V_1 \subset \cdots, \subset V_r$, on peut considérer le gradué $Gr(\underline{V}) := V_1 \oplus V_2/V_1 \oplus \cdots \oplus V_r/V_{r-1}$ ainsi que $Gr(u)$. Pour un endomorphisme nilpotent, si on prend le drapeau donné par les $\operatorname{Ker} u^k$, $Gr(u)$ est alors nul. De manière générale en choisissant la filtration donnée par les noyaux emboités, on obtient que $Gr(u)$ est semi-simple.

Développements

- classification des homographies du plan projectif réel;
- théorème de Maschke;
- endomorphismes semi-simples;
- décomposition de Bruhat;
- mélange de questions sur les sous-espaces stables;
- les sous-espaces stables des endomorphismes cycliques;

- réduction des endomorphismes normaux;
- théorème de Engel
- théorème de Lie-Kochin

Questions

- A quelle condition u est-il indécomposable?
- Quels sont les u qui n'admettent pas de sous-espaces stables?
- Quels sont les u qui n'admettent qu'un nombre fini de sous-espaces stables?
- Quels sont les u dont tous les sous-espaces stables sont de la forme $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ pour P un polynôme?
- Dans le cas cyclique, donnez toute la liste des sous-espaces stables.
- Que peut-on dire des invariants de similitude d'un sous-espace stable? (regardez plus particulièrement le cas de $\operatorname{Ker} P(u)$, le cas cyclique puis semi-simple)
- Donnez la "liste" de tous les sous-espaces stables d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.
- Quels sont les u qui stabilise tous les sous-espaces de dimension $r < n$? (les homothéties)
- Soit E un K-espace vectoriel et F un sous-espace. Montrez que l'ensemble des supplémentaires de F dans E est un espace affine de direction $\hom_K(E/F, F)$.
- Soit u un endomorphisme de E et soit F un sous-espace stable par u. Montrer que l'ensemble des supplémentaires de F stables par u est, quand il est non vide, un espace affine de direction le sous-espace vectoriel de $\hom_K(E/F, F)$ des s tels que $s \circ \bar{u} - u_{|F} \circ s = 0$.
- Soit F un sous-espace stable sous M; on suppose qu'il existe un supplémentaire G stable $E = F \oplus G$. Donnez une CNS pour que G soit l'unique supplémentaire stable de F.
- La structure de l'ensemble des sous-espaces stables d'un élément de $O(3, \mathbb{R})$ permet-elle de déterminer sa classe de similitude?
- Pour les homographies du plan projectif réel, donner les points et les droites stables;
- Montrer que toute orbite sous le groupe unitaire contient une matrice triangulaire;
- Quels sont les drapeaux stables par une matrice générique donnée (A est générique quand ses valeurs propres sont distinctes).
- Étant donné un drapeau et le parabolique associé montrez que les sous-espaces stables par tous les éléments de sous-groupe parabolique sont ceux du drapeau.
- Soit u nilpotent et soit F un sous-espace stable par u tel que $E = \operatorname{Im} u + F$; montrez que $F = E$.
- Soit F un sous-espace u-stable tel que $F \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$ et $E = F + \operatorname{Im} u$. Que peut-on dire de u?

Exercices corrigés

Exercice 1. *Soit u un endomorphisme de $V \simeq K^n$ dont on note χ_u et π_u respectivement les polynômes caractéristique et minimal:*

(1) χ_u est irréductible si et seulement si V n'a pas de sous-espace stable par u;

(2) u est cyclique avec π_u une puissance d'un polynôme irréductible si et seulement si V est indécomposable sous u;

(3) *proposez un algorithme pour tester si u est semi-simple.*

Preuve : (1) Si V a un sous-espace stable W par u, en complétant une base de W en une base de V, la matrice de u y est diagonale par bloc et son polynôme caractéristique est divisible par celui de $u_{|W}$. Réciproquement si χ_u est de la forme PQ avec P et Q premier entre eux le lemme des noyaux décompose l'espace en une somme directe de $\operatorname{Ker} P(u)$ et de $\operatorname{Ker} Q(u)$. Si $\chi_u = P^r$ avec P irréductible, on a alors $E = \operatorname{Ker} P$ i.e. $\pi_u = P$. Si on prend x quelconque non nul, l'espace vectoriel engendre par $x, u(x), u^2(x), \cdots$ est donc au plus de dimension $\deg P$ (en fait on a égalité), et par hypothèse est donc égal à l'espace tout entier, i.e. $r = 1$.

(2) Dans le sens direct, en utilisant la structure de $K[X]$-module sur V induite par u, on a $V \simeq K[X]/(\pi_u)$. Si V était décomposable il serait en tant que $K[X]$-module isomorphe à un produit direct $K[X]/P_1 \times K[X]/P_2$, ce qui impose $P_1 = P^r$ et $P_2 = P^s$ avec P irréductible et $\pi_u = P^{r+s}$. Or le polynôme minimal de ce produit direct est visiblement $P^{\max(r,s)}$ soit donc $\min(r, s) = 0$.

Réciproquement si V est indécomposable alors u est cyclique. Par ailleurs si son polynôme minimal n'était pas une puissance d'un polynôme irréductible, alors le lemme des noyaux contredirait l'indécomposabilité de V.

(3) u est semi-simple si et seulement si π_u est sans multiplicité, i.e. est premier avec π'_u. On peut tester si u est semi-simple de manière algorithmique: on calcule le polynôme caractéristique χ_u et on teste si $\frac{\chi_u}{\chi_u \wedge \chi'_u}$ annule u.

Exercice 2. *Quels sont les endomorphismes complexes u qui ne possèdent qu'un nombre fini de sous-espaces stables?*

Preuve : On se place évidemment sur un corps infini. Il faut déjà que les sous-espaces propres soient de dimension 1 sinon, il y aurait une infinité de droite dans un de ces sous-espaces propres, qui sont bien évidemment stables.

Les sous-espaces propres étant de dimension 1, on en déduit que l'endomorphisme est cyclique (c'est vrai sur chaque sous-espace caractéristique, on applique ensuite le théorème chinois). L'espace muni de la structure de $K[X]$-module induite par u, est alors isomorphe à $K[X]/(P(X))$ et les sous-espaces stables sont en bijection avec les diviseurs de P.

Exercice 3. *Quels sont les endomorphismes u tels que tout sous-espace stable est de la forme* $\operatorname{Ker} P(u)$ *ou* $\operatorname{Im} P(u)$ *pour P un polynôme.*

Preuve : On peut déjà remarquer que les $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ décrivent un ensemble fini de sous-espaces: en effet si P est premier avec le polynôme minimal de u alors $\operatorname{Ker} P(u) = (0)$ et $\operatorname{Im} P(u) = E$. Comme dans la question précédente, il faut que les sous-espaces propres soient de dimension 1, et alors l'espace étant cyclique, les sous-espaces stables seront les $\operatorname{Ker} Q(X) = \operatorname{Im} \frac{P(X)}{Q(X)}$.

Exercice 4. *Étant donné un drapeau et le parabolique associé montrez que les sous-espaces stables par tous les éléments de sous-groupe parabolique sont ceux du drapeau.*

Preuve : Soit E un sous-espace stable et soit i tel que $V_i \subset E \subsetneqq V_{i+1}$. Supposons que $E \neq V_i$ et soit $x \in (V_{i+1} \backslash V_i) \cap E$ et soit $y \in V_{i+1} \backslash (V_i \cup E)$. Il existe alors $g \in P_W$ tel que $g_{|V_i} = \mathrm{Id}$ et $g(x) = y$. Or comme E est stable, on a $y \in E$ d'où la contradiction.

Exercice 5. *Donnez la "liste" de tous les sous-espaces stables d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.*

Preuve : L'identité, les retournements et les réflexions sont diagonalisables; on connaît alors la "liste" de leurs sous-espaces stables. En particulier on ne peut pas distinguer les retournements des réflexions. En ce qui concerne une rotation générique, elle est semi-simple et ne possède qu'une seule droite propre et donc aussi un seul plan propre (comme elle est semi-simple un plan propre possède un supplémentaire stable qui est donc l'unique droite propre et qui est en plus orthogonal au plan stable).

Exercice 6. *(1) Soit E un K-espace vectoriel et F un sous-espace. Montrez que l'ensemble des supplémentaires de F dans E est un espace affine de direction* $\hom_K(E/F, F)$*.*

(2) Soit u un endomorphisme de E et soit F un sous-espace stable par u. Montrer que l'ensemble des supplémentaires de F stables par u est, quand il est non vide, un espace affine de direction le sous-espace vectoriel de $\hom_K(E/F, F)$ *des s tels que $s \circ \bar{u} - u_{|F} \circ s = 0$.*

(3) Soit F un sous-espace stable sous M; on suppose qu'il existe un supplémentaire G stabke $E = F \oplus G$. Donnez une CNS pour que G soit l'unique supplémentaire stable de F.

Preuve : (1) On identifie les supplémentaires de F dans E avec les sections s de la surjection canonique $\pi : E \longrightarrow E/F$. L'espace affine des supplémentaires de F dans E est alors l'ensemble des solutions de l'équation linéaire avec second membre $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{E/F}$. La direction de cet espace affine est donc l'ensemble des s tel que $\pi \circ s = 0$ soit donc l'ensemble des $s' : E/F \longrightarrow F$.

(2) Un tel supplémentaire sera alors stable si et seulement si $s \circ \bar{u} - u \circ s = 0$. La direction est alors l'intersection des deux espaces vectoriels: $\pi \circ s = 0$ et $s \circ \bar{u} - u \circ s = 0$, soit le sous-espace de $\hom_K(E/F, F)$ des s tels que $s \circ \bar{u} - u_{|F} \circ s = 0$.

(3) D'après la question précédente, la direction de l'espace affine des supplémentaires stables de F est celle de l'espace vectoriel des matrices rectangulaires $X \in \mathbb{M}_{p,n-p}(K)$ telles que $AX - XB = 0$ avec $p = \dim F$. On va montrer qu'un condition nécessaire et suffisante est que les polynômes caractéristiques de A et B sont premiers entre eux.

Soit μ_A et μ_B les polynômes minimaux respectifs de A et B et soit Q un facteur irréductible de leur pgcd. D'après la théorie de la réduction, on peut décomposer F (resp. G) en sous-espace stable par A (resp. B) sous la forme $F_A \oplus F'_A$ (resp. $G_B \oplus G'_B$), tels que F_A (resp. G_B) est cycliques relativement à A (resp. B) de polynôme caractéristique Q. Soit alors $X : G \longrightarrow F$ défini comme suit: il induit un isomorphisme de G_B sur F_A et est nul sur G'_B. On a alors $AX = XB$.

Supposons que μ_A et μ_B sont premiers entre eux ce qui est équivalent au fait que leur polynôme caractéristique le sont. Par linéarité on a $\mu_A(A)X = X\mu_A(B) = 0$ d'après Cayley-Hamilton. Or comme μ_A est premier avec μ_B, une relation de Bézout $P_A\mu_A + P_B\mu_B = 1$ donne que $\mu_A(B)$ est inversible d'inverse $P_A(B)$ de sorte que X est nulle.