Boyer Pascal

DE L'ARITHMÉTIQUE À LA THÉORIE DES NOMBRES

Boyer Pascal

DE L'ARITHMÉTIQUE À LA THÉORIE DES NOMBRES

Boyer Pascal

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

ARITHMÉTIQUE DE $\mathbb{Z}$

I.1. Les entiers relatifs

I.1.1. Divisibilité. — Rappelons qu'un entier m divise un entier n s'il existe un entier q tel que $n = qm$. L'ensemble des diviseurs d'un entier n contient toujours ± 1 et $\pm n$; on peut ainsi distinguer ceux dont l'ensemble des diviseurs est de cardinal 4 ce qui nous conduit à la notion suivante :

Définition I.1.1. — Un entier $p > 1$ est dit premier [1] si ses seuls diviseurs sont $\pm 1, \pm p$.

Remarque : dans un cadre plus général, on parle plutôt d'élément irréductible, cf. la définition ??.

Proposition I.1.2. — *Tout entier $n \geq 2$ est divisible par un nombre premier ; il peut alors s'écrire comme un produit de nombres premiers.*

Remarque : cette propriété se généralise aux anneaux d'entiers, en revanche l'unicité de l'écriture que nous étudierons plus tard est plus rare.

Démonstration. — On procède par récurrence sur n ; le cas $n = 2$ est vrai car 2 est premier, supposons donc la proposition vérifiée pour tout $k < n$ et montrons qu'elle l'est pour n. Si n est premier c'est clair et sinon il existe un diviseur a de n avec $1 < a < n$ qui, d'après l'hypothèse de récurrence, possède un diviseur premier qui divise n. Le deuxième point se montre exactement de la même manière. □

Nous noterons alors $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers ; la question naturelle est alors de savoir si $\mathcal{P}$ est fini ou pas.

Théorème I.1.3. — ***(Euclide)*** *L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde et supposons que $p_1, \cdots, p_r = n$ sont les seuls nombres premiers ; soit alors $N = n! + 1$, (ou bien $N = (\prod_{p \leq n} p) + 1$). Comme $N > n$ alors N n'est pas premier et possède donc un diviseur premier p qui est donc $\leq n$ de sorte que $p | n!$ et donc aussi $N - n! = 1$ d'où la contradiction. □

1. Pour ceux qui préfèrent une définition plus imagée, selon Paul Erdös, ≪ un nombre premier est un nombre qui ne se casse pas quand on le laisse tomber par terre ≫

Remarque : nous verrons par la suite d'autres preuves de ce résultat. On peut par ailleurs se demander s'il l'ensemble des premiers de la forme $n! \pm 1$ est infini : à ce jour le résultat n'est pas connu. De la même façon on peut se demander si les nombres premiers de la forme $(\prod_{\mathcal{P} \ni q \leq p} q) \pm 1$ sont en nombre infini : à nouveau la réponse n'est pas connue.

Quand deux entiers n et $m \geq 0$ ne se divisent pas, on peut tout de même leur associer un couple de nombres (q, r) via la notion de *division euclidienne.*

Proposition I.1.4. — *Pour tout $n, m \geq 0$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que*

$$n = qm + r \text{ et } 0 \leq r < |m|.$$

L'entier q est le quotient et r le reste de la division euclidienne de n par m.

Démonstration. — Commençons par l'unicité : $mq + r = mq' + r'$ avec $0 \leq r, r' < |m|$ de sorte que $|m|.|q - q'| = |r - r'| < |m|$ et donc $q = q'$ puis $r = r'$. En ce qui concerne l'existence, considérons l'ensemble $A = \{n - km : \ k \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$ qui est clairement non vide. Notons $r \geq 0$ son plus petit élément avec $n = mq + r$. Si on avait $r \geq |m|$ alors $0 \leq r - |m| = n - m(q \pm 1) \in A$ ce qui contredit la minimalité de r. □

Remarque : l'unicité dans la division euclidienne est en général une anomalie et n'a en fait que peu d'intérêt. Signalons tout de même qu'elle permet d'écrire tout entier naturel n de manière unique sous la forme

$$n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b^k$$

où les a_k sont des entiers positifs $< b$ presque tous nuls. En effet on effectue la division euclidienne de $n = bq_0 + a_0$ par b, puis celle de $q_0 = bq_1 + a_1$ et ainsi de suite ce qui donne l'existence. Pour l'unicité, on reprend la preuve de l'unicité de la division euclidienne.

I.1.2. Sous-groupes de $\mathbb{Z}$. — Le corollaire suivant nous fournit une manière élégante et plus savante d'utiliser le fait qu'un sous-ensemble minoré de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément ; il suffit pour cela de considérer des sous-groupes et de prendre son générateur positif comme le justifie l'énoncé suivant.

Corollaire I.1.5. — *Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$.*

Démonstration. — Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$ et notons $A = H \cap \mathbb{N}^*$ qui est donc non vide, car si $h \in H$ alors $-h \in H$. Notons n le plus petit élément de A ; soit $h \in H$; on considère la division euclidienne $h = qn + r$ de h par n avec donc $0 \leq r = h - qn < n$ qui appartient à $H \cap \mathbb{N}$ et est donc nul par minimalité de n. Ainsi donc $H \subset n\mathbb{Z}$ et l'inclusion réciproque est évidente. □

Lemme I.1.6. — ***(d'Euclide)*** *Soit p premier divisant ab ; alors p divise a ou b.*

Démonstration. — Supposons que p ne divise pas a ; soit alors $A = \{n \in \mathbb{Z} : \ p|an\}$ qui est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$ car $p, b \in A$. D'après le corollaire précédent $A = m\mathbb{Z}$ avec donc $m|p \in A$ et donc $A = p\mathbb{Z}$ de sorte, comme $b \in A$, $p|b$, d'où le résultat. □

Théorème I.1.7. — ***(Factorialité de $\mathbb{Z}$)*** *Tout entier $n \geq 2$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$n = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r},$$

où les n_i sont des entiers naturels non nuls, et où les p_i sont des nombres premiers.

Démonstration. — L'existence découle de la proposition I.1.2 en regroupant les facteurs. En ce qui concerne l'unicité supposons que l'on ait $n = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r} = q_1^{m_1} \cdots q_s^{m_s}$ où les p_i, q_j sont premiers. D'après le lemme d'Euclide q_j est égal à l'un des p_i de sorte que $\{p_1, \cdots, p_r\} = \{q_1, \cdots, q_s\}$ et donc $r = s$. Supposons $n_1 < m_1$ alors en divisant n par $p_i^{n_i}$, on obtient que p_1 divise $p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$ ce qui contredit le lemme d'Euclide, d'où le résultat en raisonnant de même pour les autres indices. □

Définition I.1.8. — Soit p un nombre premier ; pour $n \in \mathbb{Z}$, *la valuation p-adique* de n est le plus grand entier k tel que p^k divise n de sorte que

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}.$$

Deux entiers *n et m sont dits premiers entre eux* si pour tout $p \in \mathcal{P}$, $v_p(n).v_p(m) = 0$.

Remarque : la valuation p-adique permet de définir une norme ultramétrique sur $\mathbb{Q}$ par la formule $|a/b|_p = p^{v_p(b)-v_p(a)}$; comme on a construit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ et de la valeur absolue, on peut alors construire la complétion $\mathbb{Q}_p$ de $\mathbb{Q}$ pour $|-|_p$.

Lemme I.1.9. — *(**de Gauss**) Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que a divise bc avec a premier avec b ; alors a divise c.*

Démonstration. — Il s'agit donc de montrer que pour tout $p \in \mathcal{P}$, $v_p(a) \leq v_p(c)$. Si $v_p(a) = 0$ c'est clair ; supposons donc $v_p(a) \geq 1$ auquel cas $v_p(b) = 0$ et le résultat découle alors du fait que $v_p(a) \leq v_p(bc) = v_p(b) + v_p(c)$. □

Remarque : si a et b sont premiers entre eux et divisent c alors ab divise c ; en effet on a $c = au$ avec d'après le lemme de Gauss b qui divise u. On notera bien que l'hypothèse est nécessaire puisque $a = b = 2$ divise $c = 2$ mais que 4 ne divise pas 2.
Application : soit p un nombre premier et $1 \leq k \leq p-1$; alors p divise $\binom{p}{k}$. En effet on a $k!\binom{p}{k} = p(p-1)\cdots(p-k+1)$ et comme p est premier avec $k!$ il divise donc $\binom{p}{k}$.

I.1.3. Plus grand diviseur commun. —

Définition I.1.10. — Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on note

$$a \wedge b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{v_p(a), v_p(b)\}}, \qquad a \vee b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\{v_p(a), v_p(b)\}}.$$

Remarque : comme $\min\{v_p(a), v_p(b)\} + \max\{v_p(a), v_p(b)\} = v_p(a) + v_p(b)$, on en déduit que $(a \wedge b).(a \vee b) = ab$.

Proposition I.1.11. — *L'entier $a \wedge b$ (resp. $a \vee b$) est le plus grand diviseur (resp. petit multiple) commun de a et b que l'on appelle encore le pgcd (resp. ppmc) de a et de b.*

Démonstration. — Comme pour tout $p \in \mathcal{P}$, $\min\{v_p(a), v_p(b)\} \leq v_p(a), v_p(b)$, on en déduit que $a \wedge b$ est un diviseur de a et de b. Par ailleurs si d divise a et b alors pour tout $p \in \mathcal{P}$, $v_p(d) \leq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$ de sorte que d divise $a \wedge b$, d'où le résultat. Le cas du ppcm se montre de la même façon. □

Remarque : a et b sont premiers entre eux au sens de la définition I.1.8 si et seulement si leur pgcd est égal à 1. Par ailleurs les entiers $\frac{a}{a \wedge b}$ et $\frac{b}{a \wedge b}$ sont premiers entre eux.

On vérifie aisément que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$; en ce qui concerne $a \wedge b$, on a le résultat suivant qui donne une autre caractérisation du pgcd.

Proposition I.1.12. — *Le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par a et b est $(a \wedge b)\mathbb{Z}$.*

Démonstration. — Notons n l'entier naturel tel que $n\mathbb{Z}$ est le groupe engendré par a et b ; comme a et b appartiennent à $n\mathbb{Z}$, on en déduit que $n|a$ et $n|b$ et donc $n|a \wedge b$. En outre n s'écrit sous la forme $ua + vb$ de sorte que $a \wedge b|ua + vb = n$ d'où le résultat. □

Remarque : on déduit de la proposition précédente **le théorème de Bézout**, i.e. il existe des entiers relatifs u, v tels que $a \wedge b = ua + vb$.

Que ce soit pour calculer $a \wedge b$ où les coefficients u, v d'une relation de Bézout, il n'est pas nécessaire de calculer la factorisation en facteurs premiers de a et b, on dispose heureusement de l'*algorithme d'Euclide* : on pose $r_0 = a$ et $r_1 = b$. On construit alors par récurrence r_{i+1} comme le reste de la division euclidienne de r_{i-1} par r_i si ce dernier et non nul et sinon $r_{i+1} = 0$. Comme la suite est strictement décroissante et positive, il existe un indice $n \geq 1$ tel que $r_n > 0$ et $r_{n+1} = 0$. On pose par ailleurs

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \text{ et } v_0 = 0, \quad v_1 = 1,$$

$$u_{i+1} = u_{i-1} - u_i q_i \text{ et } v_{i+1} = v_{i-1} - v_i q_i$$

où pour tout $i = 1, \cdots, n-1$, q_i est le quotient de la division euclidienne de r_{i-1} par r_i.

Proposition I.1.13. — *L'entier r_n est alors le pgcd de a et b avec $r_n = au_n + bv_n$.*

Démonstration. — Comme $r_{i-1} = q_i r_i + r_{i+1}$, alors $r_{i-1} \wedge r_i = r_i \wedge r_{i+1}$ et donc $a \wedge b = r_{n-1} \wedge r_n = r_n$ car $r_{n+1} = 0$. En ce qui concerne la relation de Bézout, il suffit de vérifier que pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a $r_i = au_i + bv_i$. C'est clairement vrai pour $i = 0, 1$ et supposons que pour $1 \leq k < n$, la relation soit vraie pour tout $i \leq k$. On a alors

$$r_{k+1} = r_{k-1} - q_k r_k = (u_{k-1}a + v_{k-1}b) - q_k(u_k a + v_k b) = au_{k+1} + bv_{k+1}$$

d'où le résultat. □

Remarque : Lamé a montré que si l'algorithme d'Euclide s'arrête au bout de n pas alors

$$a \geq (a \wedge b)F_{n+2}, \qquad b \geq (a \wedge b)F_{n+1}$$

où $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ est la suite de Fibonacci. Pour le montrer on raisonne par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant trivial ; le premier pas transforme (a, b) en $(b, c = a - qb)$ avec donc par hypothèse de récurrence $b \geq a \wedge bF_{n+1}$ et $c \geq a \wedge bF_n$ et donc $a \geq b + c \geq a \wedge b(F_n + F_{n+1}) = a \wedge bF_{n+2}$. On notera en particulier que le cas le pire est pour le couple (F_{n+1}, F_n).

Résolution de l'équation $ax + by = c$: si c n'est pas divisible par $a \wedge b$ l'équation n'a pas de solution ; sinon en divisant cette équation par $a \wedge b$, on se ramène au cas où a et b sont premiers entre eux. Considérons alors une relation de Bézout $au_0 + bv_0 = 1$; si $au + bv = 1$ est une autre relation de Bézout, on a alors $a(u - u_0) = b(v_0 - v)$ de sorte que d'après le lemme de Gauss il existe q tel que $u = u_0 + qb$ et $v = v_0 - qa$. Les solutions (x, y) s'obtiennent alors de la même manière à partir d'une solution particulière $(x_0, y_0) = (cu_0, cv_0)$ et donc $(x, y) = (x_0 + qb, y_0 - qa)$. En ce qui concerne les solutions positives, on renvoie à l'exercice **??**.

I.1.4. Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: congruences. —

Définition I.1.14. — Pour $n \in \mathbb{Z}$, on munit $\mathbb{Z}$ de la relation d'équivalence suivante :

$$x \sim_n y \Leftrightarrow n|x-y$$

et on note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence. On notera $\bar{x}$ la classe associée à $x \in \mathbb{Z}$, i.e. $\bar{x} = \{x + kn : \ k \in \mathbb{Z}\}$, de sorte que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \overline{n-1}\}$. Deux éléments x, y d'une même classe seront dits congrus modulo n et on le notera sous la forme $x \equiv y \mod n$.

Remarque : l'addition de $\mathbb{Z}$ munit l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'une structure de groupe ; en effet soit $\bar{x}, \bar{y}$ deux classes d'équivalence, on définit alors $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x_0 + y_0}$ où x_0 et y_0 sont des éléments quelconques de $\bar{x}$ et $\bar{y}$ respectivement. Le fait, trivial mais primordial, est que le résultat $\overline{x_0 + y_0}$ ne dépend pas du choix de x_0 et y_0. On notera

$$\varphi : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

la surjection dite canonique qui à un entier x associe sa classe d'équivalence $\bar{x}$.
Remarque : tout groupe cyclique de cardinal n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; en effet soit $G =< g >$ et considérons le morphisme $f : \mathbb{Z} \to G$ qui à 1 associe g. Par définition le noyau de f est $n\mathbb{Z}$ de sorte que f induit un isomorphisme $\bar{f} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq G$.

Proposition I.1.15. — *Tout sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est de cardinal d où d est un diviseur de n. Réciproquement pour tout $d|n$, il existe un unique sous-groupe d'ordre d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.*

Démonstration. — Le premier point est un cas particulier du théorème de Lagrange. Réciproquement soit H un sous-groupe de $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; considérons et $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow G/H$, où G/H est le groupe quotient de G par H. Le noyau de ϕ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ donc de la forme $d\mathbb{Z}$, contenant $\operatorname{Ker}\varphi = n\mathbb{Z}$, de sorte que d divise n. Ainsi H est cyclique, engendré par la classe de d ; son ordre est n/d. □

Corollaire I.1.16. — *Le groupe engendré par un élément $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le groupe engendré par $\overline{k \wedge n}$; il est de cardinal $\frac{n}{n \wedge k}$.*

Démonstration. — Comme k est un multiple de $k \wedge n$, on a l'inclusion $(k) \subset (k \wedge n)$. Réciproquement on écrit une relation de Bezout $uk + vn = n \wedge k$ de sorte que modulo n, $n \wedge k$ appartient au groupe engendré par k et donc $(k \wedge n) \subset (k)$. On en déduit alors que l'ordre de k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui est par définition le cardinal du groupe engendré par k, est $\frac{n}{n \wedge k}$. □

Remarque : un élément $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un générateur si et seulement si $k \wedge n = 1$; on notera $\varphi(n)$ le cardinal de l'ensemble des générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et donc aussi le cardinal des $1 \leq k \leq n$ premiers avec n.

Corollaire I.1.17. — *L'ensemble des éléments d'ordre $d|n$ (resp. d'ordre divisant d) dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est de cardinal $\varphi(d)$ (resp. d). Par ailleurs on a $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que si d ne divise pas n, il n'y a aucun élément d'ordre d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si d divise n, tous les éléments d'ordre d appartiennent au groupe engendré par $(\frac{n}{d})$ qui est isomorphe, en tant que groupe cyclique d'ordre d, à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Ainsi les éléments d'ordre d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont en bijection avec les éléments d'ordre d de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ qui sont en nombre $\varphi(d)$.

Cherchons maintenant les éléments d'ordre divisant d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui sont donc d'ordre divisant $d \wedge n$ et qui appartiennent au groupe engendré par $\frac{n}{n\wedge d}$ isomorphe à $\mathbb{Z}/(n \wedge d)\mathbb{Z}$. Ainsi, comme précédemment, les éléments d'ordre divisant d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont en bijection avec les éléments d'ordre divisant $n \wedge d$ de $\mathbb{Z}/(n \wedge d)\mathbb{Z}$, qui sont en nombre $n \wedge d$.

La dernière égalité découle du dénombrement des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ selon leur ordre. □

Théorème I.1.18. — ***(chinois)*** *Soient n et m des entiers premiers entre eux ; l'application $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ qui à un entier k associe sa classe modulo n et m, induit un isomorphisme*

$$\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Démonstration. — Considérons tout d'abord un élément k du noyau de sorte que n et m divise k et comme $n \wedge m = 1$, d'après le lemme de Gauss $nm|k$. Ainsi le noyau est contenu dans $nm\mathbb{Z}$, l'inclusion réciproque étant évidente de sorte que l'on a une injection de $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ qui est un isomorphisme par égalité des cardinaux. □

Remarque : il peut être utile de savoir déterminer un antécédent d'un couple $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Pour cela on part d'une relation de Bézout $un + vm = 1$ et on pose $k = unb + vma$; on vérifie aisément que comme $un \equiv 1 \mod m$ et $vm \equiv 1 \mod n$, on a $k \equiv a \mod n$ et $k \equiv b \mod m$.

Remarque : dans le cas où $n \wedge m = d$, le raisonnement précédant donne que le noyau est $n \vee m\mathbb{Z}$. L'image est clairement contenue dans

$$\{(a, b) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : \ d|a - b\}.$$

L'égalité des cardinaux nous que l'image est exactement l'ensemble ci-dessus. Un antécédent explicite se calcule comme précédemment à l'aide d'une relation de Bézout $d = uan + vm$ avec $x = b + \frac{a-b}{d}vm$.

I.1.5. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: petit théorème de Fermat. — L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est aussi muni d'une structure d'anneau déduite de celle de $\mathbb{Z}$; on note $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ le groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, i.e. l'ensemble des éléments inversibles muni de la multiplication.

Proposition I.1.19. — *Un élément $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ appartient à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ si et seulement s'il est un générateur additif de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En particulier $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est de cardinal $\varphi(n)$.*

Démonstration. — Par définition k est inversible si et seulement s'il existe k' tel que $kk' \equiv 1 \mod n$, i.e. s'il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $kk' + \lambda n = 1$ ce qui est équivalent à $k \wedge n = 1$ et donc k est un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. □

Remarque : comme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est monogène tout morphisme de source $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est déterminé par l'image de $\bar{1}$ de sorte qu'en particulier le groupe $\mathrm{aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Corollaire I.1.20. — *L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si $n = p$ est premier auquel cas on le notera $\mathbb{F}_p$.*

Théorème I.1.21. — ***(de Fermat)*** *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $k \wedge n = 1$, on a $k^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$.*

Démonstration. — Nous avons vu que le cardinal de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est égal à $\varphi(n)$ et comme l'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe, l'ordre de k divise $\varphi(n)$ et donc $k^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$. □

Proposition I.1.22. — *Pour $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, on a*

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1).$$

Démonstration. — Le théorème chinois donne un isomorphisme

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \simeq \prod_{i=1}^{r} (\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^\times;$$

le résultat découle alors du fait que le cardinal des $1 \leq k \leq p^\alpha$ divisible par p est de cardinal $p^{\alpha-1}$ et donc $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$. □

Nous allons à présent étudier la structure de groupe des $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ ce qui, d'après le lemme chinois, revient à décrire les $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$. Commençons par le cas où $\alpha = 1$ qui est un cas particulier du théorème suivant.

Théorème I.1.23. — *Soit K un corps commutatif et G un sous-groupe fini de $K^\times$; alors G est un groupe cyclique.*

Démonstration. — Notons n le cardinal de G et $P(X) = X^n - 1 \in K[X]$; comme K est un corps (commutatif) alors P admet au plus n racines dans K et comme, d'après le théorème de Lagrange, les n éléments de G sont des racines, P est totalement décomposé à racines distinctes dans K. Pour d un diviseur de n, de l'égalité

$$X^n - 1 = (X^d - 1)(\sum_{i=0}^{\frac{n}{d}-1} X^{id})$$

on en déduit que $X^d - 1$ est aussi totalement décomposé. Ainsi pour $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en facteurs premiers de n, il existe pour tout $i = 1, \cdots, r$ un élément de G d'ordre $p_i^{\alpha_i}$, i.e. une racine de $X^{p^{\alpha_i}} - 1$ qui n'est pas racine de $X^{p^{\alpha_i - 1}} - 1$. Le résultat découle alors du lemme suivant. □

Remarque : en utilisant la structure de $\mathbb{Z}$-module de type fini, on peut écrire $G \simeq \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z}$ avec $a_1 | \cdots | a_r$. En particulier tout élément de G est d'ordre divisant a_r de sorte que $X^{a_r} - 1$ aurait $\prod_{i=1}^{r} a_i$ racines. Comme ce nombre de racines est inférieur à a_r on en déduit que $r = 1$, d'où le résultat.

Lemme I.1.24. — *Soient G un groupe commutatif fini, $x, y \in G$ d'ordres respectifs a et b. Si a et b sont premiers entre eux alors xy est d'ordre ab.*

Démonstration. — D'après le théorème de Lagrange $H = (x) \cap (y)$ est d'ordre un diviseur de a et b et donc d'ordre 1. Comme $xy = yx$ on a $(xy)^{ab} = (x^a)^b (y^b)^a = 1$. Réciproquement si $(xy)^n = 1$ alors $x^n = y^{-n} \in H = \{1_G\}$ et donc $a|n$ et $b|n$ soit, comme $a \wedge b = 1$, $ab|n$ ce qui finit de prouver que xy est d'ordre ab. □

Proposition I.1.25. — *(i) Pour p premier impair et $m \geq 1$, $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.*
(ii) Pour $p = 2$ et $m \geq 2$, on a $(\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2^{m-2})$.

Commençons par établir une congruence utile.

Lemme I.1.26. — *Soit $k \geq 0$ alors*

(i) si p est un premier impair alors $(1+p)^{p^k} \equiv 1 + p^{k+1} \mod p^{k+2}$ *;*

(ii) $(1+4)^{2^k} \equiv 1 + 2^{k+2} \mod 2^{k+3}$.

Démonstration. — Le résultat découle simplement par récurrence de l'observation suivante : les coefficients binomiaux $\binom{p}{i}$ étant divisibles par p pour $0 < i < p$, une congruence $a \equiv b \mod p^k$ implique que $a^p \equiv b^p \mod p^{k+1}$. □

Démonstration. — (de la proposition)
Le cas (ii) du lemme précédent assure que la classe de 5 est d'ordre 2^{m-2} dans $(\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z})^\times$. Vérifions alors que le morphisme de groupes

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2^{m-2}\mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z})^\times$$

donné par $(p,q) \mapsto (-1)^p 5^q \mod 2^m$ est un isomorphisme ; comme les cardinaux sont égaux il suffit en fait de montrer qu'il est injectif. Si $(-1)^p 5^q \equiv 1 \mod 2^m$ alors modulo 4 il vient $p \equiv 0 \mod 2$. Ainsi on a $5^q \equiv 1 \mod 2^m$ et donc $q \equiv 0 \mod 2^{m-2}$, ce qui finit de prouver le cas (ii).

Considérons à présent le cas où p est impair. Le cas (i) du lemme précédent nous fournit que $1+p$ est d'ordre p^{m-1} modulo p^m. Soit alors $a \in \mathbb{Z}$ dont l'image dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ soit un générateur, i.e. soit d'ordre $p-1$. Ainsi l'ordre d de a dans $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$ est divisible par $p-1$ et $b := a^{\frac{d}{p-1}}$ est d'ordre $p-1$ dans $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$. Comme $(p-1) \wedge p = 1$, il résulte du lemme I.1.24 que $a(1+p)$ est d'ordre $(p-1)p^{m-1}$ et donc que $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$ est cyclique. □

Corollaire I.1.27. — *Soit p un nombre premier impair et n un entier divisant $p-1$. Alors $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est une puissance n-ième si et seulement si $a^{\frac{p-1}{n}} = 1$.*

Remarque : c'est une sorte de critère d'Euler généralisé.

Démonstration. — Si $a = b^n$ avec $b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, alors comme $b^{p-1} = 1$ on obtient bien $a^{\frac{p-1}{n}} = 1$. Réciproquement pour b un générateur de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, on a $a = b^k$ avec $b^{k\frac{p-1}{n}} = 1$ et donc $p-1$ divise $k\frac{p-1}{n}$ soit n divise k et donc $a = (b^{k/n})^n$. □

Définition I.1.28. — Un entier a dont la classe dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est appelée *une racine primitive modulo n.*

Remarque : si p est un nombre premier de Sophie Germain, i.e. de la forme $p = 2q+1$ avec q premier alors $a \neq \pm 1$ est un générateur si et seulement si $a^q \neq 1$ et donc égal à -1.
Remarque : modulo tout nombre premier impair p, il existe des racines primitives modulo p. Une conjecture célèbre due à E. Artin affirme que : *tout entier $a \neq -1$ qui n'est pas un carré, est une racine primitive modulo p pour une infinité de nombres premiers p.*

I.2. Quelques preuves de la loi de réciprocité quadratique

I.2.1. Énoncés. — On dit qu'un élément $a \in \mathbb{F}_p$ est un carré s'il existe $b \in \mathbb{F}_p$ tel que $a = b^2$.

Définition I.2.1. — Pour $p \geq 3$ premier, le symbole de Legendre $(\frac{n}{p})$ est défini par :

$$(\frac{n}{p}) = \begin{cases} 0 \text{ si } p \text{ divise n} \\ +1 \text{ si } n \text{ est un carré dans } \mathbb{F}_p \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque : l'application $x \in \mathbb{F}_p^\times \mapsto x^2 \in \mathbb{F}_p^\times$ est un morphisme de groupe multiplicatif, dont le noyau est $\{-1, 1\}$ et donc de cardinal 2 ; ainsi son image qui est l'ensemble $\mathbb{F}_p^{\times 2}$ des carrés de $\mathbb{F}_p^\times$ est de cardinal $(p-1)/2$. En particulier on interprète la restriction du symbole de Legendre à $\mathbb{F}_p^\times$ au morphisme naturel

$$\mathbb{F}_p^\times \longrightarrow \mathbb{F}_p^\times/\mathbb{F}_p^{\times 2} \simeq \{\pm 1\}.$$

On en déduit alors la multiplicativité du symbole de Legendre, i.e.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \qquad (\frac{ab}{p}) = (\frac{a}{p})(\frac{b}{p}).$$

Application : pour tout nombre premier impair p, on a

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) = 0.$$

Lemme I.2.2. — *(**Critère d'Euler**) Soit p un nombre premier ; pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\left(\frac{n}{p}\right) \equiv n^{\frac{p-1}{2}} \mod p.$$

Démonstration. — Remarquons déjà que la congruence est vraie si p divise n. Supposons donc que p ne divise pas n et donc que l'image de n modulo p appartient à $\mathbb{F}_p^\times$. D'après le petit théorème de Fermat, pour tout $x \in \mathbb{F}_p^\times$, on a $x^{p-1} = 1$ et donc $x^{(p-1)/2} = \pm 1$ pour tout $x \in \mathbb{F}_p^{\times 2}$. Ainsi si $x \in \mathbb{F}_p^{\times 2}$, x est une solution de l'équation $X^{(p-1)/2} = 1$ laquelle dans $\mathbb{F}_p$ possède au plus $(p-1)/2$ solutions. Ainsi d'après la remarque précédente, $\mathbb{F}_p^{\times 2}$ est exactement égal à l'ensemble des racines de l'équation $X^{(p-1)/2} = 1$ dans $\mathbb{F}_p$ et $(\frac{n}{p}) \equiv n^{(p-1)/2} \mod p$. □

Application : pour p un nombre premier impair, on a

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Le calcul explicite des symboles de Legendre se fait alors à partir de l'application précédente, du lemme de Gauss et de la loi de réciprocité quadratique.

Lemme I.2.3. — ***(de Gauss)*** *Pour tout p premier impair on a $(\frac{2}{p}) = (-1)^{(p^2-1)/8}$.*

Démonstration. — Soit A l'anneau quotient $\mathbb{F}_p[X]/(X^4+1)$. L'application $\mathbb{F}_p \to A$ qui à λ associe sa classe dans A, est un morphisme injectif d'anneaux, donc A contient un sous-anneau isomorphe à $\mathbb{F}_p$. En particulier, A est de caractéristique p, i.e. $p1_A = 0$, et donc le noyau du morphisme $\mathbb{Z} \to A$ qui à n associe $n1_A$ est $p\mathbb{Z}$.

Soit α la classe de X modulo (X^4+1) ; c'est un élément inversible de A. Posons $y = \alpha + \alpha^{-1} \in A$. On a $\alpha^4 + 1 = 0$, d'où $\alpha^2 + \alpha^{-2} = 0$, puis $y^2 = 2$. Par ailleurs, A étant de caractéristique p, on a

$$y^p = \alpha^p + \alpha^{-p}.$$

Supposons $p \equiv \pm 1 \mod 8$. L'égalité $\alpha^8 = 1$ entraîne alors $y^p = y$. Puisque p est impair, 2 est inversible dans A, et l'égalité $y^2 = 2$ entraîne qu'il en est de même de y. On en déduit que l'on a $y^{p-1} = 1$. Par suite, on obtient dans A les égalités

$$2^{\frac{p-1}{2}} = (y^2)^{\frac{p-1}{2}} = y^{p-1} = 1.$$

D'après le critère d'Euler, on a

$$\left(\frac{2}{p}\right) \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} \mod p,$$

d'où il résulte que l'on a $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$.

Supposons $p \equiv \pm 5 \mod 8$. Dans ce cas, on a

$$y^p = \alpha^5 + \alpha^{-5} = -\left(\alpha + \alpha^{-1}\right) = -y.$$

On a donc $y^{p-1} = -1$, ce qui entraîne par le même argument que celui utilisé ci-dessus, que $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$.

L'égalité à démontrer est alors une conséquence de ce qui précède, vu que $p^2 - 1$ est multiple de 16 si et seulement si $p \equiv \pm 1 \mod 8$. En particulier, 2 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv \pm 1 \mod 8$. □

Théorème I.2.4. — *Pour tout p, q premiers impairs, on a*

$$(\frac{p}{q})(\frac{q}{p}) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}.$$

Il y a plus de 200 preuves différentes de ce résultat ; Gauss fut le premier à en donner une démonstration, il en donna en fait 6 différentes. Dans le paragraphe suivant nous présenterons quelques unes d'entre elles.

Corollaire I.2.5. — *Soient n un entier tel que pour tout p premier sauf éventuellement un nombre fini, n est un carré modulo p. Alors n est un carré dans $\mathbb{Z}$.*

Démonstration. — Soit $p_1, \cdots, p_n$ tels que pour tout $p \neq p_i$, n est un carré modulo p. Supposons n sans facteur carré et distinct de $\pm 1, \pm 2$. On écrit $n = hl_1 \cdots l_k$ avec $h \in \{\pm 1, \pm 2\}$ et où les l_i sont premiers impairs distincts ($k \geq 1$). Il existe un entier naturel a tel que :

$$a \equiv 1 \mod 8p_1 \cdots p_n l_1 \cdots l_{k-1} \text{ et } a \equiv r \mod l_k$$

D'après la loi de réciprocité quadratique on a

$$(\frac{n}{a}) = (\frac{l_1 \cdots l_k}{a}) = \prod_i (\frac{a}{l_i}) = (\frac{1}{l_1}) \cdots (\frac{1}{l_{k-1}})(\frac{r}{l_k}) = -1$$

de sorte que a a un diviseur premier p distinct des p_i tel que $(\frac{n}{p}) = -1$, d'où la contradiction. □

Corollaire I.2.6. — *Soit p un nombre premier impair et soit n le plus petit entier naturel tel que $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$. On a alors*

$$n < 1 + \sqrt{p}.$$

Démonstration. — Soit m le plus petit entier naturel tel que $mn > p$; puisque p est premier on a donc $n(m-1) < p$ soit $mn - p < n$. D'après le caractère minimal de n, on a

$$1 = \left(\frac{mn-p}{p}\right) = \left(\frac{mn}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{n}{p}\right) = -\left(\frac{m}{p}\right).$$

Par suite on a $m \geq n$ et le résultat découle du fait que

$$(n-1)^2 < n(n-1) \leq n(m-1) < p.$$

□

Citons à ce propos la conjecture de Vinogradov :

Conjecture I.2.7. — *Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel ; pour tout nombre premier p assez grand, le plus petit entier naturel que ne soit pas un résidu quadratique modulo p est inférieur à p^ϵ.*

Par exemple, Hudson et Williams ont démontré en 1979 que si p impair n'est pas congru à 1 modulo 8, le plus petit entier naturel n qui ne soit pas un résidu quadratique modulo p est inférieur à $p^{\frac{2}{5}} + 12p^{\frac{1}{5}} + 33$. On a ainsi $n < 1,54p^{\frac{2}{5}}$ dès que p est plus grand que 10^7 et non congru à 1 modulo 8.

Définition I.2.8. — Soient m et n des entiers avec n impair positif. *le symbole de Jacobi* $(\frac{m}{n})$ se définit comme suit à partir du symbole de Legendre :

$$(\frac{m}{n}) = \prod_{i=1}^{r} (\frac{m}{p_i})$$

où $n = p_1 p_2 \cdots p_r$ est la décomposition de n en facteurs premiers (non nécessairement distincts). Par convention on pose aussi $(\frac{m}{1}) = 1$.

Remarque : $(\frac{m}{n})$ ne dépend que de la classe de m modulo n et coïncide avec le symbole de Legendre si n est premier. On notera toutefois que $(\frac{m}{n}) = 1$ n'implique pas en général que m est un carré modulo n comme le montre l'exemple suivant

$$(\frac{2}{15}) = (\frac{2}{3})(\frac{2}{5}) = (-1)(-1) = 1.$$

Son intérêt réside dans la proposition suivante qui fournit un algorithme efficace de $(\frac{m}{n})$.

Proposition I.2.9. — *Soient $m, m', n, n' \in \mathbb{Z}$ avec n, n' impairs positifs. On a*

$$(\frac{mm'}{n}) = (\frac{m}{n})(\frac{m'}{n}), \qquad (\frac{m}{nn'}) = (\frac{m}{n})(\frac{m}{n'}),$$

ainsi que

$$(\frac{-1}{n}) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \qquad (\frac{2}{n}) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}},$$

et si m est impair positif

$$(\frac{m}{n})(\frac{n}{m}) = (-1)^{\frac{n-1}{2}\frac{m-1}{2}}.$$

Démonstration. — La première égalité découle de la multiplicativité du symbole de Legendre et la seconde est évidente. Les autres découlent directement des propriétés similaires du symbole de Legendre et des congruences immédiates suivantes, pour $m, n \in \mathbb{Z}$ impairs :

- $\frac{n-1}{2} + \frac{m-1}{2} \equiv \frac{nm-1}{2} \mod 2$;
- si $n = \prod_i n_i$ et $m = \prod_j m_j$ alors $\sum_{i,j} \frac{n_i-1}{2}\frac{m_j-1}{2} \equiv \frac{n-1}{2}\frac{m-1}{2} \mod 2$;
- $n^2 \equiv 1 \mod 8$;
- $\frac{n^2-1}{8} + \frac{m^2-1}{8} \equiv \frac{n^2m^2-1}{8} \mod 2$.

□

Ainsi pour calculer $(\frac{m}{n})$ on procède comme suit :

(i) On cherche $-\frac{n-1}{2} \leq m' < \frac{n-1}{2}$ tel que $m \equiv m' \mod n$; on procède par division euclidienne.

(ii) On factorise m' sous la forme $\epsilon 2^a \tilde{m}$ avec $\tilde{m}$ impair et $\epsilon = \pm 1$.

(iii) On applique les propriétés du symbole de Jacobi :

$$(\frac{m}{n}) = \epsilon^{\frac{n-1}{2}}(\frac{2}{n})^a(-1)^{\frac{n-1}{2}\frac{\tilde{m}-1}{2}}(\frac{n}{m'}).$$

(iv) Si $\tilde{m} = 1$ c'est terminé sinon on reprend le procédé en notant que $\tilde{m} < n$ et $n \wedge \tilde{m} = 1$.

L'avantage de la méthode est qu'il n'est pas nécessaire de factoriser m', ce qui est à priori impossible dès que m' a plus de 200 chiffres, mais simplement d'en extraire la plus grande puissance de 2 ce qui est très rapide, surtout lorsque m' est écrit en base 2.

Nous avons vu que le symbole de Jacobi n'est pas du tout adapté à la question de savoir déterminer si un entier $n \in \mathbb{Z}$ est un carré modulo m. D'après le théorème chinois, il suffit de savoir traiter le cas où $m = p^\alpha$ avec p premier. On écrit alors $n = p^\beta n'$ avec $n' \wedge p = 1$: évidemment si $\beta \geq \alpha$ alors n est un carré modulo m. Si $\beta < \alpha$ alors n est un carré modulo m si et seulement si $\beta \equiv 0 \mod 2$ et n' est un carré modulo $p^{\alpha-\beta}$ ce qui ramène le problème à l'étude des carrés de $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \times \mathbb{Z}/p^{\alpha-1}\mathbb{Z}$.

Proposition I.2.10. — *Soit $\mathcal{P}'$ la réunion de l'ensemble des nombres premiers impairs et de $\{4, 8\}$. Un élément $n \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ est un carré si et seulement si son image dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est un carré pour tout $p \in \mathcal{P}'$ divisant m.*

Démonstration. — Bien entendu seule la réciproque pose question. D'après le théorème chinois on se ramène au cas où $m = p^\alpha$ avec $\alpha \geq 3$ si $p = 2$. Résonnons alors par récurrence sur α autrement dit par approximations successives. Commençons tout d'abord par le cas où p est impair. Supposons que $u^2 = m + p^\alpha k$ et considérons

$$(u + p^\alpha\delta)^2 \equiv u^2 + 2U\delta p^\alpha \equiv m + (k + 2u\delta)p^\alpha \mod p^{\alpha+1}.$$

Il suffit alors de choisir δ tel que $k + 2u\delta \equiv 0 \mod p$ ce qui est possible puisque, m et donc u sont premiers à p, de sorte que $\delta \equiv k(2u)^{-1} \mod p$ convient, on rappelle que $p \neq 2$.

Traitons alors le cas de $p = 2$ et supposons que $m \in (\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^\times$ est un carré modulo 8, i.e. $m \equiv 1 \mod 8$. Reprenons l'argument précédent, soit $u^2 = m + 2^\alpha k$ et calculons

$$(u + 2^{\alpha-1}\delta)^2 \equiv a + (k + u\delta)2^\alpha \mod 2^{\alpha+1}$$

car $2(\alpha - 1) \geq \alpha + 1$ puisque $\alpha \geq 3$. Comme u est impair, il suffit alors de prendre $\delta \equiv k \mod 2$. □

I.2.2. en utilisant les résultants. — Rappelons que la loi de réciprocité quadratique est une égalité entre deux signes ; l'idée est alors d'utiliser la relation

$$\mathrm{Res}(P, Q) = (-1)^{\deg P.\deg Q}\mathrm{Res}(Q, P)$$

et de choisir des polynômes P et Q de degré respectifs $\frac{p-1}{2}$ et $\frac{q-1}{2}$, où p et q sont des premiers impairs distincts, de sorte que

$$\mathrm{Res}(P, Q) = (\frac{p}{q}) \text{ et } \mathrm{Res}(Q, P) = (\frac{q}{p}).$$

Lemme I.2.11. — *Pour tout p premier impair, il existe un polynôme $Q_p \in \mathbb{Z}[X]$ tel que*

$$X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1 = X^{(p-1)/2}Q_p(X + \frac{1}{X}).$$

En outre modulo p on a

$$Q_p(Y) \equiv (Y - 2)^{\frac{p-1}{2}} \mod p.$$

Démonstration. — En posant $Y = X^{-1}$, le membre de gauche est égal à $X^{(p-1)/2} + \cdots + X + 1 + Y + \cdots + Y^{(p-1)/2}$, de sorte que d'après le théorème sur les polynômes symétriques, il existe $R \in \mathbb{Z}[X, Y]$ tel que le terme précédent est égal à $R(X + Y, XY)$, d'où le résultat en notant que $XY = 1$. Raisonnons alors modulo p :

$$\begin{aligned} X^{p-1} + \cdots + X + 1 &\equiv (X-1)^{p-1} \\ &\equiv (X^2 - 2X + 1)^{(p-1)/2} \\ &\equiv X^{(p-1)/2}(X + \tfrac{1}{X} - 2)^{(p-1)/2} \mod p, \end{aligned}$$

de sorte que $Q_p(X + \frac{1}{X}) \equiv (X + \frac{1}{X} - 2)^{(p-1)/2} \mod p$ soit

$$Q_p(X) \equiv (X-2)^{(p-1)/2}.$$

□

Lemme I.2.12. — *Pour $p \neq q$ des nombres premiers impairs, le résultant de Q_p et Q_q est égal à ± 1.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde et considérons l premier divisant $\mathrm{Res}(Q_p, Q_q)$ de sorte que modulo l, $\bar{Q}_p$ et $\bar{Q}_q$ ont une racine commune $\beta \in \mathbb{F}_{l^n}$ pour $2n \leq \min\{p-1, q-1\}$. Soit alors $x \in \bar{\mathbb{F}}_l$ tel que $x^2 - \beta x + 1 = 0$ de sorte que

$$x^{p-1} + \cdots + x + 1 = x^{(p-1)/2}\bar{Q}_p(\beta) = 0.$$

En multipliant cette égalité par $x - 1$, on en déduit que $x^p = 1$ dans $\bar{\mathbb{F}}_l$. De la même façon on a aussi $x^q = 1$ et comme $p \wedge q = 1$, on en déduit $x = 1$ et donc $p \equiv q \equiv 0 \mod l$ ce qui n'est pas car $p \wedge q = 1$. □

Proposition I.2.13. — *Pour $p \neq q$ des nombres premiers distincts, on a*

$$\mathrm{Res}(Q_p, Q_q) = (\frac{q}{p}).$$

Démonstration. — On raisonne modulo p de sorte que d'après le lemme précédent, il suffit de prouver que ce résultant est $\equiv q^{(p-1)/2} \mod p$. Comme $Q_p(X) \equiv (X-2)^{(p-1)/2} \mod p$, on en déduit que

$$\mathrm{Res}(Q_p, Q_q) \equiv Q_p(2)^{(p-1)/2} \equiv Q_q(1 + \frac{1}{1})^{(p-1)/2} \equiv q^{(p-1)/2} \mod p,$$

d'où le résultat. □

I.2.3. par les sommes de Gauss. — Soit p un nombre premier impair et notons $\zeta = e^{2i\pi/p}$ une racine p-ième primitive de l'unité, dans $\mathbb{C}$.

Définition I.2.14. — La somme de Gauss relative à p est le nombre complexe

$$G = \sum_{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} (\frac{a}{p})\zeta^a.$$

Proposition I.2.15. — *On a $G^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$.*

Démonstration. — Par multiplicativité du symbole de Legendre, on a

$$G^2 = \sum_{a,b\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} (\frac{ab}{p})\zeta^{a+b}.$$

On effectue alors le changement de variable $b = at$ de sorte qu'en utilisant $(\frac{a^2t}{p}) = (\frac{t}{p})$, G^2 se réécrit :

$$G^2 = \sum_{t\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} (\frac{t}{p})\Big(\sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \zeta^{a(t+1)}\Big) = (p-1)(\frac{-1}{p}) + \sum_{-1\neq t\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} (\frac{t}{p}) \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \zeta^{a(1=t)}.$$

Pour $t \neq -1$, l'application $a \mapsto (1+t)a$ est une bijection de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ et donc

$$\sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \zeta^{a(1+t)} = \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{p-1} = -1$$

ce qui nous donne

$$G^2 = (p-1)(\frac{-1}{p}) - \sum_{-1\neq t\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} (\frac{t}{p}) = p(\frac{-1}{p})$$

car $\sum_{t\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(\frac{t}{p}) = 0$. □

Définition I.2.16. — Pour $p = 2$ on pose $G = \zeta + \zeta^{-1}$ où $\zeta = e^{2i\pi/8} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ soit $G = \sqrt{2}$ et G^2 vérifie une relation similaire.

Remarque : en fait Gauss a démontré que $G = \sqrt{p}$ pour $p \equiv 1 \mod 4$ et $G = i\sqrt{p}$ pour $p \equiv 3 \mod 4$; on renvoie à l'exercice **??**.

Ainsi G est une racine carré de $(-1)^{\frac{p-1}{2}}p$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[\zeta]$, sa réduction modulo $q\mathbb{Z}[\zeta]$ est alors un candidat naturel pour être une racine carrée de $(-1)^{\frac{p-1}{2}}p \mod q$ pourvu que G soit congrue modulo $q\mathbb{Z}[\zeta]$ à un élément de $\mathbb{Z}$. Une condition nécessaire est que $G^q \equiv G \mod q$ ce qui pousse à s'intéresser à $G \mod q\mathbb{Z}[\zeta]$.

Proposition I.2.17. — *On a* $G^q \equiv (\frac{q}{p})G \mod q$ *si* $p > 2$ *et* $G^q \equiv (-1)^{\frac{q^2-1}{8}}G \mod q$ *pour* $p = 2$.

Démonstration. — Commençons par traiter le cas p impair et calculons $G^q \mod q$ dans $\mathbb{Z}[\zeta]$:

$$G^q \equiv \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} (\frac{a}{p})^q\zeta^{aq} \mod q\mathbb{Z}[\zeta].$$

On effectue alors le changement de variable $t = aq$ ce qui, en utilisant les égalités

$$(\frac{a}{p})^q = (\frac{a}{p}) \text{ et } (\frac{a}{p}) = (\frac{q}{p})(\frac{qa}{p})$$

donne le résultat.

Le cas $p = 2$ se traite de même en notant que $\zeta^q + \zeta^{-q} = G$ si $q \equiv \pm 1 \mod 8$ et $-G$ sinon. □

Démontrons alors la loi de réciprocité quadratique : le principe est de calculer $G^q \mod q\mathbb{Z}[\zeta]$ en utilisant l'égalité $G^2 = p(-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Supposons tout d'abord p impair :

$$G^q = (G^2)^{\frac{q-1}{2}}G = \Big((-1)^{\frac{p-1}{2}}p\Big)^{\frac{q-1}{2}}G = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}G,$$

l'égalité ayant lieu dans $\mathbb{Z}[\zeta]$. Notons alors que $\bar{G}^2$ est inversible dans $\mathbb{F}_q^\times$ et donc dans $\mathbb{F}_p[\zeta]$ de sorte que $\bar{G} \in \mathbb{F}_q[\zeta]$ est aussi inversible

soit d'après le critère d'Euler

$$G^q \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} (\frac{p}{q}) G \mod q\mathbb{Z}[\zeta].$$

En comparant avec la proposition précédente, il vient

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} (\frac{p}{q}) G \equiv (\frac{q}{p}) G \mod q\mathbb{Z}[\zeta]$$

soit en multipliant par $(-1)^{\frac{p-1}{2}} G$

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} \frac{p}{q}) p \equiv (\frac{q}{p}) p \mod q\mathbb{Z}$$

qui est une congruence dans $\mathbb{Z}$ de laquelle on déduit la loi de réciprocité quadratique puisque p est inversible modulo q.

Pour $p = 2$, l'argument précédent et la relation $G^2 = 2$, montrent alors que

$$(\frac{2}{p}) G \equiv (-1)^{\frac{q^2-1}{8}} G \mod q\mathbb{Z}[\zeta]$$

dont on tire la loi supplémentaire.

Remarque : on peut aussi raisonner dans les corps finis, en considérant cette fois-ci ζ une racine primitive p-ième de l'unité dans une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, comme $p \wedge q = 1$ cela ne pose pas de difficulté puisque $X^p - 1$ est un polynôme sans racine multiple : on note $K = \mathbb{F}_q[\zeta]$ le corps fini associé. Notons alors $\bar{G} \in K$ la somme de Gauss associée. Comme précédemment on a encore $G^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$. Comme K est de caractéristique q, la congruence de la proposition I.2.17 devient une égalité $\bar{G}^{q-1} = (\frac{q}{p})$ dans K. On conclut alors comme précédemment

$$(\frac{q}{p}) = \bar{G}^{q-1} = (\bar{G}^2)^{\frac{q-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} (\frac{p}{q}).$$

CHAPITRE II

NOMBRES PREMIERS

Commençons par une citation du grand Euler : « Les mathématiciens ont tâché jusqu'ici en vain de découvrir quelque ordre dans la progression des nombres premiers, et l'on a lieu de croire que c'est un mystère auquel l'esprit humain ne saura jamais pénétrer. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à jeter les yeux sur les tables des nombres premiers que quelques-uns se sont donné la peine de continuer au-delà de cent mille et l'on s'apercevra d'abord qu'il n'y règne aucun ordre ni règle. »Ne nous décourageons pas pour autant et essayons de voir ce que l'on peut actuellement dire sur le sujet.

II.1. Comment produire des nombres premiers

Une façon naïve de produire tous les nombres premiers plus petit qu'un entier N fixé à l'avance, consiste à mettre en oeuvre le crible d'Ératosthène : on écrit tous les entiers $\leq N$ puis on supprime tous les multiples de 2 qui sont > 2, puis les multiples de 3 qui sont > 3 et ainsi de suite. À chaque étape, on sélectionne le premier nombre non barré strictement supérieur au nombre premier dont on vient de supprimer tous les multiples : celui-ci est un nombre premier. La liste obtenue est celle de tous les premiers $\leq N$.

Bien entendu l'algorithme proposé n'est pas efficace, on en cherche d'autres. En outre on peut aussi s'intéresser aux problématiques suivantes :

— comment produire de nombreux nombres premiers ?

— comment battre le record du monde du plus grand nombre premier ?

II.1.1. Théorème de Dirichlet. — Considérons un polynôme $P(X) = aX + b$ en une variable de degré 1 avec $a, b \in \mathbb{Z}$. On se demande si un tel polynôme est à même de produire une infinité de nombre premiers. La réponse est donnée par le fameux théorème de Dirichlet.

Définition II.1.1. — Pour a, q des entiers on note

$$P_q(a) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sharp\{p \in \mathcal{P} :\ p \leq n \text{ et } p \equiv a \mod q\}}{\sharp\{p \in \mathcal{P} :\ p \leq n\}}.$$

Remarque : évidemment dès que $a \wedge q \neq 1$, il y a soit aucun soit exactement un premier $p \equiv a \mod q$, de sorte que $P_q(a) = 0$. Le théorème de Dirichlet traite le cas intéressant où $a \wedge q = 1$.

Théorème II.1.2. — *Pour $a \wedge q = 1$, on a*

$$P_q(a) = \frac{1}{\varphi(q)}$$

où φ est l'indicatrice d'Euler.

Remarque : autrement dit, les nombres premiers se répartissent équitablement selon leur congruence modulo q.
Remarque : le cas $a = 1$ est relativement simple à prouver et ne nécessite pas l'utilisation d'argument d'analyse contrairement au cas général, pour l'instant. En utilisant la loi de réciprocité quadratique, on peut montrer quelques cas simples.

Proposition II.1.3. — *Il existe une infinité de nombres premiers p tels que*
(a) $p \equiv 3 \mod 4$ *;* *(b)* $p \equiv 1 \mod 4$ *;*
(c) $p \equiv 1 \mod 2^m$ *;* *(d)* $p \equiv 5 \mod 6$ *;*
(e) $p \equiv 5 \mod 8$ *;* *(f)* $p \equiv 1 \mod 6$ *;*
(g) $p \equiv -1 \mod 12$ *;* *(h)* $p \equiv -1 \mod 10$.

Démonstration. — Le schéma de démonstration sera toujours le même : on raisonne par l'absurde en supposant la finitude de l'ensemble considéré et on construit un entier N qui permet d'aboutir à une contradiction. On note n le plus grand élément de l'ensemble supposé fini. Toute la difficulté revient donc à construire N en fonction de n et de l'ensemble considéré :

(a) $N = n! - 1$; si p divise N alors $p > n$ et donc $p \equiv 1 \mod 4$ de sorte que $N \equiv 1 \mod 4$ ce qui n'est pas.

(b) $N = (n!)^2 + 1$; si p premier divise N alors -1 est un carré modulo p soit $p \equiv 1 \mod 4$ et donc par hypothèse $p \leq n$ soit p divise $n!$ et donc $p|N - (n!)^2 = 1$ d'où la contradiction .

(c) si p divise $a^{2^{m-1}} + b^{2^{m-1}}$ avec p premier avec a, alors $\frac{a}{b}$ est d'ordre divisant 2^m et d'ordre distinct de 2^{m-1} ; il est donc d'ordre 2^m. Or l'ordre de tout élément divise le cardinal du groupe soit $p \equiv 1 \mod 2^m$. Soit alors $N = (n!)^{2^{m-1}} + 1$; tout diviseur p premier de N est congru à $1 \mod 2^n$ et supérieur à n d'où la contradiction.

(d) $p \equiv 5 \mod 6$ est équivalent à $p \equiv 1 \mod 2$ et $p \equiv 2 \mod 3$ soit $p > 2$ et $p \equiv 2 \mod 3$. Soit $N = n! - 1$; pour p premier divisant N, on a $p > n$ et donc $p \equiv 1 \mod 3$ de sorte que $N \equiv 1 \mod 3$ ce qui n'est pas.

(e) $N = 3^2 5^2 7^2 11^2 \cdots n^2 + 2^2$; N est visiblement impair. Soit alors p premier divisant N, p ne divise pas 4, de sorte que $p \equiv 1 \mod 4$, soit $p \equiv 1, 5 \mod 8$. À nouveau $p \equiv 5 \mod 8$ est exclu car sinon p diviserait $4 = N - 3^2 \cdots n^2$. On en déduit donc $N \equiv 1 \mod 8$. Or si p est premier impair on a $p \equiv 1, 3, 5, 7 \mod 8$ et on vérifie aisément que p^2 est alors congru à 1 modulo 8 et donc $N \equiv 5 \mod 8$, d'où la contradiction.

(f) $p \equiv 1 \mod 6$ est équivalent à $p > 2$ et $p \equiv 1 \mod 3$. Or si p divise $a^2 + 3b^2$ et p premier avec b, alors -3 est un carré modulo p et donc $(\frac{-3}{p}) = 1 = (-1)^{(p-1)(3-1)/4}(\frac{p}{3})(\frac{-1}{p}) = (\frac{p}{3})$ et donc -3 est un carré modulo p si et seulement si $p \equiv 1 \mod 3$. Soit alors $N = 3(n!)^2 + 1$; tout diviseur premier de N est alors congru à 1 modulo 3 et supérieur à n d'où la contradiction.

(g) si p divise $a^2 - 3b^2$ et p premier avec b alors 3 est un carré modulo p. Or on a $(\frac{3}{p}) = (\frac{p}{3})(-1)^{(p-1)/2}$ et donc 3 est un carré modulo p dans les deux situations suivantes :

- $(\frac{p}{3}) = (-1)^{(p-1)/2} = 1$ soit $p \equiv 1 \mod 3$ et $p \equiv 1 \mod 4$ soit $p \equiv 1 \mod 12$;
- $(\frac{p}{3}) = (-1)^{(p-1)/2} = -1$ soit $p \equiv -1 \mod 3$ et $p \equiv -1 \mod 4$ soit $p \equiv -1 \mod 12$;

Soit alors $N = 3(n!)^2 - 1$; tout diviseur premier p de N est alors congru à ± 1 modulo 12 et supérieur à n de sorte que par hypothèse, $p \equiv 1 \mod 12$. On en déduit alors que $N \equiv 1 \mod 12$ ce qui n'est pas car $N \equiv -1 \mod 12$.

(h) pour p premier $p \equiv -1 \mod 10$ si et seulement si $p \equiv -1 \mod 5$. Or si p divise $a^2 - 5b^2$ avec p premier avec b alors $(\frac{5}{p}) = 1 = (\frac{p}{5})$ et donc $p \equiv \pm 1 \mod 5$. Soit alors

$N = 5(n!)^2 - 1$; tout diviseur premier p de N est strictement supérieur à n et congru à ± 1 mod 5. Par hypothèse il est donc congru à 1 modulo 5 et donc N aussi ce qui n'est pas. □

Théorème II.1.4. — ***(van der Waerden 1927)***
Soient k, r deux entiers positifs ; il existe alors une constante $M(k,r)$ tel que pour toute partition de $\{1, \cdots, M(k,r)\}$ en r parties, il en existe au moins une contenant une suite arithmétique de longueur k.

En 1936 Erdös et Turán ont conjecturé que tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ « suffisamment dense » devait contenir des progressions arithmétique de longueur k, résultat prouvé par Szemerédi en 1974.

Théorème II.1.5. — ***(Szemerédi 1974)***
Soit k un entier strictement positif et soit $\delta > 0$. Il existe alors un entier $N(k,\delta)$ tel que tout sous ensemble de $\{1, 2, \cdots, N(k,\delta)\}$ de cardinal $\geq \delta N$ contient une progression arithmétique de longueur k.

Remarque : considérons l'ensemble de tous les entiers auquel on retire pour tout $n \geq 1$, les segments $\{2^n + 1, \cdots, 2^n + n\}$. Visiblement ce sous-ensemble est de densité égal à 1 et ne contient aucune progression arithmétique de longueur infini. En revanche le théorème de Szemerédi, nous dit qu'il contient des progressions arithmétique de longueur k pour tout $k \geq 1$.
Remarque : l'ensemble des nombres premiers est de densité nulle, de sorte que le théorème de Szemerédi ne s'applique pas. Cependant, en réutilisant astucieusement ce résultat, Ben Green et Terence Tao ont réussi le tour de force de montrer que le résultat était encore valable.

Théorème II.1.6. — ***(Ben Green et Terence Tao 2004)***
L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers admet des progressions arithmétiques de longueur arbitraire.

Remarque : ainsi pour tout entier k, il existe a et b tels que

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ \cdots, a+(k-1)b \in \mathcal{P}$$

Par exemple pour $k = 10$ le plus petit a est 199 avec $b = 210$ ce qui donne

$$199,\ 409,\ 619,\ 1039,\ 1249,\ 1459,\ 1669,\ 1879,\ 2089.$$

Étant donné k on peut noter a_k et b_k les plus petits entiers tels que $a_k + ib_k$ soient premiers pour tout $i = 0, \cdots, k-1$; Green et Tao donne une majoration de la taille de $a_k + (k-1)b_k$ en fonction de k.

II.1.2. Familles polynomiales. — On cherche des polynômes dont les valeurs sur $\mathbb{N}$ produisent une infinité de nombres premiers.

Conjecture II.1.7. — ***(Hardy-Littlewood)***
Soit $P(n)$ le cardinal de l'ensemble des nombres premiers inférieurs à n de la forme $a^2 + 1$; alors

$$P(n) \sim c\sqrt{n}\ln n, \qquad c = \prod_{p \geq 3} \Big(1 - \frac{(\frac{-1}{p})}{p-1}\Big) \approx 1,3727.$$

Remarque : Iwaniec a prouvé qu'il y avait une infinité d'entiers n pour lesquels n^2+1 est le produit d'au plus deux facteurs premiers. Par ailleurs on sait que le plus grand facteur premier de a^2+1 tend vers l'infini avec a.

On peut bien entendu considérer d'autres polynômes. Ainsi Sierpinski a montré que pour tout $k \geq 1$, il existe b pour lequel $\{a^2+b : \ a \in \mathbb{N}\}$ contient au moins k nombres premiers distincts. Toujours avec des polynômes de degré 2, Jacobson nous propose

$$x^2 + x + 3399714628553118047$$

dont il pense qu'il produit encore plus de premiers.

II.1.3. L'ensemble des nombres premiers n'est pas algébrique. — Commençons par une première question très optimiste :
Question : existe-t-il un polynôme P tel que $P(\mathbb{N})$ est l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers ?

Proposition II.1.8. — *Il ne peut pas exister de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ non constant ne prenant sur $\mathbb{N}$ que des valeurs premières.*

Démonstration. — Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$ de sorte qu'en particulier $a_0 \in \mathcal{P}$. Comme $P(n)$ tends vers l'infini quand n tends vers l'infini, il existe une valeur n_0 à partir de laquelle $P(n) > a_0$. Ainsi pour k assez grand, on a $P(ka_0) > a_0$ alors que $P(ka_0)$ est divisible par a_0. □

On modifie alors la question initiale en cherchant des polynômes dont les premières valeurs sont premières. Pour des polynômes du second degré, citons les résultats suivant :

- *spirales d'Ulam* : il s'agit des premiers p pour lesquels n^2+n+p est premier pour $n = 0, \cdots, p-2$: on remarquera en effet que p divise $(p-1)^2+(p-1)+p$, cf. aussi l'exercice **??**. Heegner a montré que les seuls p qui conviennent sont $2, 3, 5, 16$ et 41. On conjecture que pour tout A, il existe B tel que n^2+n+B soit premier pour tout $n = 0, \cdots, A$. Pour $A = 41$, B est nécessairement plus grand que 10^{18} et n'est pas connu.
- R. Ruby : $103n^2 - 3945n + 32381$ est premier pour $n = 0, 1, \cdots, 42$;
- G. Fung : $47n^2 - 1701n + 10181$ est premier pour $n = 0, 1, \cdots, 42$;
- R. Ruby : $36n^2 - 810n + 2753$ est premier pour $n = 0, 1, \cdots, 44$.

On peut alors essayer de considérer des polynômes en plusieurs variables mais la situation n'est pas plus favorable.

Proposition II.1.9. — *Un polynôme $P(X_1, \cdots, X_k) \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_r]$ qui ne prend que des valeurs premiers sur $\mathbb{N}^r$, est constant.*

Démonstration. — Soient K un corps de caractéristique nulle et $L_0, L_1, \cdots, L_n$ les polynômes de Lagrange pour $\{0, 1, \cdots, n\}$. Rappelons alors que pour tout $Q \in K_n[X]$, on a l'égalité

$$Q(X) = \sum_{i=0}^{n} Q(x_i) L_i(X).$$

Ainsi en raisonnant par récurrence sur r, si $P \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_r]$, vu comme un polynôme en la variable X_r sur le corps des fractions $\mathbb{C}(X_1, \cdots, X_{r-1})$, ne prend que des valeurs entières pour tout $(x_1, \cdots, x_r) \in \mathbb{N}^r$ alors $P \in \mathbb{Q}[X_1, \cdots, X_r]$. Notons l un multiple des dénominateurs des coefficients de P et prenons r minimal tel qu'on puisse considérer P comme un polynôme en

r variables. On suppose $r \geq 1$. Comme par hypothèse $P(1, \cdots, 1) = p$ est premier, pour tous $n_1, \cdots, n_r \in \mathbb{N}$, on a

$$P(1 + n_1 lp, 1 + n_2 lp, \cdots, 1 + n_r lp) \equiv P(1, \cdots, 1) \mod p$$

et donc est égal à p. En particulier

$$Q_r(X_r) = P(1 + n_1 lp, \cdots, 1 + n_{r-1} lp, X_r) - p$$

qui admet une infinité de racines, est donc constant et donc $P \in \mathbb{Q}[X_1, \cdots, X_{r-1}]$ ce qui contredit la minimalité de r et donc $r = 0$ et P est un polynôme constant. □

Remarque : rappelons qu'une fonction F en les variables $X_1, \cdots, X_r$ est dite *algébrique* s'il existe $P \in \mathbb{C}[X, X_1, \cdots, X_r]$ telle que

$$P\Big(F(X_1, \cdots, X_r), X_1, \cdots, X_r\Big) = 0.$$

On peut montrer qu'une fonction algébrique qui ne prend que des valeurs entières sur $\mathbb{N}^r$ est nécessairement polynomiale de sorte que $\mathcal{P}$ ne peut pas non plus être représenté par une fonction algébrique. On peut alors regarder les fonctions exponentielles, mais à nouveau la conclusion est négative.

Théorème II.1.10. — *Supposons qu'il existe :*
- *des entiers $m, n \geq 1$,*
- *des polynômes $P_i, Q_i \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ pour $i = 1, \cdots, m$,*
- *des entiers strictement positifs $a_1, \cdots, a_m$*

tels que la fonction

$$F(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} P_i(x_1, \cdots, x_n) a_i^{Q_i(x_1, \cdots, x_n)}$$

ne prend que des valeurs premières sur $\mathbb{N}^r$, alors F est constante.

Démonstration. — En raisonnant par récurrence sur n, il suffit comme d'habitude de traiter le cas $n = 1$. Si $F(\mathbb{N})$ est infini, il existe alors x_1 tel que $F(x_1) = p$ est premier avec tous les a_i. D'après le théorème de Fermat, on en déduit que $F(x_1 + kp(p-1)) \equiv p \mod p$ et donc pour tout k

$$F(x_1 + kp(p-1)) = p$$

et donc $F(X) - p$ admet une infinité de racines et est donc nul. Si $F(\mathbb{N})$ est fini, alors il existe p tel que $F(x) - p$ admet une infinité de racines et est donc nul. □

II.1.4. L'ensemble des nombres premiers est diophantien. —

Définitions II.1.11. — *Un sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ est dit :*
- récursivement énumérable *s'il existe « un programme » $\mathcal{P}$ tel que $n \in E$ si et seulement si $\mathcal{P}$ appliqué à n répond « oui » en temps fini.*
- diophantien *s'il existe un entier $n > 0$ et $P \in \mathbb{Z}[T, X_1, \cdots, X_n]$ tel que*

$$t \in E \Leftrightarrow \exists (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{N}^n : \ P(t, x_1, \cdots, x_n) = 0.$$

Remarque : tant que le programme ne répond pas, on ne peut pas savoir si n appartient ou n'appartient pas à E. En outre si $n \notin E$ alors le programme peut ne jamais répondre. Un ensemble est dit *récursif* s'il est récursivement énumérable et si en plus $\mathcal{P}(n)$ répond « non » si $n \notin E$. De manière très simple, le lecteur vérifiera qu'un ensemble E est récursif si et seulement si E et son complémentaire sont récursivement énumérables. Plus subtil en revanche est le fait qu'il existe des ensembles qui sont récursivement énumérables sans être récursifs.
Remarque : en considérant le polynôme

$$Q(T, X_1, \cdots, X_n) := T(1 - P(T, X_1, \cdots, X_n)^2),$$

on voit qu'une définition équivalente de la propriété d'être diophantien, est qu'il existe $Q \in \mathbb{Z}[T, X_1, \cdots, X_n]$ tel que E est l'ensemble des valeurs strictement positives prises par Q sur $\mathbb{N}^{n+1}$.
Exemples : les ensembles habituels de l'arithmétique sont récursifs :

- l'ensemble des carrés de $\mathbb{N}$ est récursif : le programme consiste par exemple à calculer tous les carrés de manière croissante jusqu'à dépasser n ;
- l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est récursif : on peut construire un programme à partir du crible d'Eratostène.

Un ensemble diophantien est clairement récursivement énumérable, un programme consistant simplement à calculer tous $P(t, x_1, \cdots, x_n)$ selon, par exemple, $x_1 + \cdots + x_n = k$. La réciproque est un théorème remarquable de Matijasevic, initié par Davis, Robinson et Putnam.

Théorème II.1.12. — ***(Matijasevic)***
Tout ensemble récursivement énumérable est diophantien.

Ainsi l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est diophantien et il existe donc des polynômes dont l'ensemble des valeurs positives est égal à $\mathcal{P}$.

Théorème II.1.13. — ***(P. Jones 1976)***
L'ensemble des valeurs entières positives prises par le polynôme suivant, de degré 25 *en* 26 *variables, est l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers.*

$$\begin{aligned}(k+2)\Big[1-\big((wz+h+j-q)^2+\big((gk+2g+k+1)(h+j)+h-z\big)^2+\big(16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2\big)^2\\ +(2n+p+q+z-e)^2+(e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2)^2+\big((a^2-1)y^2+1-x^2\big)^2\\ +(16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2)^2+\big(((a+u^2(u^2-a))^2-1)(n+4dy)^2+1-(x+cu)^2\big)^2\\ +\big((a^2-1)l^2+1-m^2\big)^2+(ai+k+1-l-i)^2+(n+l+v-y)^2+(p+l(a-n-1)+b(2an+2a-n^2-2n-2)-m)^2\\ +(q+y(a-p-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2)-x)^2+(z+pl(a-p)+t(2ap-p^2-1)-pm)^2\big)\Big]\end{aligned}$$

Schéma de la preuve : on construit d'abord un polynôme $M(k, x_1, \cdots, x_n)$ tel que

$$k + 2 \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{N}^n : \ M(k, x_1, \cdots, x_n) = 0,$$

où M est une somme de carré et donc positif ou nul. Le polynôme P est alors donné par

$$(k + 2)(1 - M(k, x_1, \cdots, x_n)).$$

La construction de $M(k, x_1, \cdots, x_n)$ part du théorème de Wilson, $k+1$ est premier si et seulement si $k+1|k!+1$. On utilise ensuite la résolution explicite des équations de Pell-Fermat pour traduire une égalité $f = k!$ par l'existence d'entiers positifs j, h, n, p, q, w, z tels que :

(1) $q = wz + h + j$,
(2) $z = f(h + j) + h$,
(3) $(2k)^3(2k + 2)(n + 1)^2 + 1$ est un carré parfait,
(4) $p = (n + 1)^k$,
(5) $q = (p + 1)^n$,
(6) $z = p^{k+1}$

La construction du polynôme découle alors directement de la formulation suivante : $k+1$ est premier si et seulement s'il existe 26 entiers positifs notés par les 26 lettres de l'alphabet tels que :

(1) $q = wz + h + j$,
(2) $z = (gk + g + k)(h + j) + h$,
(3) $(2k)^3(2k + 2)(n + 1)^2 + 1 = f^2$,
(4) $e = p + q + z + 2n$,
(5) $e^3(e + 2)(a + 1)^2 + 1 = o^2$,
(6) $x^2 = (a^2 - 1)y^2 + 1$,
(7) $u^2 = 16(a^2 - 1)r^2y^4 + 1$,
(8) $(x + cu)^2 = ((a + u^2(u^2 - a)^2 - 1)(n + 4dy)^2 + 1$,
(9) $m^2 = (a^2 - 1)l^2 + 1$,
(10) $l = k + i(a - 1)$,
(11) $n + l + v = y$,
(12) $m = p + l(a - n - 1) + b(2a(n + 1) - (n + 1)^2 - 1)$,
(13) $x = q + y(a - p - 1) + s(2a(p + 1) - (p + 1)^2 - 1)$,
(14) $pm = z + pl(a - p) + t(2ap - p^2 - 1)$.

Les équations (6), (7), (8) et (11) traduisent le fait que $(x, y) = (x_a(n), y_a(n))$ est la n-ième solution de l'équation de Pell-Fermat

$$X^2 - (a^2 - 1)Y^2 = 1,$$

dont on rappelle qu'elles s'obtiennent via les suites de Lucas :

$$\begin{array}{lll} x_a(0) = 1, & x_a(1) = a, & x_a(n+2) = 2ax_a(n+1) - x_a(n), \\ y_a(0) = 0, & y_a(1) = 1, & y_a(n+2) = 2ay_a(n+1) - y_a(n). \end{array}$$

L'équation (9) implique que $(m, l) = (x_a(k'), y_a(k'))$ pour $k' \in \mathbb{N}$ et en utilisant (3), (4) et (5), on montre que $k' = k$. De (12), on déduit que $p = (n + 1)^k$ et de (13) que $q = (p + 1)^n$. Enfin de (14) on obtient $z = p^{k+1}$, de sorte qu'on se ramène aux conditions (1-6) précédentes et donc $k! = f = gk + g + k$ soit $k! + 1 = (g + 1)(k + 1)$ et donc $k + 1$ est premier.

Remarque : le polynôme précédent prend aussi des valeurs négatives, -76 par exemple. Bien entendu un polynôme représentant diophantiennement $\mathcal{P}$ n'est pas unique et on peut demander à minimiser soit le nombre de variables, soit le degré. On ne connait pas la réponse à ces questions signalons qu'il existe un polynôme de degré 5 et en 42 variables, et un autre en 12 variables dont le degré est très grand.
Remarque : avec les notations précédentes, la fonction $2 + k0^{M(x_1,\cdots,x_n)}$ a ses valeurs dans $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{N}^n$. Nous invitons le lecteur à confronter ce résultat avec le théorème II.1.10

Corollaire II.1.14. — *Notons p_n le n-ième nombre premier. Il existe alors un polynôme $P(T, X_1, \cdots, X_r) \in \mathbb{Z}[T, X_1, \cdots, X_r]$ tel que*

$$p_n = m \Leftrightarrow \exists (x_1, \cdot, x_r) \in \mathbb{N}^r : \ P(n, x_1, \cdots, x_r) = m.$$

Démonstration. — La relation $p_n = m$ étant clairement récursive, elle est diophantienne de sorte qu'il existe un polynôme Q tel que

$$p_n = m \Leftrightarrow \exists x_1, \cdots, x_l \in \mathbb{N}^l : \ Q(n, m, x_1, \cdots, x_k) = 0.$$

Il suffit alors de poser $P = x_{l+1}\Big(1 - Q^2(n, x_{l+1}, x_1, \cdots, x_l)\Big)$. □

II.1.5. Autour du théorème de Wilson. — Commençons par rappeler le théorème de Wilson.

Théorème II.1.15. — ***(de Wilson)***
Un entier $n \geq 2$ est premier si et seulement si n divise $(n-1)! + 1$.

Démonstration. — Si p est un diviseur non trivial de n, i.e. $1 < p < n$ alors $p \leq n-1$ et $p|(n-1)!$ de sorte que p ne divise pas $(n-1)! + 1$. Réciproquement si $n = p \geq 3$ est premier alors d'après le petit théorème de Fermat

$$X^{p-1} - 1 = \prod_{a \in \mathbb{F}_p^\times} (X - a)$$

de sorte que dans $\mathbb{F}_p$, on a

$$-1 = (-1)^{p-1} \prod_{a \in \mathbb{F}_p^\times} a = (p-1)!,$$

d'où le résultat. □

Proposition II.1.16. — *La fonction*

$$f(n) = 2 + 2(n!) \mod n + 1$$

a pour valeurs, l'ensemble des nombres premiers.

Remarque : le lecteur notera cependant qu'elle ne produit que très lentement de nouveaux nombres premiers ; en particulier 2 apparaît très souvent.

Démonstration. — Soit p premier alors d'après le théorème de Wilson p divise $1 + (p-1)!$ et donc $2 + 2(p-1)! \equiv 0$ soit $f(p-1) = p$. Si n n'est pas premier alors n divise $(n-1)!$ et donc $f(n-1) = 2$. □

Théorème II.1.17. — ***(1947 W. Mills)***
Il existe une constante A telle que pour tout $n > 1$,

$$\lfloor A^{3n} \rfloor \in \mathcal{P}.$$

Remarque : la constante A en question se calcule de manière certes approchée $1,306377883863$ mais ce calcul nécessite la connaissance de $\mathcal{P}$ ce qui convenons le n'est pas très honnête. L'escroquerie est du même genre que la suivante : posons

$$L = 0,2003000050000007000000011...$$

le n-ème nombre premier étant placé en position n^2, i.e. le chiffre des unités de p_n est placé en position n^2. On vérifie alors aisément que

$$\lfloor L \times 10^{n^2} \rfloor - \lfloor L \times 10^{(n-1)^2} \rfloor 10^{2n-1}$$

est égal au n-ème nombre premier p_n. On s'interdit désormais d'utiliser des nombres pouvant cacher une infinité d'informations.

Théorème II.1.18. — ***(Roland Yéléhada)***
Pour tout n,

$$t(n) = 2 + n\lfloor \frac{1}{1 + \sum_{p=2}^{m+1} \lfloor \frac{n+2}{p} - \lfloor \frac{n+1}{p} \rfloor \rfloor} \rfloor$$

est toujours un nombre premier. Plus précisément, si on enlève le nombre 2 dans la suite $(t(n))_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient la liste des nombres premiers dans l'ordre croissant.

Démonstration. — Le principe est très élémentaire : si $n+2$ est un multiple de p alors $(n+2)/p$ est un entier q et donc $(n+1)/p = q - 1/p$ et donc $\lfloor \frac{n+2}{p} - \lfloor \frac{n+1}{p} \rfloor$ est égal à 1 alors qu'il est nul si p n'est pas un diviseur. Autrement dit la somme compte le nombre de diviseurs de $n+2$ compris entre 2 et $n+1$; ainsi si $n+2$ est premier on obtient $t(n) = n+2$ qui est premier alors que si $n+2$ n'est pas premier on a $t(n) = 2$. □

Remarque : ainsi la formule ne donne que des nombres premiers mais très lentement, 2 apparaissant très souvent. En utilisant la formule de Wilson, Minac simplifie la formule précédente :

$$t(n) = 2 + n\lfloor \frac{(n+1)! + 1}{n+2} - \lfloor \frac{(n+1)!}{n+2} \rfloor \rfloor$$

laquelle contient moins de symbole et n'a plus de somme, mais requiert de lourds calculs de factoriels.

Théorème II.1.19. — ***(1995 Minac et Willans)***
Soit

$$\pi(m) = \sum_{j=2}^{m} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{j}(j-1)!^2\right)}{\sin^2(\frac{\pi}{j})} = \sum_{j=2}^{m} \lfloor \frac{(j-1)! + 1}{j} - \lfloor \frac{(j-1)!}{j} \rfloor \rfloor$$

alors le n-ème nombre premier p_n est donné par

$$p_n = 1 + \sum_{m=1}^{2^n} \lfloor \lfloor \frac{n}{1 + \pi(m)} \rfloor^{1/n} \rfloor.$$

Remarque : on notera que la formule donnant p_n ne nécessite que 52 symboles et est donc relativement simple.

Théorème II.1.20. — ***(2000, Ruiz)***
On a a

$$p_n = 1 + \sum_{k=1}^{2(\lfloor n \ln n \rfloor + 1)} \left(1 - \lfloor \frac{\psi(k)}{n} \rfloor\right)$$

où $\psi(k) = k - 1 + \sum_{j=2}^{k} \lfloor \frac{2}{j} \left(1 + \sum_{s=1}^{\lfloor \sqrt{j} \rfloor} \left(\lfloor \frac{j-1}{s} \rfloor - \lfloor \frac{j}{s} \rfloor\right)\right) \rfloor$.

Remarque : très récemment, un étudiant a prouvé le résultat suivant.

Théorème II.1.21. — ***(Rowland 2008)***
Soit a_n la suite définie par récurrence :

$$a_1 = 7 \quad \text{et } a_n = a_{n-1} + n \wedge a_{n-1}.$$

Alors la suite $b_n = a_n - a_{n-1}$ ne prend que ses valeurs que dans $\mathcal{P} \cup \{1\}$.

Remarque : signalons aussi la suite de Perrin définie par

$$u_0 = 3,\ u_1 = 0,\ u_2 = 2 \qquad u_{n+1} = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Lucas a montré que pour p premier p divise u_p et on conjecture que la réciproque est vraie.

II.2. Tests de primalité

II.2.1. Nombres de Fermat. — Comme -1 est racine du polynôme $X^{2n+1}+1$ celui-ci est divisible par $X+1$, le quotient étant égal à $X^{2n} - X^{2n-1} + \cdots + 1$). Soit alors $m = 2^n k$ avec k impair ; si $k > 1$, l'égalité

$$2^m + 1 = (2^{2^n})^k + 1 = (2^{2^n}+1)((2^{2^n})^{k-1} - \cdots + 1)$$

montre que $2^{2^n}+1$ est un diviseur propre de sorte que 2^m+1 n'est pas premier. Ainsi si l'on veut trouver des nombres premiers parmi la famille des 2^m+1, il faut prendre m de la forme 2^n. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n}+1$; F_n est le n-ème nombre de Fermat. On calcule $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ et $F_4 = 65537$ et l'on vérifie aisément qu'ils sont tous premiers.

Lemme II.2.1. — *Soit p premier divisant F_n, alors $p \equiv 1 \mod 2^{n+1}$.*

Démonstration. — Pour un tel p, de la congruence $2^{2^n} \equiv -1 \mod p$, on en déduit que 2 est d'ordre 2^{n+1} dans $\mathbb{F}_p^\times$ de sorte que 2^{n+1} divise $p-1$. □

Ainsi pour $n = 5$, un diviseur de F_5 doit être de la forme $64k+1$. Vérifions que le cas $k = 10$ est un bon candidat : déjà 641 est premier et on l'écrit sous la forme $641 = 1 + 5.2^7$. Dans le corps $\mathbb{Z}/641\mathbb{Z}$, on a $0 = 641 = 1 + 5.2^7$ soit $2^7 = -1/5$. Ainsi $F_5 = 2^3 2 + 1 = (2^7)^4.2^4 + 1$ car $32 = 7.4 + 4$. D'où dans $\mathbb{Z}/641\mathbb{Z}$, on a $F_5 = (-1/5)^4.2^4 + 1 = (2^4 + 5^4)/5^4 = 0$.
Remarque : à ce jour on ne connaît pas d'entiers $n \geq 5$ tels que F_n est premier.

Lemme II.2.2. — *Pour $n \neq m$, les nombres F_n et F_m sont premiers entre eux.*

Démonstration. — Soit $n = m + r$ avec $r > 0$; on a alors

$$2^{2^n} = (((2^{2^m})^{2^m})^{\cdots})^{2^m}$$

et dans $\mathbb{Z}/F_m\mathbb{Z}$, on en déduit

$$F_n \equiv (((-1)^{2^m})^{\cdots})^{2^m} + 1 = 2 \mod F_m.$$

Ainsi le pgcd de F_m et de F_n divise 2 ; or 2 ne divise pas F_n d'où le résultat. □

Remarque : on peut ainsi donner une nouvelle démonstration de la non finitude de l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers positifs. En effet $\mathcal{P}$ contient la réunion disjointe $\coprod_n \mathcal{F}_n$ où $\mathcal{F}_n$ est le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ des diviseurs premiers divisant F_n avec $\mathcal{F}_n$ non vide pour tout n puisque $F_n > 1$.

Proposition II.2.3. — ***(Critère de Pépin)***
Le nombre de Fermat $p = F_n$ est premier si et seulement si $3^{(p-1)/2} \equiv -1 \mod p$.

Démonstration. — Supposons tout d'abord que $p = F_n \geq 5$ est premier. D'après la loi de réciprocité quadratique, $(\frac{3}{p}) = (\frac{p}{3}) = -1$ car $p \equiv (-1)^{2^n} + 1 \equiv 2 \mod 3$. D'après le critère d'Euler, on en déduit que $3^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \mod p$.

Réciproquement, supposons la congruence vérifiée ; $3^{p-1} \equiv 1 \mod p$, de sorte que l'ordre de 3 modulo p est exactement $p-1$ et donc $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps. □

On peut aussi s'intéresser aux facteurs premiers des nombres de Fermat qui, on l'a vu, sont de la forme $k2^n + 1$. Comme pour les nombres de Fermat, on dispose pour ceux-ci, au moins quand k est relativement petit, de tests de primalité très efficaces qui ont permis de battre des records pour la taille de nombres premiers qui ne sont pas de Mersenne. On conjecture par ailleurs que les nombres de Fermat sont sans facteur carré.

II.2.2. Nombres de Mersenne. — De la factorisation

$$X^{pq} - 1 = (X^p - 1)(X^{p(q-1)} + \cdots + X^p + 1),$$

on en déduit que si $2^n - 1$ est premier alors n est un nombre premier.

Définition II.2.4. — Pour p premier, si $M_p = 2^p - 1$ est premier, on le qualifie de nombre premier de Mersenne.

Les premiers exemples sont $3 = 2^2 - 1$, $7 = 2^3 - 1$, $31 = 2^5 - 1$, $127 = 2^7 - 1$ qui sont premiers alors que $2047 = 2^{11} - 1 = 23 \times 89$ ne l'est pas. L'intérêt de ces nombres réside dans le critère de primalité très efficace suivant.

Proposition II.2.5. — ***(Critère de Lucas-Lehmer)***
Pour $q \geq 3$, M_q est premier si et seulement si

$$(2 + \sqrt{3})^{2^{q-1}} \equiv -1 \mod M_q.$$

Remarque : si q est un diviseur de M_p alors l'ordre de la classe de 2 dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est égale à p qui doit diviser $q-1$ et donc $q \equiv 1 \mod p$ (on a aussi $q \equiv 1 \mod 2p$). On en déduit aussi que 2 est un carré modulo q et donc $q \equiv \pm 1 \mod 8$.

Démonstration. — Remarquons que 3 est un résidu quadratique modulo $p \neq 2, 3$ si et seulement si $p \equiv \pm 1 \mod 12$: en effet d'après la loi de réciprocité quadratique, $(\frac{3}{p})(\frac{p}{3}) = (-1)^{(p-1)/2}$ et donc 3 est résidu quadratique modulo p si et seulement si $(\frac{p}{3}) = (-1)^{(p-1)/2}$. Le seul carré modulo 3 autre que 0 est 1, soit $p \equiv 1 \mod 3$ et $p \equiv 1 \mod 4$ ou bien $p \equiv 2 \mod 3$ et $p \equiv 3 \mod 4$, soit en définitive $p \equiv \pm 1 \mod 12$.

Lemme II.2.6. — *Pour $p > 3$ premier non congru à ± 1 modulo 12, on a le petit théorème de Fermat suivant dans $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$:*

$$(x + y\sqrt{3})^p \equiv x - y\sqrt{3} \mod p.$$

Démonstration. — Par hypothèse 3 n'est pas un carré modulo p et par conséquent $\sqrt{3}^p = 3^{(p-1)/2}\sqrt{3} \equiv -\sqrt{3} \mod p$ et donc $(x + y\sqrt{3})^p \equiv x - y\sqrt{3} \mod p$. □

Supposons alors M_q premier : en remarquant que 2 est un carré modulo M_q, on définit dans $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/(M_q)$: $\tau = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ et $\bar{\tau} = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. A partir des relations $\tau^2 = 2 + \sqrt{3}$ et $\tau\bar{\tau} = -1$: $\tau^p = \bar{\tau}$ soit $\tau^{p+1} = -1$ ce qui donne la congruence de l'énoncé $(\tau^2)^{(p+1)/2} \equiv -1 \mod p$ car $\tau^2 = 2 + \sqrt{3}$. □

Corollaire II.2.7. — ***(Test de primalité de Lucas-Lehmer)*** *Soit $(L_i)_{i\geq 0}$ la suite de Lucas-Lehmer définie par*

$$L_0 = 4 \text{ et } L_{i+1} = L_i^2 - 2 \mod M_q.$$

Alors M_q est premier si et seulement si $L_{q-2} \equiv 0 \mod M_q$.

Démonstration. — Soit $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ et $\bar{\alpha} = 2 - \sqrt{3}$, en remarquant que $\alpha\bar{\alpha} = 1$, on montre aisément par récurrence que $L_i = \alpha^{2^i} + \bar{\alpha}^{2^i}$; la congruence $L_i \equiv 0 \mod n$ est ainsi équivalente à $\alpha^{2^{i+1}} \equiv -1 \mod n$, d'où le résultat. □

Remarque : à ce jour on connaît 45 nombres de Mersenne qui sont premiers ; le dernier trouvé possède plus de 10 millions de chiffres et réalise le record du plus grand nombre premier.

II.2.3. Autour du petit théorème de Fermat. —

Définition II.2.8. — Un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est dit pseudo-premier de base b si $b^{n-1} \equiv 1 \mod n$.

Par exemple $n = 105 = 3.5.7$ est pseudo-premier de base 13 : en effet on a $13^{104} = (13^2)^{52} \equiv 1 \mod 3$, $13^{104} = (13^4)^{26} \equiv 1 \mod 5$ et $13^{104} = (13^6)^{17} \times 13^2 \equiv 1 \mod 7$, de sorte que d'après le lemme chinois on a $13^{104} \equiv 1 \mod 105$. En revanche on a $2^{104} = (2^6)^{17} \times 2^2 \equiv 4$ mod 7 de sorte que 105 n'est pas pseudo-premier de base 2. Le petit théorème de Fermat dit qu'un nombre premier p est pseudo-premier de base b pour tout b premier à p.

Ce test serait « bon » dans le sens où calculer a^{N-1} requiert, en utilisant l'exponentiation rapide, $O(\log N)$ multiplications ; cependant il est « mauvais » à cause des nombres de Carmichael qui vérifient le test sans être premier : le plus petit de ces nombres est $561 = 3.11.17$ et on sait que l'ensemble de ces nombres est infini. Une amélioration de ce test est donné par le test de *Solovay-Strassen* qui consiste à vérifier les congruences $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv (\frac{a}{N}) \mod N$ dont la véracité est assurée par la proposition suivante.

Proposition II.2.9. — *Soit $H = \{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times : a^{\frac{N-1}{2}} \equiv (\frac{a}{N}) \mod N\}$; alors $H = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ si et seulement si N est premier.*

Démonstration. — On a déjà vu que si N est premier alors $H = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Réciproquement si p^2 divise N, il existe alors un élément $a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ d'ordre $p(p-1)$ et comme p ne divise pas $N-1$, $a^{N-1} \not\equiv 1 \mod N$. Si $N = pp_2 \cdots p_r$ sans facteurs carrés ; par le lemme chinois soit $a \equiv 1 \mod p_2 \cdots p_r$ et a non carré modulo p de sorte que $(\frac{a}{N}) = -1$ mais $a^{(N-1)/2} \equiv 1 \mod p_2 \cdots p_r$ et donc $a^{(N-1)/2} \not\equiv 1 \mod N$. □

Applications :

- *Test probabiliste* : si N est composé alors comme $[(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times : H] \geq 2$, en prenant a aléatoirement on a au moins une chance sur deux d'avoir $a \notin H$ de sorte que si N passe successsivement k tests, on peut dire qu'il est premier avec une probabilité $\geq 1 - 2^{-k}$.
- *Test déterministe sous GRH* : l'hypothèse de Riemann généralisée implique que si N est composé, il existe $a \leq 2(\log N)^2$ qui ne passera pas le test de Solovay-Strassen
- *Test probabiliste de Rabin-Miller* : un entier $n = 1 + 2^k q$ impair, q impair, est dit fortement pseudo-premier de base b si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$b^q \equiv 1 \mod n \qquad \exists 0 \leq j < k,\ b^{2^j q} \equiv -1 \mod n$$

Si n est premier alors il est fortement pseudo-premier de base b pour tout $1 \leq b < n$: en effet $b^{2^k q} \equiv 1 \mod n$ et soit donc $0 \leq i \leq k$ le plus petit entier tel que $b^{2^i q} \equiv 1$

mod n. Si $i = 0$, on a $b^q \equiv 1 \mod n$ et si $i > 0$ alors $b^{2^{i-1}q} \equiv -1 \mod n$ car dans un corps $x^2 = 1$ entraine $x = \pm 1$.
Remarque : si n est fortement pseudo-premier de base b alors il est pseudo-premier de base b : en effet il existe $0 \leq i \leq k$ tel que $b^{2^i q} \equiv 1 \mod n$; or $2^i q$ divise $n-1$ de sorte que $b^{n-1} \equiv 1 \mod n$.
Exemple : $n = 561$ est pseudo-premier de base 13 mais il n'est pas fortement pseudo-premier de base 2 : en effet $n - 1 = 2^4 35$ et $2^{352^3} \equiv 1 \mod 561$ mais $2^{352^2} \equiv 67 \mod 561$.

Théorème II.2.10. — *(Rabin) Pour n impair soit*

$$B_n = \{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \ / \ n \text{ est fortement pseudo-premier de base } x\}.$$

Alors si n est non premier alors $\frac{|B_n|}{\phi(n)} \leq 1/4$ sauf pour $n = 9$.

Remarque : autrement dit si $|B_n| \geq \phi(n)/4$ alors n est premier. Ainsi si n est fortement pseudo-premier dans m bases tirées au hasard, on peut présumer, avec une probabilité d'erreur inférieure à $1/4^m$, qu'il est premier. Par exemple pour $n = 561$, on obtient $|B_{561}| = 10$ de sorte qu'outre ± 1, il ne reste plus que 8 entiers qui font croire que 561 est premier et le rapport $\frac{|B_{561}|}{\varphi(561)} = 1/32$ est relativement faible. Ce critère est particulièrement adapté à la méthode RSA.

Démonstration. — Soit $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en facteurs premiers de $n = 1 + 2^k q$, q impair ; on écrit $p_i = 1 + 2^{k_i} q_i$ avec q_i impair et $k_1 \leq \cdots \leq k_r$. L'ensemble B_n est la réunion disjointe de $P_n = \{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \ / \ x^q = 1\}$ et des $Q_n(j) = \{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \ / \ x^{2^j q} = -1\}$ pour $0 \leq j < k$.
- *calcul de* $|P_n|$: le théorème chinois donne $P_n \simeq \prod_{i=1}^r P_{p_i^{\alpha_i}}$ avec $|P_{p_i^{\alpha_i}}| = (q, \varphi(p_i^{\alpha_i})) = (q, q_i)$.
- *calcul de* $|Q_n(j)|$: à nouveau le théorème chinois nous ramène à calculer le cardinal de $Q_{p_i^{\alpha_i}}(j)$: or ce dernier ensemble est non nul si et seulement si $(-1)^{\frac{\varphi(p_i^{\alpha_i})}{(2^j q, \varphi(p_i^{\alpha_i}))}} = 1$ ce qui est équivalent à $\frac{2^{k_i} q_i}{2^{\inf(j,k_i)}(q,q_i)}$ car $(2^j q, \varphi(p_i^{\alpha_i})) = 2^{\inf(j,k_i)}(q, q_i)$; en effet comme p_i divise n, et que n est premier avec $n - 1 = 2^k q$ alors p_i est premier avec $n - 1$. Ainsi $Q_{p_i^{\alpha_i}}(j)$ est non vide si et seulement si $j < k_i$ et dans ce cas son cardinal est $2^j(q, q_i)$. Finalement si $j \geq k_1$ alors $Q_n(j)$ est vide et si $j < k_1$ alors $|Q_n(j)| = 2^{jr}(q, q_1) \cdots (q, q_r)$. En outre comme $p_i \equiv 1 \mod 2^{k_i}$ alors $n \equiv 1 \mod 2^{k_1}$ soit $k_1 \leq k$. Ainsi on obtient

$$\sum_{0 \leq j < k} |Q_n(j)| = \sum_{0 \leq j < k_1} |Q_n(j)| = \prod_{i=1} r(q, q_i) \sum_{0 \leq j < k_1} 2^{jr}$$

ce qui en y ajoutant le calcul du cardinal de P_n, donne

$$|B_n| = (q, q_1) \cdots (q, q_r)(1 + \sum_{j=0}^{k_1 - 1} 2^{jr})$$

et donc $\frac{|B_n|}{\phi(n)} \leq \frac{1 + \frac{2^{k_1 r} - 1}{2^r - 1}}{2^{k_1 r}} K$, avec $K = \prod_{i=1}^r \frac{(q, q_i)}{q_i p_i^{\alpha_i - 1}}$.
Remarque : si tous les k_i ne sont pas tous égaux, on peut améliorer l'inégalité précédente d'un facteur 2.

On obtient ainsi

$$\frac{|B_n|}{\varphi(n)} = \frac{1+\frac{2^{k_1 r}-1}{2^r-1}}{2^{k_1+\cdots+k_r}} K$$

si l'on minore $k_1+\cdots+k_r$ par rk_1, on obtient l'inégalité demandée ; si en outre tous les k_i ne sont pas égaux k_1, on peut minorer $k_1+\cdots+k_r$ par rk_1+1.

Dans le cas où $n=p^\alpha$, on obtient alors $\frac{|B_n|}{\varphi(n)} \leq (q,q_1)/q_1 \leq 1/p_1^{\alpha_1-1}$ ce qui donne si $p_1 \geq 5$, $\frac{|B_n|}{\varphi(n)} \leq 1/5$ et si $p_1=3$, $\frac{|B_n|}{\varphi(n)} \leq 1/9$ sauf pour $\alpha=2$, i.e. $n=9$ auquel cas $B_9=\{1,-1\}$ et $\varphi(9)=6$ soit $\frac{|B_9|}{\varphi(9)}=1/3$.

Dans le cas général, le rapport $\frac{1+\frac{2^{k_1 r}-1}{2^r-1}}{2^{rk_1}}$ qui intervient dans la majoration, est décroissant en k_1 ; on peut donc le remplacer par $1/2^{r-1}$, soit

$$\frac{|B_n|}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{2^{r-1}} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}$$

Si l'un des α_i est supérieur ou égal à 2, alors $\prod_{i=1}^r \frac{1}{p_i^{\alpha_i-1}} \leq 1/3$ et donc $\frac{|B_n|}{\varphi(n)} \leq 1/6$. On suppose donc dans la suite que tous les α_i sont égaux à 1 :
cas $r \geq 3$: l'inégalité $\frac{|B_n|}{\varphi(n)} \leq 1/4$ est alors immédiate et l'égalité est obtenue pour $r=3, k_1=k_2=k_3=1$ et $q_i|q$ autrement dit si la décomposition primaire de n est $(1+2q_1)(1+2q_2)(1+2q_3)$.
cas $r=2$ *et* $k_1<k_2$ d'après ce qui précède on a la majoration $\frac{|B_n|}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{2^2}\prod_{i=1}^2 \frac{(q,q_i)}{q_i} \leq 1/4$, l'égalité étant obtenue si et seulement si $k_1=1, k_2=k_1+1=2$, q_1 et q_2 divisent q soit $q_1=q_2$ et la décomposition primaire de n est $(1+2q_1)(1+4q_1)$, ce qui est le cas étudié plus haut.
cas $r=2$ *et* $k_1=k_2$ on a la majoration $\frac{|B_n|}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{2}\prod_{i=1}^2 \frac{(q,q_i)}{q_i}$. Or q_1 et q_2 ne peuvent pas tous deux diviser q ; en effet on a

$$n-1=2^k q = p_1p_2-1 = (1+2^{k_1}q_1)(1+2^{k_1}q_2)-1 = 2^{k_1}(q_1+q_2)+2^{2k_1}q_1q_2$$

et si $q_1|q$ (resp. $q_2|q$) entraine $q_1|q_2$ (resp. $q_2|q_1$) soit $q_1=q_2$ puis $p_1=p_2$ ce qui n'est pas. On en déduit alors $\frac{(q,q_i)}{q_i} \leq 1/3$ pour $i=1$ ou 2 soit $\frac{|B_n|}{\varphi(n)} \leq 1/6$.

□

Remarque : soit $p_1 \equiv 3 \mod 4$ premier tel que $p_2=2p_1-1$ est premier (par exemple $p_1=40039, 41011, 42727$). Soit $n=p_1p_2$: pour $p_1=1+2q_1$ et $p_2=1+4q_1$ avec q_1 impair, on écrit $n-1=2q_1(3+4q_1)=2^kq$, soit $k=1$ et $q=q_1(3+4q_1)$. L'ensemble B_n est la réunion disjointe de

$$P_n=\{x\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \ / \ x^q=1\} \qquad Q_n=\{x\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \ / \ x^q=-1\}$$

Le théorème chinois donne avec des notations évidentes $|P_n|=|P_{p_1}||P_{p_2}|$ et $|Q_{p_1}||Q_{p_2}|$. Or comme $(\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z})^\times$ est cyclique d'ordre p_1-1, on a $|P_{p_1}|=(q,p_1-1)=(q,2q_1)=(q,q_1)=q_1$. On calcule de même les autres cardinaux et on obtient $|B_n|=2q_1^2$ et $\phi(n)=8q_1^2$ et donc finalement $4|B_n|=\phi(n)$.
Remarque : Ainsi si n est fortement pseudo-premier dans m bases tirées au hasard, on peut présumer, avec une probabilité d'erreur inférieure à $1/4^m$, qu'il est premier. Par exemple pour

$n = 561$, on obtient $|B_{561}| = 10$ de sorte qu'outre ± 1, il ne reste plus que 8 entiers qui font croire que 561 est premier et le rapport $\frac{|B_{561}|}{\varphi(561)} = 1/32$ est relativement faible.
Remarque : en admettant l'hypothèse de Riemann généralisée, dont on peut raisonnablement à la fois penser qu'elle est vérifiée et qu'elle n'est pas prête d'être démontrée, alors si pour tout $2 \leq a \leq 2\log^2 n$, n est pseudo-premier de base a, nécessairement n est premier. L'algorithme de Rabin-Miller fournit, sous cette hypothèse, une preuve de primalité en $O(\log^4 n)$.

En juillet 2002, le professeur Agrawal et deux de ses élèves Kayal et Saxena ont donné le premier test de primalité en temps polynomial. La première version de leur algorithme a été amélioré en 2003 ; nous allons présenter cette dernière version qui ne nécessite au résultat pointu d'algèbre. La complexité de cet algorithme est en revanche beaucoup plus lente que celle de la version conjecturale de l'algorithme de Rabin-Miller.

Proposition II.2.11. — *Soient $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge n = 1$. Alors n est premier si et seulement si*

$$(X + a)^n \equiv X^n + a \mod n.$$

Démonstration. — On a déjà vu que pour p premier et pour tout $1 \leq k < p$, le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ est divisible par p. Il reste donc à étudier la réciproque. Supposons donc que pour tout $1 \leq i \leq n-1$, on ait $\binom{n}{i} \equiv 0 \mod n$. Regardons alors les congruences modulo n des $\binom{n-1}{i}$. Pour $i = 1$, on a $\binom{n-1}{1} = n - 1 \equiv -1 \mod n$. De la formule de Pascal

$$\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i+1} = \binom{n}{i+1}$$

et de l'hypothèse $\binom{n}{i} \equiv 0 \mod n$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, on en déduit par une récurrence simple que pour tout $1 \leq i \leq n-1$

$$\binom{n-1}{i} \equiv (-1)^i \mod n.$$

Soit alors d un diviseur strict de n. Rappelons la relation $d\binom{n}{d} = n\binom{n-1}{d-1}$ que l'on interprète combinatoirement comme le nombre de choisir d personnes parmi n et de nommer un chef parmi eux : pour ce faire on peut soit commencer par choisir le groupe puis le chef, ou inversement choisir le chef puis le reste du groupe. D'après ce qui précède on doit donc avoir

$$\binom{n}{d} \equiv 0 \mod n \quad \text{et} \quad \frac{n}{d}\binom{d-1}{n-1} = \frac{n}{d}(-1)^{d-1},$$

soit $\frac{n}{d}(-1)^{d-1} \equiv 0 \mod n$ ce qui n'est possible que pour $d = 1$, i.e. n ne possède qu'un unique diviseur strict et est donc premier. □

Un premier algorithme élémentaire consisterait ainsi à choisir un entier a premier avec n puis de vérifier si la congruence est satisfaite. Le problème est qu'il faudrait vérifier n coefficients de sorte que la complexité ne pourrait être polynomiale, i.e. en $O(\log^k n)$. Un moyen simple de réduire le nombre de coefficients à calculer est d'évaluer la congruence modulo $X^r - 1$ pour un $r \simeq \ln n$ bien choisi, i.e. de montrer que $(X + a)^n \equiv X^n + a$ est vraie dans $\frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]}{(X^r-1)\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]}$.

Comme précédemment, il faut se méfier des nombres de Carmichael. Prenons par exemple $n = 1729 = 7.13.19$ alors pour $a = 5$ et $r = 3$, on a bien

$$(X + 5)^{1729} \equiv X + 5 \mod (X^3 - 1)\mathbb{Z}/1729\mathbb{Z}[X].$$

En revanche si on prend $r = 5$ alors

$$(X+5)^{1729} \equiv 1254X^4 + 799X^3 + 556X^2 + 1064X + 1520 \mod (X^5-1)\mathbb{Z}/1729\mathbb{Z}[X].$$

La découverte de AKS est l'existence d'un nombre r tel que la congruence précédente pour plusieurs a déterminés impose la primalité de n. La recherche de r et le nombre de vérifications à accomplit ensuite avec les a déterminés s'effectuent en un temps polynomial en $\log n$. L'algorithme se déroule alors ainsi :

— Si $n = a^b$ avec $b > 1$ alors n n'est pas premier.
— Construire le plus petit entier r tel que l'ordre de n modulo r soit supérieur à $4\log^2 n$.
— Si $a \wedge n > 1$ pour $a \leq r$ alors n n'est pas premier.
— Si $n \leq r$ alors n est premier.
— Pour $a = 1$ à $\lfloor 2\sqrt{\varphi(r)}\log(n)\rfloor$, si

$$(X+a)^n \not\equiv X^n + a \mod (X^r-1)\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$$

alors n n'est pas premier.
— Sinon n est premier.

Notons tout d'abord que si n est premier, l'algorithme vous le confirme. Il reste donc à vérifier que l'algorithme annoncera bien la non primalité d'un n composé.

II.2.4. Conjectures d'actualité sur les nombres premiers. — Dans ce paragraphe, nous allons mentionner quelques unes des conjectures célèbres sur les nombres premiers qui ont récemment connues des avancées spectaculaires ces dernières années.

Conjecture II.2.12. — ***(des nombres premiers jumeaux)*** *Il existe une infinité de couples $(p, p+2)$ de nombres premiers.*

Remarque : en 1919, Brun a montré que la somme des inverses des nombres premiers jumeaux était convergente ce qui bien entendu ne va pas dans la bonne direction. La question était un peu abandonnée jusqu'au 13 mai 2013 quand Y. Zhang a montré qu'il existait une infinité de paires de nombres premiers dont la différence était inférieure à 70000000. Un projet collaboratif dirigé par T. Tao a rapidement permis de ramener l'écart à 4 680. Ensuite J. Maynard a publié un article permettant de ramener la borne à 600. Depuis les recherches s'activent pour abaisser encore la borne, toutefois il semble que les techniques développées par Zhang ne puissent dépasser 12.

Conjecture II.2.13. — ***(Hardy et Littlewood)*** *Notons $\pi_2(x)$ le nombre de premiers $p \leq x$ tels que $p+2 \in \mathcal{P}$, alors*

$$\pi_2(x) \sim 2C_2 \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}, \quad C_2 = \prod_{p\geq 3} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \simeq 0,66.$$

On dispose de plusieurs généralisations possibles de la conjecture des nombres premiers jumeaux. La plus ancienne date de 1849.

Conjecture II.2.14. — ***(de Polignac)*** *Tout entier naturel pair peut s'écrire comme différence de deux nombres premiers consécutifs et cela d'une infinité de manières.*

Plus récemment, soient $f_1, \cdots, f_k$ des polynômes de degré 1, irréductibles et vérifiant la propriété que pour tout nombre premier p il y ait au moins un entier n parmi $0, \cdots, p-1$ tel que p ne divise pas le produit des $f_i(n)$. On note $\omega(p)$ le complémentaire à p du nombre

de tels entiers. Un tel ensemble de polynômes est dit admissible ; on cherche à connaître la proportion d'entiers en lesquels les polynômes prennent simultanément des valeurs premières. *Remarque :* se limiter à des ensembles de polynômes admissibles permet d'éviter des cas triviaux comme $f_1(t) = t$, et $f_2(t) = t + 1$.

Conjecture II.2.15. — *Le nombre d'entiers $n \leq x$ tels que les valeurs $f_1(n), \cdots, f_k(n)$ sont simultanément premières, est pour x assez grand, de l'ordre de :*

$$\Big(\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1-\frac{\omega(p)}{p}}{(1-\frac{1}{p})^k}\Big)\frac{x}{\ln|f_1(x)|\cdots\ln|f_k(x)|}.$$

Remarque : le théorème des nombres premiers correspond au cas $k = 1$ et $f_1 = t$, le théorème de Dirichlet à $k = 1$ et $f_1 = at + b$. Pour $k = 2$, $f_1(t) = t$ et $f_2(t) = t + 2$, on obtient une version quantitative de la conjecture des nombres premiers jumeaux.

Conjecture II.2.16. — ***(Conjecture** abc) Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante K_ϵ telle que pour tous a, b, c entiers relatifs premiers entre eux vérifiant $a + b = c$, on ait*

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} \leq K_\epsilon N_0(abc)^{1+\epsilon}$$

où $N_0(n)$ est le produit des nombres premiers divisant n.

Remarque : la conjecture *abc* est une version corps des nombres du théorème de Mason, cf. le §**??**, pour les corps de fonctions proposée par Oesterlé et Masser en 1985.

Théorème II.2.17. — *(sous la conjecture abc) Il existe N qui dépend explicitement de K_ϵ tels que pour tout $n \geq N$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solutions entières.*

Démonstration. — Soient x, y, z premiers entre eux solutions de l'équation de Fermat pour n ; sous la conjecture abc, on a

$$|x|^n \leq \max\{|x|^n, |y|^n, |z|^n\} \leq K_\epsilon N_0((xyz)^n)^{1=\epsilon}.$$

Or comme $N_0((xyz)^n) = N_0(xyz)$, en écrivant la relation précédente pour $|y|^n$ et $|z|^n$ et en les multipliant toutes les trois on obtient

$$|xyz|^n \leq K_\epsilon^3 N_0(xyz)^{3(1+\epsilon)}$$

ce qui en utilisant que $N_0(xyz) \leq |xyz$ implique $|xyz|^{n-3(1+\epsilon)} \leq K_\epsilon^3$. De la minoration $|xyz| \geq 2$, on en déduit $2^{n-3(1+\epsilon)} \leq K_\epsilon^3$ et donc le résultat. □

Remarque : la conjecture abc implique plusieurs résultats très importants comme la conjecture de Spiro, le théorème de Faltings, l'existence pour $a \geq 2$ fixé, d'une infinité de premiers p tel $a^{p-1} \not\equiv 1 \mod p^2$, la conjecture d'Erdos-Woods (i.e. il existe une constante $k > 0$ telle que pour tous x, y positifs si $N_0(x + i) = N_0(y + i)$ pour tout $i = 1, 2, \cdots, k$ alors $x = y$), et bien d'autres encore. En août 2012, un mathématicien renommé a annoncé avoir démontré cette conjecture dans une série de 4 longs papiers. À cet instant il est difficile de savoir si la preuve est correcte, disons que le sentiment général est plutôt négatif ce qui justifie mon choix de ne pas mentionner le nom de l'auteur.

Conjecture II.2.18. — ***(de Goldbach)** Tout entier $n > 2$ est la somme de deux nombres premiers.*

Schnizel a montré que la conjecture de Goldbach était équivalente au fait que tout entier $n > 17$ était la somme de trois premiers distincts. Ramaré a montré que tout entier n est la somme d'au plus 6 nombres premiers et en 1966 Chen a montré que tout entier suffisamment grand est la somme d'un nombre premier et d'un entier possédant au plus deux facteurs premiers. En 2012 T. Tao a montré tout entier impair est somme d'au plus 5 nombres premiers et en 2013 H. Helfgott a montré que tout $n > 5$ impair était somme de 3 nombre premiers.

CHAPITRE III

NOMBRES RÉELS

III.1. Quelques exemples de nombres irrationnels

Considérons un triangle rectangle isocèle dont les côtés adjacents à l'angle droit sont de longueur 1. D'après le théorème de Pythagore, sa diagonale a pour longueur $\sqrt{2}$. Or si $\sqrt{2}$ était un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ écrit sous forme irréductible $a \wedge b = 1$, on aurait $2b^2 = a^2$ de sorte que la valuation 2-adique du terme de droite (resp. de gauche) est pair (resp. impair), ce qui est contradictoire. Ainsi, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, alors même que c'est un nombre relativement simple, tant d'un point de vue arithmétique que géométrique. En anticipant sur la construction du corps des nombres réels et sur l'analyse, donnons quelques exemples célèbres de nombres irrationnels.

Proposition III.1.1. — *Le nombre réel π est irrationnel, i.e. $\pi \notin \mathbb{Q}$.*

Démonstration. — Soit D l'opérateur de dérivation sur les polynômes et on pose alors $\Delta = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k D^{2k}$. Remarquons tout d'abord que la somme est faussement infinie puisque pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n$, on a

$$\Delta(P)(X) = P(X) - P''(X) + P^{(4)}(X) + \cdots + (-1)^n P^{(2n)}(X).$$

On remarque alors que pour tout x réel et pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, on a l'égalité suivante de fonctions réelles :

$$P(x)\sin x = \big(\Delta(P')(x)\sin x - \Delta(P)(x)\cos x\big)',$$

de sorte que par intégration, on obtient la *formule d'Hermite*

$$\int_0^\pi P(x)\sin x dx = \Delta(P)(0) + \Delta(P)(\pi).$$

Supposons $\pi = a/b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ et considérons $P(x) = \frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n$. Parce que $P(x)\sin x$ est continue positive non identiquement nulle sur $[0, \pi]$, le nombre réel $I_n = \int_0^\pi P(x)\sin x dx$ est strictement positif. Par ailleurs comme sur $[0, \pi]$ on a $x(a - bx) \leq a^2/4b$, on en déduit que $I_n \leq \frac{1}{n!}\pi\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$ qui tend donc vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Il existe donc un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a $0 < I_n < 1$.

D'un autre côté, en utilisant la notion de multiplicité d'une racine d'un polynôme [1], on obtient que pour tout $0 \leq k < n$, $P^{(k)}(0) = P^{(k)}(\pi) = 0$ et pour tout $k \geq n$, $P^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(\pi)$ sont des entiers positifs. On en déduit alors que

$$I_n = \Delta(P)(0) + \Delta(P)(\pi) \in \mathbb{N}.$$

1. ou la formule de dérivation de Leibniz

Ainsi, l'hypothèse $\pi \in \mathbb{Q}$ aboutit à une contradiction, puisque I_n ne peut pas être un entier strictement compris entre 0 et 1, ce qui finit de prouver que $\pi \notin \mathbb{Q}$. □

Proposition III.1.2. — *Le réel π^2 est irrationnel.*

Démonstration. — Soit $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$. On vérifie aisément que $f_n^{(m)}(0) = 0$ pour $m < n$ et $m > 2n$. En écrivant $x^n(1-x)^n = \sum_k c_k x^k$, on a $f^{(m)}(0) = \frac{m!}{n!} c_m$ pour $m \geq n$. En remarquant que $f_n(1-x) = f_n(x)$ on a le même résultat en 1.

On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}$ premiers entre eux et $b \neq 0$ tels que $\pi^2 = a/b \in \mathbb{Q}$ et on pose

$$G_n(x) = b^n[\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)].$$

de sorte que d'après ce qui précède, $G_n(0)$ et $G_n(1)$ sont des entiers. Par intégration par parties, on obtient

$$\pi \int_0^1 a^n \sin(\pi x) f_n(x) dx = G_n(0) + G_n(1).$$

Or l'intégrale est clairement majorée par $\pi a^n/n!$ dont la limite est nulle pour n tendant vers l'infini ($0 < f(x) \leq 1/n!$). Comme un entier plus petit que $1/2$ est nul, on obtient que l'intégrale est nulle ce qui est absurde. □

Remarque : Cf. le §III.6 pour une preuve de la transcendance de π.

Proposition III.1.3. — (1) *Le réel e est irrationnel ;*

(2) *e n'est pas racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients rationnels ;*

(3) *$e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}}$ est irrationnel ;*

(4) *e^2 n'est pas racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients rationnels ;*

(5) *$e^{\sqrt{3}}$ est irrationnel ;*

(6) *Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée de nombres entiers ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

  (i) *il existe $N > 0$ tel que $b_n = 0$ pour tout $n \geq N$;*

  (ii) *le nombre $\nu_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!}$ est rationnel ;*

  (iii) *Le nombre $\nu_2 = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n 2^n}{n!}$ est rationnel.*

Démonstration. — Comme d'habitude, l'argument final proviendra du fait élémentaire suivant : toute suite d'entiers relatifs qui converge vers 0 est nulle à partir d'un certain rang. Le schéma de la preuve est le suivant : soit à montrer qu'une série convergente $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est irrationnelle, on raisonne par l'absurde et on écrit pour une suite $k(N)$ d'entiers strictement croissante

$$\frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{k(N)} u_n = \sum_{n>k(N)} u_n, \tag{1}$$

égalité que l'on multiplie par un entier a_N tel que

(a) $a_N p/q \in \mathbb{Z}$;

(b) $a_N u_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n = 0, \ldots, k(N)$;

(c) $(a_N \sum_{n>k(N)} u_n)_N$ est une suite $(r_N)_N$ de réels non nuls telle qu'il existe N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$, $|r_N| < 1$.

La contradiction découle alors du fait que dans l'égalité multipliée par a_N,

— le membre de gauche est une suite d'entiers,

— alors que le membre de droite est à partir d'un certain rang de valeur absolue strictement plus petite que 1.

Il suffit alors de justifier que les deux membres de sont non nuls pour aboutir à une contradiction.
Remarque : Afin d'assurer la dernière condition de (c), on pourra se ramener à une suite convergeant vers 0. En ce qui concerne la condition (a), il suffit de multiplier a_N par q ce qui ne modifie pas les conditions (b) et (c).

(1) La suite considérée est $u_n = \frac{1}{n!}$. On prend $k(N) = N$ et $a_N = N!$; les conditions (a) et (b) sont évidentes. En ce qui concerne (c), la non nullité découle du fait que l'on a une série à termes strictement positifs ; la majoration suivante

$$r_N \;=\; (N+1)^{-1} + (N+1)^{-1}(N+2)^{-1} + \ldots \;\leq\; \sum_{i=1}^{+\infty}(N+1)^{-i} = 1/N$$

montre la convergence de r_N vers 0 d'où le résultat.

(2) Si e est solution d'une équation de degré 2 alors il existe $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $ae + \frac{b}{e} = c$; quitte à multiplier cette équation par -1, on suppose $a > 0$. La suite considérée est alors $u_n = \frac{a+(-1)^n b}{n!}$ avec $p = c$ et $q = 1$. Si b est négatif (resp. positif), on prend $k(N) = 2N$ (resp. $k(N) = 2N+1$) avec $a_N = k(N)!$. Les conditions (a) et (b) sont évidentes ; la non nullité de r_N découle du fait que comme la suite $\frac{(-1)^n}{n!}$ vérifie le critère des séries alternée, $\sum_{n>k(N)} b\frac{(-1)^n}{n!}$ est du signe de $b(-1)^n$ et donc strictement positif. En ce qui concerne la convergence vers 0, le résultat découle de la majoration $\left|\frac{a+(-1)^n b}{n!}\right| \leq \frac{|a|+|b|}{n!}$ et on conclut comme dans (1).

(3) On a $\frac{e^{\sqrt{2}}+e^{-\sqrt{2}}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!}$, et soit $u_n = \frac{2^n}{(2n)!}$. On pose $k(N) = N$ et $a_N = q\frac{(2N)!}{2^N}$. La condition (a) est claire tandis que pour (b) cela découle de l'égalité pour tout $0 \leq m \leq N$,

$$\frac{(2N)!}{2^{N-m}(2m)!} = \frac{N!}{m!}(2m+1) + \cdots + (2N-1) \in \mathbb{N}.$$

En ce qui concerne (c), la non nullité découle du fait que la série est à termes positifs et la convergence vers 0 découle de $\frac{2^k(2N)!}{(2n+2k)!} \leq (N+1)^k$ et du fait que $\sum_{k=1}^{\infty}(N+1)^{-k} = 1/N$.

(4) Il suffit de montrer comme dans (c) qu'une égalité de la forme $ae^2 + be^{-2} = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$ est impossible. A l'image de (2), on considère $u_n = \frac{a+(-1)^n}{n!}2^n$. On suppose $a > 0$ et on pose pour $b < 0$ (resp. $b > 0$) $k(N) = 2^N$ (resp. $2^n + 1$). La valuation 2-adique de $n!$ est égale à

$$v_2(n!) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^3} \right\rfloor + \ldots < n,$$

de sorte que pour $n = 2^i$ (resp. $n = 2^i + 1$), on a $v_2(n!) = n - 1$ (resp. $n - 2$). On pose alors $\frac{2^n}{n!} = \frac{2^{\alpha_n}}{p_n}$ avec donc $\alpha_n > 0$ égal à 1 (resp. 2) si $n = 2^i$ (resp. $2^i + 1$) ; notons par ailleurs que si $n > m$ alors $p_m \mid p_n$. On pose alors $a_N = 2^i\frac{k(N)!}{2^{k(N)}}$ avec $i = 0$ (resp. $i = 1$) si $b < 0$ (resp. $b > 0$). La condition (a) est clairement vérifiée tandis que (b) découle du fait que $2^i\frac{k(N)!}{2^{k(N)}}\frac{2^n}{n!} \in \mathbb{Z}$ d'après la discussion précédente. La non nullité dans (c) découle du théorème des séries alternées qui nous dit que $b\sum_{n>k(N)}\frac{(-2)^n}{n!}$ est du signe de $b(-1)^{k(N)}$ et donc strictement positif, cf. (2). En ce qui concerne la convergence vers 0 elle découle de la majoration grossière

$$\frac{2^r}{(k(N)+1)\cdots(k(N)+r)} \leq \Big(\frac{k(N)}{2}\Big)^{-r},$$

avec $\sum_{r\geq 1}\left(\frac{k(N)}{2}\right)^{-r} = (k(N)/2-1)^{-1}$ qui tend bien vers 0 quand $N \to +\infty$.

(5) Comme dans (3), on montre l'irrationalité de $\frac{e^{\sqrt{3}}+e^{-\sqrt{3}}}{2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$, ce qui nous amène à considérer $u_n = \frac{3^n}{(2n)!}$. Contrairement à ce qui se passait dans (3), $\frac{(2N)!}{3^N}\frac{3^m}{(2m)!}$, pour $m < N$, n'est pas forcément entier. Évidemment pour tout $p \neq 3$, la valuation p-adique de ce rationnel est positive,

mais pour $p = 3$ il est possible quelle soit négative. L'idée est donc de rendre la valuation 3-adique de $(2N)!$ maximale et donc de prendre $k(N) = 3^N$. En effet comme dans (4), on a :

$$v_3\big((2n)!\big) = \Big\lfloor \frac{2n}{3} \Big\rfloor + \Big\lfloor \frac{2n}{3^2} \Big\rfloor + \Big\lfloor \frac{2n}{3^3} \Big\rfloor + \ldots < n,$$

et pour $n = 3^N$, on obtient $v_3\big((23^N)!\big) = 3^N - 1 = k(N) - 1$. On écrit alors pour tout n, $\frac{3^n}{(2n)!}$ sous la forme $\frac{3^{\alpha_n}}{p_n}$ avec $3 \wedge p_n = 1$ et $\alpha_n > 0$. Par ailleurs pour tout $m < n$, on a $p_m \mid p_n$. Ainsi, pour $a_N = q\frac{(23^N)!}{3^{3^N}}$, les conditions (a) et (b) sont clairement vérifiées. En ce qui concerne (c), la non nullité découle de la positivité des u_n et en ce qui concerne la convergence elle découle de la majoration grossière

$$\frac{3^k}{(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+2k-1)(2n+2k)} \leq \frac{1}{n^{2k}}.$$

(6) L'implication (i) ⇒ (ii) et (iii) est évidente tandis que (ii) ⇒ (i) découle comme dans (1) du procédé général pour $u_n = b_n/n!$ avec $k(N) = N$ et $a_N = N!$.

L'implication (iii) ⇒ (i) se montre selon le même procédé : pour $u_n = b_n 2^n/n!$ on pose $k(N) = 2^N$ avec $a_N = qk(N)!/2^{k(N)}$. La condition (a) est claire tandis que (b) se prouve comme dans (4), en remarquant que $\frac{k(N)!}{2^{k(N)}}\frac{2^n}{n!} \in \mathbb{Z}$. La condition de non nullité dans (c) découle du fait que la série est à termes positifs tandis que la convergence vers 0 se prouve comme dans (4). □

III.2. Fractions continuées

Les nombres réels construits précédemment sont pour le moment assez abstraits, simplement représentés comme limites d'une suite de Cauchy. Une première façon de les rendre plus concrets est de reprendre la construction précédente. Partant d'un nombre réel x, nous avons vu comment définir sa partie entière

$$x = \lfloor x \rfloor + x_1, \tag{2}$$

avec $0 < x_1 < 1$. Afin d'obtenir une nouvelle décomposition, on multiplie x_1 par 10 et on prend la partie entière de $10x_1$ et ainsi de suite. De manière plus précise, on décompose la partie entière de $10^n x$ en base 10,

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = \sum_{i \leq n} a_{n,i} 10^{-i},$$

et on montre que les $a_{n,i}$ ne dépendent pas de n.

Proposition III.2.1. — *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors x est rationnel si, et seulement si, son développement décimal illimité $x = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i 10^{-i}$, est périodique à partir d'un certain rang.*

Démonstration. — Le sens direct a été prouvé précédemment. Réciproquement supposons que la suite $(a_i)_{i \geq n_0+1}$ est périodique de période n. Posons $z = \sum_{i \geq 1} a_{n_0+i} 10^{-i}$ de sorte que $10^{n_0} x = m + z$ avec $m \in \mathbb{N}$. La périodicité de $(a_i)_{i \geq n_0+1}$ permet alors d'écrire $10^n z = N + z$ où on a posé

$$N = 10^{n-1} a_{n_0+1} + 10^{n-2} a_{n_0+2} + \cdots + a_{n_0+n}.$$

Ainsi, $z = \frac{N}{10^n - 1} \in \mathbb{Q}$ et donc $x = 10^{-n_0}(m + z) \in \mathbb{Q}$. □

Cette construction, bien que satisfaisante, a l'inconvénient de représenter les fractions rationnelles comme un nombre décimal illimité avec une écriture périodique. On aimerait introduire une représentation des nombres réels telle que les nombres rationnels possèdent encore

une écriture finie. Une solution consiste à introduire les fractions continuées [2]. Le principe est à nouveau de partir de mais, afin d'itérer le processus, on ne multiplie pas x_1 par 10 mais on considère son inverse.

Définition III.2.2. — Pour tout $n \geq 1$, on définit $P_n \in \mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ par récurrence en posant $P_{-1} = 0$, $P_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$:

$$P_n(X_0, \ldots, X_{n-1}) = X_0 P_{n-1}(X_1, \ldots, X_{n-1}) + P_{n-2}(X_2, X_3, \ldots, X_{n-1}).$$

Les premiers polynômes sont

$$\begin{aligned} P_1(X_0) &= X_0 \\ P_2(X_0, X_1) &= X_0X_1 + 1 \\ P_3(X_0, X_1, X_2) &= X_0X_1X_2 + X_0 + X_2 \\ P_4(X_0, X_1, X_2, X_3) &= X_0X_1X_2X_3 + X_0X_1 + X_0X_3 + X_2X_3 + 1. \end{aligned}$$

Notation III.2.3. — *Pour $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, la fraction continuée $[a_0, \ldots, a_n]$ est le réel*

$$[a_0, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}},$$

Proposition III.2.4. — *Pour tout $n \geq 0$, la fraction continuée $[a_0, \ldots, a_n]$ est donnée par*

$$[a_0, \ldots, a_n] = \frac{P_{n+1}(a_0, \ldots, a_n)}{P_n(a_1, \ldots, a_n)}.$$

Démonstration. — Pour $n = 0$, on a $\frac{P_1(x_0)}{P_0} = x_0$. Supposons alors le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1$. On a

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}(a_0, \ldots, a_n)}{P_n(a_1, \ldots, a_n)} &= \frac{a_0 P_n(a_1, \ldots, a_n) + P_{n-1}(a_2, \ldots, a_n)}{P_n(a_1, \ldots, a_n)} \\ &= a_0 + \frac{P_{n11}(a_2, \ldots, a_n)}{P_n(a_1, \ldots, a_n)} \\ &= a_0 + \frac{1}{[a_1, \ldots, a_n]}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Définition III.2.5. — Dans le cas où les a_i sont des entiers strictement positifs, on parle de fraction continuée simple et on notera $p_n = P_{n+1}(a_0, \ldots, a_n)$ et $q_n = P_n(a_1, \ldots, a_n)$ de sorte que $[a_0, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ est une fraction rationnelle.

2. Dans la littérature on parle plutôt de fraction continue, cependant devant l'absence d'une quelconque notion de continuité, il nous semble plus adapté de parler de fraction continuée.

Lemme III.2.6. — *Pour tout $1 \leq k \leq n$, en posant $r_k = [a_k, \dots, a_n]$, on a*

$$[a_0, \dots, a_n] = \big[a_0, \dots, a_{k-1}, [a_k, \dots, a_n]\big] = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}}.$$

Démonstration. — La deuxième égalité découle directement de la relation de récurrence. Pour la première on raisonne par récurrence sur k. Pour $k = 1$, on a

$$[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]} = \big[a_0, [a_1, \dots, a_n]\big],$$

ce qui donne le résultat. Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $k - 1 < n$ et traitons le cas de k. On a alors

$$\begin{aligned}[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_k, \dots, a_n]} = a_0 + \frac{1}{\big[a_1, \dots, a_{k-1}, [a_k, \dots, a_n]\big]} \\ = \big[a_0, \dots, a_{k-1}, [a_k, \dots, a_n]\big],\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Lemme III.2.7. — *On a :*

(i) *pour tout $n \geq -1$, $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$;*
(ii) *pour tout $n \geq 0$, $q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n$;*
(iii) $q_n x - p_n = \frac{(-1)^n}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}$;
(iv) *pour tout $n \geq 1$, $\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$.*

Démonstration. — (i) On raisonne par récurrence sur n ; le cas $n = 1$ étant facilement vérifié, supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1$. On a alors d'après la relation de récurrence sur les p_n

$$\begin{aligned}q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} &= (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-1} - (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} \\ &= -(q_{n-1} p_{n-2} - p_{n-1} q_{n-2}) = -(-1)^{n-1} = (-1)^n.\end{aligned}$$

(ii) En utilisant (i) et la relation de récurrence sur les p_n, on a

$$\begin{aligned}q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} &= (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-2} - (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} \\ &= (q_{n-1} p_{n-2} - p_{n-1} q_{n-2}) a_n = (-1)^{n-1} a_n.\end{aligned}$$

(iii) En utilisant (i) et la relation de récurrence sur les p_n, on a

$$q_n x - p_n = q_n \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - p_n = \frac{-(q_{n+1} p_n - p_{n+1} q_n)}{q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}.$$

(iv) On raisonne par récurrence sur n : $\frac{q_1}{q_0} = \frac{a_1}{1} = [a_1]$. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1$, alors

$$\begin{aligned}\frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}{q_{n-1}} &= a_n + \frac{1}{q_{n-1}/q_{n-2}} \\ &= a_n + \frac{1}{[a_{n-1}, \dots, a_1]} = [a_n, \dots, a_1],\end{aligned}$$

d'après le lemme III.2.6. □

Remarque : Il résulte de la relation (i) que p_n et q_n sont premiers entre eux pour tout $n \geq 1$ de sorte que la fraction $\frac{p_n}{q_n}$ est irréductible.

Proposition III.2.8. — *Si deux fractions continuées simples*

$$a = [a_0, a_1, \dots, a_n] \quad et \quad b = [b_0, b_1, \dots, b_m]$$

sont égales et sont telles que $a_n > 1$ *et* $b_m > 1$ *alors* $n = m$ *et* $a_i = b_i$ *pour tout* $i = 0, \dots, n$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur n. Comme a_0 (resp. b_0) est la partie entière de a (resp. b) l'égalité $a = b$ implique $a_0 = b_0$. Supposons à présent $1 \leq n \leq m$ et soit $1 \leq k \leq n-1$ tels que $a_i = b_i$ pour tout $i = 0, \dots, k-1$. On note $r_k = [a_k, \dots, a_n]$ et $s_k = [b_k, \dots, b_m]$. D'après le lemme précédent III.2.6, on a que $a = [a_0, \dots, a_{k-1}, r_k] = [a_0, \dots, a_{k-1}, s_k] = b$ et

$$a = \frac{r_k p_{k-1} + p_{k-2}}{r_k q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{s_k p_{k-1} p_{k-2}}{s_k q_{k-1} + q_{k-2}} = b.$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient

$$(s_k q_{k-1} + q_{k-2})(r_k p_{k-1} + p_{k-2}) = (r_k q_{k-1} + q_{k-2})(s_k p_{k-1} + p_{k-2}),$$

ce qui donne $(r_k - s_k)(p_{k-1} q_{k-2} - p_k q_{k-1}) = 0$ et donc d'après le lemme III.2.7, on a $(r_k - s_k)(-1)^{n-2} = 0$ soit $r_k = s_k$. On en déduit alors $a_k = \lfloor r_k \rfloor = \lfloor s_k \rfloor = b_k$. On montre ainsi par récurrence que $a_i = b_i$ pour tout i dans $\{0, \dots, n\}$ et il reste à montrer que $m = n$. Dans le cas contraire, comme $b_m > 1$, on en déduit que $b = [a_0, a_1, \dots, a_n, b_{n+1}, \dots, b_m] > [a_0, \dots, a_n] = a$ ce qui n'est pas. □

Rappelons notre problématique : on cherche à représenter un réel x à l'aide d'une suite d'entiers. La solution donnée par le développement décimal consiste à prendre le plus grand entier $a_0 < x$. On écrit $x = a_0 + b_1$ et on multiplie alors b_1 par 10 et on construit $x_1 = 10 b_1$. On recommence le procédé précédent en choisissant $a_1 < x_1$ maximal et ainsi de suite.

On modifie alors le procédé comme suit. Pour $0 < x < 1$, on définit une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels $x_n > 1$ et une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ de nombres entiers $a_n \geq 1$ (éventuellement finies) de la façon suivante :

— $x_1 = x^{-1}$, $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$ et

— pour $n \geq 2$, si x_{n-1} n'est pas entier, on pose $x_n = 1/\{x_{n-1}\}$ et $a_n = \lfloor x_n \rfloor$.

Si $x \geq 1$, on pose $a_0 = \lfloor x \rfloor$ et on définit $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(x_n)_{n \geq 1}$ comme précédemment en partant de $\{x\}$.

On obtient alors

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \{x_n\}}}}}},$$

que l'on notera sous la forme $x = [a_0, a_1, \cdots]$.

Définition III.2.9. — Le convergent d'ordre n de $x = [a_0, \cdots]$ est par définition le rationnel $[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$.

Remarque : Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang alors clairement $[a_0, a_1, \cdots]$ est un rationnel. La réciproque est vraie comme l'indique le lemme suivant.

Lemme III.2.10. — *Si* $x \in \mathbb{Q}$ *alors son développement en fraction continuée est finie, i.e. dans la construction précédente il existe* n *tel que* $\{x_n\} = 0$.

Démonstration. — Pour $x = \frac{u_0}{u_1} \in \mathbb{Q}$ avec $0 < u_1 \leq u_0$, avec les notations précédentes, on a $u_0 = a_0 u_1 + u_2$ avec $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$ et $x_1 = \frac{u_1}{u_2}$. En poursuivant, on a $u_1 = a_1 u_2 + u_3$ et ainsi de suite. On reconnaît alors l'algorithme d'Euclide du §**??** qui calcule les u_i de sorte qu'en particulier il existe un indice n pour lequel $u_n = 0$, i.e. la construction de l'énoncé s'arrête en un nombre fini d'étapes. □

Remarque : Un entier n peut s'écrire sous la forme $[n]$ ou encore $[n-1,1]$. De même un nombre rationnel r non entier a exactement deux écritures sous formes de fractions continuées, à savoir $[a_0,\dots,a_n]$ avec $a_n \geq 2$ et d'autre part $[a_0,\dots,a_{n-1},a_n-1,1]$. Ses convergents successifs sont donnés par l'algorithme d'Euclide étendu.

Étudions à présent les fractions continuées simples infinies. La première question concerne bien entendu la convergence.

Proposition III.2.11. — *Soit $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_1, a_2, \dots$ une suite d'entiers strictement positifs. On note $\frac{p_n}{q_n} = [a_0,\dots,a_n]$ la suite des convergents. Alors la suite des convergents pairs (resp. impairs) est strictement croissante (resp. décroissante) ; ces deux sous-suites convergent vers la même limite.*

Démonstration. — D'après le lemme III.2.7, on a

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}} = \frac{a_{2n}}{q_{2n}q_{2n-2}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} = -\frac{a_{2n+1}}{q_{2n+1}q_{2n-1}} < 0.$$

Ainsi, la sous-suite des convergents pairs (resp. impairs) est strictement croissante (resp. décroissante). On a aussi

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}} = \frac{1}{q_{2n-1}q_{2n-2}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} = -\frac{1}{q_{2n}q_{2n-1}} < 0.$$

Ainsi, pour tout $2n \leq 2m+1$, on a

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2m}}{q_{2m}} < \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}}.$$

De même si $2n \geq 2m+1$, on a

$$\frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} \geq \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \geq \frac{p_{2n}}{q_{2n}}.$$

Finalement tous les convergents d'indice pair sont strictement plus petit que ceux d'indices impairs. En outre d'après III.2.7 (iv), la suite q_n est strictement croissante de sorte que

$$\frac{1}{q_{2n-1}q_{2n}} \leq \frac{1}{(2n-1)(2n)} \longrightarrow 0,$$

les suites sont donc adjacentes de même limite. □

Définition III.2.12. — Pour $[a_0, a_1, \cdots]$ une fraction continuée infinie simple, pour tout $n \geq 0$ on note $r_n = [a_n, a_{n+1}, \cdots]$.

Remarque : La relation du lemme III.2.6 est encore valable, i.e.

$$[a_0, a_1, \cdots] = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, r_n] = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}. \tag{3}$$

En raisonnant alors comme dans la preuve de la proposition III.2.8, on obtient l'énoncé suivant.

Proposition III.2.13. — *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'entiers strictement positifs. L'égalité $[a_0, a_1, \cdots] = [b_0, b_1, \cdots]$ implique celle des suites, i.e. $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Corollaire III.2.14. — *Toute fraction continuée simple $[a_0, a_1, \cdots]$ a pour développement en fraction continuée $[a_0, a_1, \cdots]$.*

Démonstration. — Nous noterons $[a'_0, a'_1, \cdots]$ le développement en fraction continuée de $[a_0, a_1, \cdots]$ et montrons par récurrence sur n que $a_n = a'_n$. Pour $n = 0$, l'entier a'_0 est la partie entière de $[a_0, a_1, \cdots]$ qui par construction est égale à a_0. Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$. On a $[a_0, a_1, \cdots] = [a_0, \dots, a_{n-1}, r_n]$ et a'_n est la partie entière de r_n qui par construction est égale à a_n. □

Proposition III.2.15. — *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un nombre irrationnel dont le développement en fraction continuée infinie est $[a_0, a_1, \cdots]$. Alors pour tout $n \geq 0$, on a*

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q'_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2},$$

où la suite $(q'_n)_{n\geq 1}$ est définie par $q'_1 = r_1$ et la relation $q'_n = r_n q_{n-1} + q_{n-2}$.

Démonstration. — Pour $n = 0$, on a $q - \frac{p_0}{q_0} = q - a_0 = \frac{1}{q_0 r_1} = \frac{1}{q_0 q'_1}$. Pour $n \geq 1$, de la relation $x = \frac{r_{n+1}p_n + p_{n-1}}{r_{n+1}q_n + q_{n-1}}$, on tire

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{q_n(r_{n+1}p_n + p_{n-1}) - p_n(r_{n+1}q_n + q_{n-1})}{q_n q'_{n+1}} \\ &= \frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{q_n q'_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q'_{n+1}}. \end{aligned}$$

En ce qui concerne les majorations, de l'encadrement $a_{n+1} < r_{n+1} < a_{n+1} + 1$, on en déduit la minoration

$$q'_{n+1} = r_{n+1}q_n + q_{n-1} > a_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1},$$

ainsi que la majoration

$$q'_{n+1} < (a_{n+1} + 1)q_n + q_{n-1} < a_{n+1}q_n + q_{n-1} + q_n = q_{n+1} + q_n.$$

Or, $q_{n+1} + q_n \leq (a_{n+2} - 1)q_{n+1} + q_{n+1} + q_n = q_{n+2}$, ce qui finit de montrer la dernière majoration. □

Corollaire III.2.16. — *Les suites $|x - \frac{p_n}{q_n}|$ et $|q_n x - p_n|$ sont strictement décroissantes.*

Remarque : On laisse le soin au lecteur de formuler un énoncé du même style pour les $x \in \mathbb{Q}$.

L'avantage de l'écriture d'un réel en fractions continuées par rapport à l'écriture décimale, est que l'on garde une écriture finie pour les rationnels. Regardons par exemple le cas de $\frac{27}{7}$ dont le développement décimal est $3, \overline{857142}$ la notation signifiant que la période est 857142. Avec les notations précédentes, on a $a_0 = 3$ avec $\frac{27}{7} - 3 = \frac{6}{7}$. On écrit alors $\frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$ de sorte que $a_1 = 1$ et $a_2 = 6$, i.e. $\frac{27}{7} = [3, 1, 6]$.

III.3. Meilleures approximations

Rappelons que les nombres réels ont été construits comme limite d'une suite convergente de nombres rationnels. Prenons $\pi = 3,141592653589793238...$, les Babyloniens le donnaient égal à $\frac{25}{8} \simeq 3,125$ et les Égyptiens à $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ égal approximativement à $3,16$. Archimède, conscient de ne pas en connaître la valeur exacte en donnait un encadrement $3 + \frac{10}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. En chine, Tsu Chung Chih donnait $\frac{355}{113} = 3,14159292...$ L'histoire des approximations de π est riche et invoque des formules plus mystérieuses les unes que les autres, que l'on pense, par exemple, à la remarque de Ramanujan disant que $e^{\pi\sqrt{163}}$ est un entier à 10^{-12} près. Dans ce paragraphe, nous nous contentons d'explorer les approximations d'un réel par des rationnels, en cherchant à obtenir la meilleure possible, i.e. étant donnés un réel x et un entier n, quelle est la fraction [3] $\frac{p}{q}$ avec $0 < q \leq n$ minimisant $|x - \frac{p}{q}|$?

Théorème III.3.1. — ***(Vahlen).*** *Soient $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ et $\frac{p_n}{q_n}$ deux convergents successifs de x. Alors au moins l'un des deux vérifie l'inégalité $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}$.*

3. Si $x \in \mathbb{Q}$, on impose en outre à $\frac{p}{q}$ d'être distinct de x.

Démonstration. — Comme $x - \frac{p_n}{q_n}$ et $x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ sont de signes opposés, on a

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}} < \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n-1}^2},$$

d'où le résultat. □

En prenant trois convergents successifs, on peut obtenir le résultat suivant qui fournit une nouvelle preuve de la proposition **??**.

Théorème III.3.2. — ***(E. Borel).*** *Pour tout $n \geq 3$, soient $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_n}{q_n}$ et $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ trois convergents successifs de x. Alors au moins l'un d'eux vérifie l'inégalité $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$.*

Théorème III.3.3. — ***(Legendre).*** *Soient p, q tels que $p \wedge q = 1$, avec $q > 0$ et vérifiant $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$, alors $\frac{p}{q}$ est un convergent de x.*

Démonstration. — Supposons $x \neq \frac{p}{q}$, alors on écrit $x - \frac{p}{q} = \frac{\epsilon\nu}{q^2}$, avec $\epsilon = \pm 1$ et $0 < \nu < 1/2$. Considérons $\frac{p}{q} = [b_0, \ldots, b_{n-1}]$ où n est choisi tel que $(-1)^{n-1} = \epsilon$ et posons ω tel que $x = \frac{\omega p_{n-1} + p_{n-2}}{\omega q_{n-1} + q_{n-2}}$, de sorte que $x = [b_0, \ldots, b_{n-1}, \omega]$. On a

$$\frac{\epsilon\nu}{q^2} = x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{1}{q_{n-1}} \frac{(-1)^{n-1}}{\omega q_{n-1} + q_{n-2}},$$

d'après le lemme III.2.7 et donc $\nu = \frac{q_{n-1}}{\omega q_{n-1} + q_{n-2}}$, et $\omega = \frac{1}{\nu} - \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$ qui est donc $> 2 - 1 = 1$. On écrit $\omega = [b_n, b_{n+1}, \ldots]$ et comme $\omega > 1$, tous les b_{n+i} sont positifs pour $i \geq 0$ et donc

$$x = [b_0, \ldots, b_{n-1}, [b_n, \ldots]] = [b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n, \ldots],$$

d'après le lemme III.2.6, ce qui donne le résultat. □

III.4. Nombres équivalents

Rappelons que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des droites du plan $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})/\sim$$

où deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$ sont équivalents si et seulement s'ils engendrent la même droite, i.e. sont proportionnels. Un élément de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est noté sous la forme $(x : y) = (\lambda x : \lambda y)$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}^\times$. L'action naturelle de $GL_2(\mathbb{R})$ induit alors une action naturelle de $PGL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on note $M.(x : y)$ l'image de $M(x, y)$ soit

$$M(x : y) = (ax + by : cx + dy) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

Définition III.4.1. — On dit que deux réels x, y sont équivalents et on note $x \sim y$ s'il existe $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ telle que $(x : 1) = M.(y, 1)$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, i.e. $x = \frac{ay+b}{cy+d}$.

Remarque : Rappelons qu'une matrice de $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ appartient à $GL_2(\mathbb{Z})$ si, et seulement si, son déterminant est égal à ± 1.

Lemme III.4.2. — *La relation $\sim$ est d'équivalence.*

Démonstration. — Comme la matrice identité appartient à $GL_2(\mathbb{Z})$, alors $x \sim x$. Pour $M \in GL_2(\mathbb{Z})$, on a $(x:1) = M(y:1) \Leftrightarrow (y:1) = M^{-1}(x:1)$ avec M^{-1} dans $GL_2(\mathbb{Z})$, et donc $\sim$ est symétrique. Enfin pour la transitivité, les égalités $(x:1) = M(y:1)$ et $(y:1) = M'(z:1)$ impliquent $(x:1) = (MM')(z:1)$, avec $MM' \in GL_2(\mathbb{Z})$ si $M, M' \in GL_2(\mathbb{Z})$. □

Remarque : Cette notion trouve tout son intérêt dans la formulation du théorème **??** de Markoff.

Proposition III.4.3. — *Tous les nombres rationnels sont équivalents.*

Démonstration. — Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \wedge q = 1$. Soit $up + vq = 1$ une relation de Bézout et soit $M = \begin{pmatrix} q & -p \\ u & v \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$. Alors $M(\frac{p}{q} : 1) = (0:1)$ d'où le résultat. □

Lemme III.4.4. — *Soit $x = [a_1, a_2, \cdots]$ le développement en fraction continuée de x. On suppose que $x = \frac{py+r}{qy+s}$, avec $y > 1$ et p, q, r, s des entiers tels que $q \geq s > 0$ et $ps - qr = \pm 1$. Alors il existe $m \geq 1$ tel que*

$$\frac{r}{s} = [a_0, \ldots, a_{m-1}], \quad \frac{p}{q} = [a_0, \ldots, a_m], \quad \textit{et} \quad y = [a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots].$$

Démonstration. — Notons $[b_0, \ldots, b_n]$ le développement en fraction continuée simple de $\frac{p}{q}$ avec $b_n \geq 2$; quitte à le remplacer par $[b_0, \ldots, b_{n-1}, 1]$ on suppose que n vérifie $ps - qr = (-1)^{n-1}$. Comme $p \wedge q = 1$ et $q > 0$, on en déduit que $p = p_n$ et $q = q_n$. De la relation $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ et comme $0 < s$, $q_{n-1} \leq q$, on en déduit que $s = q_{n-1}$ et $r = p_{n-1}$ et donc $x = \frac{p_n y + p_{n-1}}{q_n y + q_{n-1}}$. On va alors noter $y = [b_{n+1}, b_{n+2}, \cdots]$ le développement en fraction continuée simple de y. Comme $b_{n+1} = \lfloor y \rfloor \geq 1$ est non nul, $[b_0, \ldots, b_n, b_{n+1}, \cdots]$ est une fraction continuée simple avec $x = [b_0, b_1, \cdots]$, d'où le résultat. □

Théorème III.4.5. — *Deux nombres irrationnels x et y sont équivalents si, et seulement si, il existe des entiers m et n tels que le développement en fraction continuée simple de x après le m-ième terme, coïncide avec celui de y après le n-ième terme, i.e.*

$$x = [a_0, a_1, \ldots, a_m, c_0, c_1, \cdots] \qquad \textit{et} \qquad y = [b_0, b_1, \ldots, b_n, c_0, c_1, \cdots].$$

Remarque : Le résultat est aussi valable pour les rationnels puisque $x, y \in \mathbb{Q}$ sont à la fois équivalents et leurs développements en fraction continuée finissent par une suite infinie de 0.

Démonstration. — Soient x et y comme dans l'énoncé, et soit $z = [c_0, c_1, \cdots]$, ainsi $x = \frac{p_m z + p_{m-1}}{q_m z + q_{m-1}}$ et $y = \frac{p'_n z + p'_{n-1}}{q'_n z + q'_{n-1}}$, où pour $k = m-1, m$ (resp. $k = n-1, n$), on écrit $[a_0, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$ (resp. $[b_0, \ldots, b_k] = \frac{p'_k}{q'_k}$), avec

$$p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m = (-1)^{m-1} \qquad \text{et} \qquad p'_n q'_{n-1} - p'_{n-1} q'_n = (-1)^{n-1}.$$

On a $x \sim z$ et $y \sim z$ et donc par transitivité $x \sim y$.

Réciproquement, soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ avec $ad - bc = \pm 1$ et $x = \frac{ay+b}{cy+d}$. Quitte à multiplier le numérateur et le dénominateur par -1, on suppose $cy + d > 0$. Puisque y est supposé irrationnel, son développement en fraction continuée simple est infini : $y = [a_0, a_1, \cdots] = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}}$. Ainsi, pour

tout $k \geq 2$, on

$$\begin{aligned} x &= \frac{a\frac{p_{k-1}r_k+p_{k-2}}{q_{k-1}r_k+q_{k-2}} + b}{c\frac{p_{k-1}r_k+p_{k-2}}{q_{k-1}r_k+q_{k-2}} + d} \\ &= \frac{a(p_{k-1}r_k + p_{k-2}) + b(q_{k-1}r_k + q_{k-2})}{c(p_{k-1}r_k + p_{k-2}) + d(q_{k-1}r_k + q_{k-2})} \\ &= \frac{pr_k + r}{qr_k + s}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} p = ap_{k-1} + bq_{k-1}, &r = ap_{k-2} + bq_{k-2}, \\ q = cp_{k-1} + dq_{k-1}, &s = cp_{k-2} + dq_{k-2}. \end{aligned}$$

Le déterminant étant multiplicatif, on a

$$pq - rs = (ad - bc)(p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1}) = \pm 1.$$

D'après l'égalité de la proposition III.2.15, il existe $\delta \in]0,1[$ et $\delta' \in]0,1[$ tels que

$$q_{k-1}y - p_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}\delta}{q_k} \qquad \text{et} \qquad q_{k-2}y - p_{k-2} = \frac{(-1)^{k-2}\delta'}{q_{k-1}},$$

ce qui s'écrit aussi $p_{k-1} = q_{k-1}y + \frac{\alpha}{q_k}$ et $p_{k-2} = q_{k-2}y + \frac{\beta}{q_{k-1}}$, avec $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$. Ainsi, on a $q = c(q_{k-1}y + \frac{\alpha}{q_k}) + dq_{k-1} = (cy + d)q_{k-1} + \frac{c\alpha}{q_k}$, dans lequel $(cy + d)q_{k-1} > 0$ et $\frac{c\alpha}{q_k}$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini. De même,

$$s = c(q_{k-2}y) + \frac{\beta}{q_{k-1}) + dq_{k-2}} = (cy + d)q_{k-2} + \frac{c\beta}{q_{k-1}},$$

avec $(cy + d)q_{k-2} > 0$ et $\frac{c\beta}{q_{k-1}}$ qui tend vers 0 lorsque k grandit. Comme pour tout $k \geq 3$, on a $0 < q_{k-2} < q_{k-1}$, il existe un rang m à partir duquel $0 < s \leq q$. Ainsi, pour $k = m$, en notant $z = r_m = [a_m, a_{m+1}, \cdots]$ où $y = [a_0, a_1, \cdots]$, on a que $x = \frac{pz+r}{qz+s}$, où p, q, r, s vérifient les hypothèses du lemme précédent. On en déduit donc que $x = [b_0, b_1, \ldots, b_n, z]$ et $y = [a_0, \ldots, a_{m-1}, z]$. □

III.5. Nombres de Liouville

Commençons par remarquer que l'ensemble des nombres algébriques $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{C}$ est dénombrable : en effet on peut écrire $\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{n\geq 1}\bigcup_{P\in\mathbb{Q}_n[X]} P^{-1}(0)$, qui en tant que réunion dénombrable d'ensemble dénombrable, est bien dénombrable. En particulier $\overline{\mathbb{Q}}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Définition III.5.1. — Un nombre réel α est dit de Liouville si pour tout $k > 0$, il existe $p/q \in \mathbb{Q}$ avec $q \geq 2$ tel que

$$0 < |\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^k}.$$

Exemple. Pour $g \geq 2$ un entier rationnel et pour $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée d'entiers rationnels dont une infinité d'entre eux sont non nuls, le réel $x = \sum_{n\geq 0} a_n g^{-n!}$ est de Liouville. En effet notons $A = \max_{n\geq 0} |a_n|$ et soit $k > 0$ un nombre réel. Soit alors N un entier suffisamment grand tel que $a_{N+1} \neq 0$ et posons $q = g^{N!}$ et $p = \sum_{n=0}^{N} a_n g^{N!-n!}$, de sorte que

$$x - \frac{p}{q} = \frac{a_{N+1}}{g^{(N+1)!}} + \sum_{i\geq 2} \frac{a_{N+i}}{g^{(N+i)!}}.$$

Pour $i \geq 2$, on a $(N+i)! - (N+1)! \geq N+i$ et donc

$$\sum_{i\geq 2} \frac{a_{N+i}}{g^{(N+i)!}} \leq \frac{A}{g^{(N+1)!}} \sum_{i\geq 2} \frac{1}{g^{N+i}} < \frac{1}{g^{(N+1)!}} \leq \frac{|a_{N+1}|}{g^{(N+1)!}}.$$

On utilise enfin $|a_{N+1}| \leq A$ et $g^{(N+1)!} = q^{N+1}$ d'où $0 < |x - \frac{p}{q}| \leq \frac{2A}{q^{N+1}}$.

Proposition III.5.2. — *Tout nombre de Liouville est transcendant. L'ensemble des nombres de Liouville n'est pas dénombrable mais sa mesure de Lebesgue est nulle* [4].

Démonstration. — La transcendance d'un nombre de Liouville découle de la proposition **??**. En ce qui concerne le deuxième point de la proposition, il suffit de le vérifier sur l'intervalle $]0,1[$, l'ensemble $\mathcal{L}'$ des nombres de Liouville de $]0,1[$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{L}' =]0,1[\bigcap \Big(\bigcap_{n\geq 2} \bigcup_{p/q\in\mathbb{Q}} [\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}] \Big).$$

L'intervalle $\left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}\right]$ est de mesure $2/q^n$ de sorte que la réunion de ces intervalles, à q fixé est un ensemble de $\leq \frac{2(q+2)}{q^n} \leq \frac{4}{q^{n-1}}$. En faisant la réunion sur l'indice q, on a $\lambda(\mathcal{L}') \leq 4 \sum_{q\geq 2} q^{1-n} = 4\zeta(n-1) \to_\infty 0$. □

Pour un nombre donné, il est en général très difficile de prouver sa transcendance.

III.6. Transcendance de π

Le résultat suivant doit sa célébrité au fameux problème de la quadrature du cercle, i.e. savoir s'il est possible de construire « à la règle et au compas » un cercle de même aire que le carré unité. Pour donner un sens précis à la formule « à la règle et au compas », on renvoie le lecteur à des ouvrages de géométrie, par exemple [**?**]. En utilisant la caractérisation des nombres constructibles « à la règle et au compas » qui en particulier doivent être nécessairement algébriques, le théorème suivant apporte ainsi une réponse négative à la quadrature du cercle, i.e. il n'est pas possible de construire, « à la règle et au compas », un tel cercle.

Théorème III.6.1. — *Le nombre π est transcendant.*

Démonstration. — La preuve se déroule selon deux temps :

- dans le premier, on montre, cf. la proposition suivante, que pour $f \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $f(0) \neq 0$, la somme $N = \sum_{f(\alpha)=0} e^\alpha = e^{\alpha_1} + \cdots + e^{\alpha_n}$ où les α_i sont les racines de f répétées autant de fois que leur multiplicité, n'est pas un entier non nul. L'idée comme d'habitude est d'utiliser la propriété qu'il n'existe pas de suite d'entiers non nuls tendant vers 0.
- Dans le deuxième temps, on utilise l'égalité $e^{i\pi} = -1$, pour produire, au cas où π serait algébrique, une égalité $\sum_{f(\alpha)=0} e^\alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}$, contredisant la propriété générale mentionnée ci-avant.

Pour démontrer la propriété générale sur les $\sum_{f(\alpha)=0} e^\alpha$, on commence par une série de lemmes.

Lemme III.6.2. — *Pour f un polynôme à coefficients réels de degré m, et z un nombre complexe, $I(f;z) = \int_0^1 z e^{z(1-u)} f(zu) du$ vérifie*

$$I(f;z) = e^z \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(z),$$

4. On est donc encore bien loin d'obtenir une « proportion raisonnable » de nombres transcendants.

ainsi que la majoration $|I(f;z)| \leq |z|e^{|z|}\sup_{u\in[0,1]}|f(zu)|$.

Démonstration. — On intègre par parties, soit

$$\begin{aligned} I(f;z) &= \left[-e^{z(1-u)}f(zu)\right]_0^1 + \int_0^1 e^{z(1-u)}zf'(zu)du \\ &= -f(z) + e^z f(0) + I(f';z), \end{aligned}$$

d'où le résultat par récurrence sur le degré de f. Pour obtenir la majoration de $|I(f;z)|$, il suffit d'intégrer $|ze^{z(1-u)}f(zu)| \leq |z|e^{|z|}\sup_{u\in[0,1]}|f(zu)|$ sur $[0,1]$. □

Lemme III.6.3. — *Soit f un polynôme à coefficients entiers. Pour tout $n \geq 0$, il existe un polynôme f_n à coefficients entiers tel que $f^{(n)} = n!f_n$.*

Démonstration. — Par linéarité, il suffit de considérer le cas de $f = X^m$ où on obtient $f^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)X^{m-n}$. Le polynôme $f_n := \binom{n}{m}X^{m-n}$ est à coefficients entiers et vérifie $f^{(n)} = n!f_n$. □

Soit un polynôme f et soit une fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on note $\sum_{f(\alpha)=0} g(\alpha)$ la somme $g(\alpha) = g(\alpha_1) + \cdots + g(\alpha_n)$, où les α_i sont les racines de f répétées autant de fois que leur multiplicité.

Lemme III.6.4. — *Pour f à coefficients entiers, de coefficient dominant a, et pour $n \geq 0$, la somme $a^n \sum_{f(\alpha)=0} \alpha^n$ appartient à $\mathbb{Z}$.*

Démonstration. — Soit m le degré de f et notons A la matrice compagnon du polynôme f/a. Par construction $aA \in \mathbb{M}_m(\mathbb{Z})$, de sorte que a^nA^n est aussi à coefficients entiers, ainsi que sa trace. Or, les valeurs propres de a^nA^n sont les $(a\alpha)^n$, avec α parcourant les racines de f avec multiplicités. □

Proposition III.6.5. — *Soit f un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$, tel que $f(0) \neq 0$ et de coefficient dominant a. Pour p un nombre premier, soit $g(x) = x^{p-1}f^p(x)$ et $J_p = \sum_{f(\alpha)=0} I(g;\alpha)$. Il existe alors un entier M tel que*

$$\frac{a^{m-p}}{(p-1)!}J_p = a^{m-p}Nf(0)^p + pM,$$

où $N = \sum_{f(\alpha)=0} e^\alpha$ n'est pas un entier non nul.

Démonstration. — Par définition, $J_p = N\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} g^{(n)}(0)\Big) - \sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{f(\alpha)=0} g^{(n)}(\alpha)\Big)$. Si $f(\alpha) = 0$ alors α est un zéro d'ordre p de g et donc $g^{(n)}(\alpha) = 0$ pour tout $n < p$. D'autre part si $n \geq p$, d'après ce qui précède, $g_n = g^{(n)}/p!$ est un polynôme à coefficients entiers de degré $m-n$. On écrit $g_n(X) = b_0X^{m-n} + \cdots + b_{m-n}$, puis on applique le lemme précédent à chacun des $b_ia^i\big(a^{m-n-i}\sum_{f(\alpha)=0}\alpha^{m-n-i}\big)$, ce qui donne $a^{m-n}\sum_{f(\alpha)=0} g_n(\alpha) \in \mathbb{N}$ et donc, $a^{m-n}\sum_{f(\alpha)=0} g^{(n)}(\alpha)$ est entier multiple de $p!$. En 0, on a $g^{(n)}(0) = 0$ pour $n < p-1$ et, pour $n \geq p$, $g^{(n)}(0)$ est divisible par $p!$. Enfin $g^{(p-1)}(0) = (p-1)!f(0)^p$ de sorte qu'au final, il existe un entier M tel que $\frac{a^{m-p}}{(p-1)!}J_p = a^{m-p}Nf(0)^p + pM$. Raisonnons par l'absurde en supposant $N \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, de sorte que le second membre de cette égalité est entier. Pour p ne divisant pas $aNf(0)$, cet entier n'est pas multiple de p et, en particulier, il est non nul et donc au moins égal à 1 en valeur absolue. Ainsi

$$|J_p| \geq (p-1)!a^{p-m} = (p-1)!p^{1-p\deg f}.$$

Or, la majoration de l'intégrale I dans (1) implique qu'il existe un réel $c > 0$ tel que $|J_p| \leq c^p$ pour tout p. Quand p tend vers l'infini, la formule de Stirling rend ces deux inégalités incompatibles, d'où la contradiction. □

On veut montrer que π est transcendant. On raisonne par l'absurde : soit f un polynôme irréductible à coefficients entiers tel que $f(i\pi) = 0$ dont on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines.

a) En développant l'égalité $\prod_{f(\alpha)=0}(1+e^{\alpha})$ et en utilisant $e^{i\pi}+1 = 0$, on obtient $\sum_{\epsilon\in\{0,1\}^n} \exp(\sum \epsilon_j\alpha_j) = 0$.

b) Les $\sum \epsilon_j\alpha_j = 0$ sont les racines du polynôme $P_0 = \prod_{\epsilon\in[0,1]^n}(X - \sum_j \epsilon_j\alpha_j)$, dont les coefficients s'expriment comme des polynômes symétriques en les α_j : ce sont donc des polynômes en les fonctions symétriques élémentaires des α_j, donc en les coefficients de f. Ce sont donc des nombres rationnels de sorte que $P_0(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

c) Soit un entier b tel que $bP_0 \in \mathbb{Z}[X]$ et soit $q \geq 1$ la multiplicité de la racine 0 dans P_0. On pose $P := bP_0/X^q$: c'est un polynôme à coefficients entiers avec $P(0) \neq 0$. De plus on a $0 = \sum_{\epsilon\in[0,1]^n} \exp(\sum_j \epsilon_j\alpha_j) = q + \sum_{P(\beta)=0} e^{\beta}$, ce qui contredit la proposition précédente. □

CHAPITRE IV

INTRODUCTION AUX NOMBRES p-ADIQUES

IV.1. Nombres décadiques

Avant de définir la notion abstraite de nombres p-adiques, commençons dans ce paragraphe par la notion plus concrète de *nombre supernaturel* ou *décadique* au sens suivant.

Définition IV.1.1. — *Un entier décadique* est une suite $(c_n)_{n\geq 0}$ de chiffres, i.e. $c_n \in \{0, \dots, 9\}$, que l'on aime bien représenté comme un nombre « supernaturel », i.e. un nombre avec une infinité de chiffres avant la virgule. On notera $\mathbb{Z}_{10}$ l'ensemble des entiers décadiques.

Remarque : Avec cette convention, les suites à support fini, i.e. n'ayant qu'un nombre fini d'indice n tels que $a_n \neq 0$, correspondent aux entiers naturels écrits en base 10. Comme, pour tous entiers a, b, les n derniers chiffres du nombre $a+b$ ne dépendent que des n derniers chiffres de a et b, l'addition habituelle des nombres naturels se prolonge sur $\mathbb{Z}_{10}$.

Lemme IV.1.2. — *L'ensemble $\mathbb{Z}_{10}$ muni de l'addition définie ci-dessus, est un groupe commutatif.*

Démonstration. — L'élément neutre pour l'addition est clairement 0. L'addition est clairement commutative et associative, il nous reste à justifier l'existence d'un opposé. Pour tout entier décadique $a = \cdots a_1 a_0$, notons $b = \cdots b_1 b_0$ tel que pour tout $n \geq 0$, $a_b + b_n = 9$. On a alors $a + b = \cdots 99$ avec $1 + \cdots 99 = 0$ de sorte que $a' := b + 1$ qui vérifie $a' + a = 0$, est l'opposé de a. □

Comme précédemment, pour tout $a, b \in \mathbb{N}$, les n derniers chiffres de ab ne dépendent que des n derniers chiffres de a et b, ce qui permet de prolonger la multiplication des entiers aux entiers décadiques. La distributivité de cette nouvelle loi par rapport à l'addition découle directement de celle sur $\mathbb{N}$, ce qui nous donne la proposition suivante.

Proposition IV.1.3. — *L'ensemble $\mathbb{Z}_{10}$ muni des lois d'addition et de multiplication est un anneau commutatif d'unité* 1.

Proposition IV.1.4. — *Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}_{10}$ sont ceux dont le dernier chiffre est premier avec* 10.

Démonstration. — a) Commençons par traiter le cas des éléments de $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_{10}$. D'après la factorialité de $\mathbb{Z}$, il suffit de traiter le cas des nombres premiers. Soit donc p premier distinct de 2 et 5 ; ainsi comme p est premier avec 10^n, il existe a_n tel que $pa_n \equiv 1 \mod 10^n$. Si a'_n est tel que $a'_n p \equiv 1 \mod 10^n$ alors 10^n divise $a_n - a'_n$ d'après le lemme de Gauss et donc les n premiers chiffres de a_n et a'_n sont les mêmes. Ainsi, pour tout $k \geq 0$, les n derniers chiffres de a_{n+k}, tel que $pa_{n+k} \equiv 1 \mod 10^{n+k}$, sont

indépendants de k ce qui permet de construire un entier décadique a vérifiant $ap = 1$, en résolvant les congruences $pa_n \equiv 1 \mod 10^n$ pour tout $n \geq 0$.

Pour $p = 2$ ou 5, on remarque que pour tout entier décadique a le dernier chiffre de pa n'est jamais égal à 1 et donc p ne peut pas être inversible.

b) Plus généralement si a un entier décadique dont le dernier chiffre est divisible par 2 ou 5 alors pour tout b décadique le dernier chiffre de ab ne peut pas être égal à 1 et donc a n'est pas inversible.

Pour $a \in \mathbb{Z}_{10}$ dont le dernier chiffre est premier avec 10, on note m_n l'entier naturel défini par ses n derniers chiffres et soit d'après a), $b_n \in \mathbb{Z}_{10}$ l'inverse de m_n. Pour tout $r \geq n$, les n derniers chiffres de b_r sont ceux de b_n de sorte que la suite a_n converge vers un entier décadique b tel que pour tout $n \geq 0$ les n derniers chiffres de ab sont $0 \cdots 01$ et donc $ab = 1$ et a est inversible. □

Définition IV.1.5. — Soit $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{Z}_{10}$ non nul ; il existe alors un plus petit entier $v = v_{10}(a)$ tel que $a_v \neq 0$. On munit alors $\mathbb{Z}_{10}$ d'une topologie à l'aide des ouverts $U_n(a) = \{b \in \mathbb{Z}_{10} : \ v_{10}(a - b) \geq n\}$.

Remarque : En particulier une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'entiers décadiques est dite *convergente de limite* a si pour tout $r \geq 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, les r derniers chiffres de a_n sont ceux de a.

Lemme IV.1.6. — *L'ensemble $\mathbb{Z}_{10}$ est compact.*

Démonstration. — Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers décadiques ; on se propose de construire un entier décadique a tel que pour tout $r \geq 1$, il existe une infinité d'indices n tels que les r derniers chiffres de a_n sont ceux de a. Supposons avoir défini les $r - 1$ derniers chiffres de a ; d'après le principe des tiroirs, parmi ces indices, une infinité d'entre eux ont les mêmes r derniers chiffres ce qui permet de construire par récurrence a. Pour tout $r \geq 1$, on choisit $\phi(r) \geq \phi(r - 1)$ tel que les r derniers chiffres de $a_{\phi(r)}$ sont ceux de a ; la suite extraite $a_{\phi(n)}$ converge alors vers a. □

Remarque : Le lecteur notera que $\mathbb{Z}_{10}$ admet des diviseurs de 0 non nuls. En effet, soient $a_n = 2^{2n+1}$ et $b_n = 5^{2n+1}$. Comme a_n ne converge pas vers 0, on peut en extraire une sous-suite $a_{\phi(n)}$ qui converge vers une limite a ainsi qu'une suite $b_{\phi\circ\psi(n)}$ qui converge vers une limite b. Comme $a_n b_n$ converge vers 0, on en déduit que $ab = 0$ avec $a \neq 0$ alors que le dernier chiffre de b est 5 et donc $b \neq 0$. On ne peut ainsi pas considérer le corps des fractions de $\mathbb{Z}_{10}$.

Définition IV.1.7. — Un nombre décadique est un nombre ayant une infinité de chiffres à gauche de la virgule et un nombre fini de chiffres à droite.

Remarque : Puisque $1/2 = 0,5$ et que $1/5 = 0,2$, on en déduit que tout élément $n \in \mathbb{Z}$ admet un inverse dans les nombres décadiques.

Soit $a \in \mathbb{Z}_{10}$ vérifiant la propriété suivante : il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, l'entier m_n défini par ses n derniers chiffres n'est pas divisible par 2^k ni par 5^k. Alors le nombre décadique b_n inverse de m_n a au plus k chiffres après la virgule de sorte que b_n converge vers un nombre décadique qui est l'inverse de a. En revanche si l'hypothèse proposée n'est pas vérifiée alors la suite des chiffres après la virgule de b_n est de taille non majorée et b_n ne converge pas.

Lemme IV.1.8. — *Pour tout $x \in \mathbb{Z}_{10}$ dont le dernier chiffre est nul, la série $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge vers l'entier décadique a tel que $a(1 - x) = 1$.*

Démonstration. — Comme 10 divise x, les n derniers chiffres de x^n sont tous nuls de sorte que les n derniers chiffres de la somme de l'énoncé, sont donnés par une somme finie, i.e. la somme infinie de l'énoncé fournit un entier décadique. □

Considérons alors pour tout $(s,x) \in \mathbb{N}^2$ tels que $10 \mid x$,

$$d(s,x) = s\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{s}{1-x} \in \mathbb{Z}_{10} \quad \text{et} \quad r(s,x) = s\sum_{n\geq 1} x^{-n} = \frac{s}{x-1} \in \mathbb{R},$$

ainsi que l'application $d(s,x) \mapsto r(s,x)$. Considérons alors $d(1,20)$ qui correspond à l'entier décadique obtenu en additionnant les puissances de 2 en décalant d'un chiffre vers la gauche à chaque nouvelle ligne

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & + & 2 \\
 & & & & & & & + & 4 & \\
 & & & & & & + & 8 & & \\
 & & & & & + & 1 & 6 & & \\
 & & & & + & 3 & 2 & & & \\
 & & & + & 6 & 4 & & & & \\
\hline
 & & & 6 & 7 & 3 & 6 & 8 & 4 & 2 & 1
\end{array}$$

On a alors $r(1,20) = \frac{1}{19}$ dont l'écriture décimale est périodique de période T pour le motif N, i.e.

$$\frac{1}{19} = N\sum_{n\geq 1} 10^{-T} = r(N, 10^T),$$

de sorte que $d(1,20) = d(N,10^T)$, i.e. l'écriture de $d(1,20)$ est périodique de période T pour le motif N.

Donnons une autre illustration. Soit l'entier décadique obtenu comme suit : partant de 46, chaque nouvelle ligne est égale à 7 fois la précédente en la décalant d'un cran vers la gauche et on additionne. Autrement dit on considère $d(46,70)$. Comme $r(46,70) = \frac{46}{69} = \frac{2}{3}$, on en déduit, en raisonnant comme précédemment, que l'entier décadique $d(46,70) = \cdots 66666$.

IV.2. Définition algébrique

Il est possible de reprendre les définitions du paragraphe précédent en remplaçant 10 par un nombre entier quelconque, cependant le cas le plus intéressant est pour p un nombre premier p.

Définition IV.2.1. — Un entier p-adique est une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ que l'on représente sous la forme d'une série formelle $\sum_{n\geq 0} a_n p^n$. On note $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble des entiers p-adique.

Remarque : L'addition et la multiplication en base p munissent $\mathbb{Z}_p$ d'une structure d'anneau, avec $-1 = \sum_{n\geq 0}(p-1)p^n$.

Définition IV.2.2. — La valuation p-adique de $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{Z}_p$ non nul, est le plus petit entier $v = v_p(a)$ tel que $a_v \neq 0$.

Proposition IV.2.3. — *L'application* $v_p : \mathbb{Z}_p - \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ *vérifie les propriétés suivantes*

$$v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\},$$
$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b).$$

Démonstration. — La première propriété est évidente, montrons la seconde. D'après le lemme d'Euclide p ne divise par $a_{v_p(a)}b_{v_p(b)}$, soit $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$. □

Corollaire IV.2.4. — *L'anneau $\mathbb{Z}_p$ est intègre.*

Démonstration. — Pour a et b non nuls, $v_p(ab)$ est fini et donc $ab \neq 0$. □

Définition IV.2.5. — La surjection $\epsilon : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p$ qui à $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{Z}_p$ associe la réduction modulo p de a_0, a pour noyau l'idéal $p\mathbb{Z}_p$ qui est donc un idéal maximal.

Proposition IV.2.6. — *Le groupe $\mathbb{Z}_p^\times$ des inversibles de $\mathbb{Z}_p$ est formé des entiers p-adiques de valuation nulle, i.e. $\mathbb{Z}_p^\times = \{\sum_{n\geq 0} a_n p^n : \ a_0 \neq 0\}$.*

Démonstration. — Si $a \in \mathbb{Z}_p$ est inversible alors $\epsilon(a) \in \mathbb{F}_p$ l'est aussi, ce qui prouve l'inclusion de $\mathbb{Z}_p^\times$ dans l'ensemble des entiers p-adiques de valuation nulle. Inversement si $a_0 \neq 0$, notons b_0 tel que $a_0 b_0 = 1 + pk$. Or la série $\sum_{n\geq 0}(-pk)^n$ définit un élément b de $\mathbb{Z}_p$ tel que $(1 + pk)b = 1$ et donc $b_0 b$ est un inverse de a. □

Remarque : Ainsi, tout entier p-adique a s'écrit de manière unique sous la forme $a = up^k$ avec $k = v_p(a)$ et $u \in \mathbb{Z}_p^\times$. Un entier p-adique b divise a si, et seulement si, $v_p(b) \leq v_p(a)$. Un rationnel $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ écrit sous forme irréductible, est un entier p-adique si, et seulement si, p ne divise pas n.

Corollaire IV.2.7. — *Les idéaux non triviaux de $\mathbb{Z}_p$ sont les $p^k\mathbb{Z}_p$.*

Démonstration. — Soit I un idéal non nul de $\mathbb{Z}_p$ et soit $a \in I$ un élément de valuation minimale que l'on écrit sous la forme $a = up^k$ de sorte que $p^k\mathbb{Z}_p \subset I$. Réciproquement pour $b \in I$, on a $b = vp^i$ avec $v \in \mathbb{Z}_p^\times$ et $i \geq k$ de sorte que $b \in p^k\mathbb{Z}_p$ et donc $I \subset p^k\mathbb{Z}_p$. □

Remarque : Ainsi, $p\mathbb{Z}_p$ est l'unique idéal maximal de $\mathbb{Z}_p$. On dit que $\mathbb{Z}_p$ est *un anneau local*.

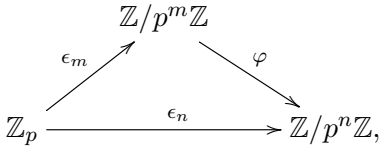
Définition IV.2.8. — Le corps des nombres p-adiques, noté $\mathbb{Q}_p$, est le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{Z}_p$.

Remarque : On peut écrire $\mathbb{Q}_p$ sous l'une des formes suivantes :

$$\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p[\frac{1}{p}] = \bigcup_{m\geq 0} p^{-m}\mathbb{Z}_p = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} p^m\mathbb{Z}_p^\times.$$

La valuation p-adique sur $\mathbb{Z}_p$ s'étend ainsi sur $\mathbb{Q}_p^\times$. Le corps $\mathbb{Q}_p$ est *localement compact* car pour tout $a \in \mathbb{Q}_p$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}_p : \ |x - a|_p \leq 1\} \simeq \mathbb{Z}_p$ est un voisinage compact de a.

Dans la littérature, on trouve habituellement une construction plus savante de $\mathbb{Z}_p$ comme une limite projective. Présentons rapidement ce point de vue. On définit tout d'abord une application de réduction modulo p^n en associant à $a = \sum_{k\geq 0} a_k p^k$ la somme partielle $\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. On obtient ainsi un système compatible d'homomorphismes ϵ_n au sens où pour tout $m > n$ le diagramme suivant est commutatif



où $\varphi : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est le morphisme canonique de réduction modulo p^n. On dit d'un tel système qu'il est projectif.

Notation IV.2.9. — *On notera*

$$\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} := \big\{(x_n)_{n\geq 1} \in \prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} : \ \forall m > n : \ \varphi(x_m) = x_n\big\}.$$

Remarque : $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est la limite projective du système d'homomorphisme précédent au sens où c'est un objet, nécessairement unique à isomorphisme près, vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout groupe G muni pour tout $n \geq 1$, de flèches $f_n : G \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n$ telles que pour tout $m > n$ on ait $f_n = \varphi \circ f_m$, alors il existe une flèche $f : G \longrightarrow \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ telle que pour tout n on ait $f_n = \epsilon_n \circ f$.

Proposition IV.2.10. — *L'application $\mathbb{Z}_p \longrightarrow \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ donnée par la propriété universelle de la limite projective, est un isomorphisme.*

Démonstration. — L'application en question associe à $a = \sum_{k\geq 0} a_k p^k$ les sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k$: elle est donc clairement injective. Quand à la surjectivité elle se déduit des formules $a_n = \frac{s_{n+1}-s_n}{p^n}$. □

Remarque : On peut ainsi voir un élément $a \in \mathbb{Z}_p$ comme une suite d'entiers $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que $a_n \equiv a_{n-1} \mod p^n$. Le fait que $\mathbb{Z}_p$ est un anneau peut ainsi se déduire directement du fait que $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, sans devoir passer par les règles de calculs explicites.

CHAPITRE V

CORPS FINIS

Rappelons qu'une algèbre à division est un anneau $(D, +, \times)$ unitaire intègre dont tous les éléments non nuls admettent un inverse à gauche et à droite : en revanche la loi $\times$ n'est pas nécessairement commutative. Avant d'appliquer les propriétés générales de la théorie des corps, nous allons montrer le fameux théorème de Wedderburn qui affirme que pour une telle algèbre à division D qui est finie alors $\times$ est commutative, autrement dit D est un corps.

V.1. Théorème de Wedderburn

Théorème V.1.1. — *Toute algèbre à division finie est un corps*

Remarque : La question de savoir s'il existait des algèbres à division finie non commutative date du début du vingtième siècle. H.S.M Wedderburn annonça son théorème en 1905 devant ses collègues de l'université de Chicago ; L.E. Dickson qui doutait de la véracité du résultat, en lui cherchant un contre-exemple, trouva une preuve qu'il publia en attribuant la paternité du résultat à Wedderburn qui s'inspirant de celle-ci, fournit deux nouvelles preuves. Or, il s'avéra par la suite qu'il y avait une faille dans la preuve originale de Wedderburn de sorte que c'est en fait Dickson qui a trouvé la première preuve correcte du théorème. Nous allons présenter la preuve donnée par Witt en 1930 car elle est considérée comme la plus élégante.

Démonstration. — Soit K une algèbre à division finie, pour tout $x \in K$, son centralisateur dans K sera noté $C_x := \{y \in K : \ xy = yx\}$. C'est clairement une sous-algèbre à division de K. En notant $C = \bigcap_{x\in K} C_x = \{y \in K : \ \forall x \in K, \ xy = yx\}$ le centre de K, on obtient un corps commutatif fini et on considère K et C_x comme des C-espaces vectoriels de dimension finie respectives n et n_x ; si q désigne le cardinal de C alors K et C_x sont de cardinal q^n et q^{n_x}. Comme par ailleurs K est un C_x-espace vectoriel de dimension d_x, on a, d'après le théorème de la base télescopique $n = d_x n_x$.
Remarque : Pour montrer que $n_x \mid n$, on peut aussi utiliser que C_x^* est un sous-groupe de cardinal $q^{n_x} - 1$ de K^* lequel est de cardinal $q^n - 1$. D'après le théorème de Lagrange, on a $q^{n_x} - 1 \mid q^n - 1$ et en notant $n = d_x n_x + r_x$ la division euclidienne de n par n_x, la congruence $q^n - 1 \equiv (q^{n_x})^{d_x} q^{r_x} - 1 \equiv q^{r_x} - 1$ mod $q^{d_x} - 1$, de sorte que $r_x = 0$.

En considérant l'action de $G = K^*$ sur lui-même par conjugaison, l'équation aux classes s'écrit $q^n - 1 = q - 1 + \sum_{x\in\mathcal{O}} \frac{q^n-1}{q^{n_x}-1}$, où $\mathcal{O}$ désigne l'ensemble des classes de conjugaison de cardinal > 1, et donc n_x est un diviseur strict de n. On va alors montrer que cette équation, ne peut être satisfaite que si $n = 1$ et donc que si $K = C$ est commutatif.

Rappelons que la fonction de Möbius μ est définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n = p_1 \cdots p_r,\ p_i \neq p_j,\ \forall i \neq j \\ 0 & \text{s'il existe } p^2 \mid n, \end{cases}$$

avec pour tout $n > 1$, $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$; en effet si n est divisible par r facteurs premiers distincts, alors il y a exactement $\binom{r}{i}$ diviseurs d de n sans facteurs carrés, produit de i facteurs premiers distincts et le résultat découle alors de l'égalité $(1-1)^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i}(-1)^i$.

On considère alors la fraction rationnelle $P_n(T) = \prod_{d|n}(T^d - 1)^{\mu(n/d)}$, avec

$$\prod_{d|n} P_d(T) = \prod_{d|n} \prod_{e|d} (T^e - 1)^{\mu(d/e)} = \prod_{e|n} (T^e - 1)^{\sum_{e|d|n} \mu(d/e)} = T^n - 1.$$

Ainsi, par récurrence, on obtient que $P_n(T)$ est un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[T]$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $P_n(T) = \frac{T^n-1}{\prod_{d|n,\ d\neq n} P_d(T)}$ et donc si d est un diviseur strict de n alors $P_n(T)$ divise $\frac{T^n-1}{T^d-1}$;
2. P_n est symétrique, i.e. $P(T) = T^{\deg P} P(T^{-1})$ car $T^n - 1$ l'est, ainsi que le produit $\prod_{d|n, d\neq n} P_d(T)$ par récurrence ;
3. pour $m \wedge p = 1$, on a $P_{p^k m}(T) = P_{pm}(T^{p^{k-1}})$ avec $P_{pm}(T) = \frac{P_m(T^p)}{P_m(T)}$ et donc $\deg P_n(T) = \varphi(n) = \prod_p p^{\alpha_p - 1}(p-1)$, où $n = \prod_p p^{\alpha_p}$.

Lemme V.1.2. — *Pour tout $n \geq 2$, $P_n(q) > q - 1$.*

Démonstration. — Posons $P_\pm = \left| \prod_{d|n,\ \mu(\frac{n}{d})=\pm 1} (q^{-d} - 1) \right|$ de sorte que

$$|P_n(q^{-1})| = \frac{P_+}{P_-} \geq P_+ \geq \prod_{i=1}^{n} (1 - q^{-i}).$$

D'après la formule de binôme,

$$\begin{aligned} (1 + b^{-1})^b &\leq 1 + 1 + 1/2! + \cdots + 1/b! \\ &\leq 1 + 1 + 1/2 + \cdots + 1/2^{b-1} \\ &\leq 1 + 2(1 - 2^{-b}) \leq 3. \end{aligned}$$

Ainsi, $(1 + b^{-1})^{b+1} \leq 6$ et pour $b = q^i - 1$, on obtient $(1 - q^{-i})^{q^i} \geq 1/6$ et donc

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - q^{-i})^{q^n} \geq 6^{-\sum_{i=1}^{n} q^{n-i}} \geq 6^{-q^n}.$$

De l'égalité $P_n(q) = q^{\varphi(n)} P_n(q^{-1})$, on obtient alors $P_n(q) \geq q^{\varphi(n)}/6$. On utilise alors que $q^{\varphi(n)}/6 \geq q$ sauf pour $n = 1$ ou 2 ou si $q = 2, 3, 5$ et $n = 3, 4, 6$. Dans les cas $n \geq 2$, on vérifie alors que $P_n(q) > q - 1$. □

Ainsi, comme $P_n(q)$ divise $q - 1 = q^n - 1 - \sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{q^n - 1}{q^{n_x} - 1}$, on doit nécessairement avoir $n = 1$. □

Remarque : Les $P_n(T)$ sont les polynômes cyclotomiques que l'on peut définir plus naturellement en utilisant le corps des nombres complexes, cf. le §**??**. La majoration $|P_n(q)| > q - 1$ est alors élémentaire via la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, cependant le détour suivi dans la preuve précédente est conceptuellement plus élégant car nous n'utilisons pas les nombres complexes ou réels de sorte que la preuve reste complètement algébrique.

En 1949, B. L. van der Waerden a proposé une preuve groupiste qui repose sur les deux lemmes suivant dont une preuve du premier sera donnée dans l'exercice **??**.

Lemme V.1.3. — *Tous les sous-corps maximaux de K sont conjugués, c'est-à-dire que si F et F' sont deux sous-corps maximaux de K alors il existe un élément $x \in K^*$ tel que $F' = xFx^{-1}$.*

Lemme V.1.4. — *Soit G un groupe fini et H un sous-groupe propre de G alors $\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}$ est strictement contenu dans G.*

Démonstration. — Notons tout d'abord que si $g' = gh$ alors $gHg^{-1} = g'H(g')^{-1}$ de sorte qu'il y a au plus $|G/H| = |G|/|H|$ conjugués distincts. Ainsi, le cas d'égalité ne peut se produire que si tous les gHg^{-1} sont égaux ou s'ils sont disjoints ce qui n'est pas car l'élément neutre de G est dans tous les gHg^{-1}. □

Pour tout $x \in K$, $C[x] \subset K$ est un sous-corps commutatif ; on choisit alors F_x un sous-corps commutatif maximal de K contenant x ainsi qu'un sous-corps maximal F de K. On a $K = \bigcup_{x\in K} F_x$ et puisque chaque F_x est conjugué à F d'après le premier lemme, on obtient que K^* s'écrit comme la réunion des conjugués de F^* ce qui d'après le lemme précédent implique que $F^* = K^*$ et donc $K = F$ est commutatif.

V.2. Propriétés générales

Rappelons quelques propriétés qui se déduisent de la théorie élémentaire des corps :

— la caractéristique d'un corps fini K est non nulle et donc égale à un nombre premier p ;

— la dimension de K en tant qu'espace vectoriel sur son corps premier $\mathbb{F}_p$ est finie. En particulier le cardinal de K est de la forme p^n où $n = [K : \mathbb{F}_p]$;

— $K^\times$ est un groupe cyclique de cardinal $\sharp K - 1 = p^n - 1$; si α désigne un générateur alors $K = \left\{0, 1, \alpha, \ldots, \alpha^{p^n-2}\right\}$. On en déduit en particulier que tous les éléments de K vérifient l'équation $X^{p^n} - X = 0$. En utilisant qu'un polynôme de degré k a au plus k-racines sur un corps commutatif, on en déduit que K est l'ensemble des racines de $X^{p^n} - X$, c'est en particulier un corps de décomposition de $X^{p^n} - X$.

— Soit α un générateur du groupe multiplicatif $K^\times$ et soit μ_α le polynôme minimal de α sur $\mathbb{F}_p$. Comme $K = \mathbb{F}_p[\alpha]$ on en déduit en particulier que K s'obtient comme un corps de rupture $\mathbb{F}_p[X]/(\mu_\alpha)$.

— Si $\mathbb{F}_p \subset k \subset K$ alors $\sharp K = p^n$ et $\sharp k = p^d$ pour d un diviseur de n.

Il résulte de l'existence et de l'unicité des corps de décomposition qu'il existe un unique corps de cardinal p^n à isomorphisme près.

Remarque : Pour faire disparaître l'indétermination « à isomorphisme près », une solution consiste à fixer une fois pour toute une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}_p}$ et de considérer toutes les extensions comme des sous-corps de $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Étudions les premiers exemples en caractéristique 2 :

(i) $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$ est un corps à 4 éléments ;

(ii) $\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$ est un corps à 8 éléments ;

(iii) $\mathbb{F}_2[X]/(X^4 + X + 1)$ est un corps à 16 éléments ; le sous-corps engendré par $X^2 + X$ est de cardinal 4 ;

(iv) $\mathbb{F}_3[X]/(X^2 + X - 1)$ est un corps à 9 éléments.

Démonstration. — (i) On vérifie rapidement que $X^2 + X + 1$ n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_2$, étant de degré 2, il y est alors irréductible de sorte que $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$ est un corps, une extension de degré 2 de $\mathbb{F}_2$ et donc isomorphe à $\mathbb{F}_4$ qui par convention est **le** corps de cardinal 4 contenu dans une

clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_2$ de $\mathbb{F}_2$ fixée une fois pour toute. Comme $\mathbb{F}_4^\times \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, tout élément autre que $0, 1$ est un générateur de $\mathbb{F}_4^\times$, soit X et $X+1$.
Remarque : On notera par ailleurs que X^2+X+1 est le seul polynôme irréductible de degré 2 ce qui permet dès à présent en utilisant, pour ξ un générateur de $K^\times$, la surjection $\mathbb{F}_2[X] \twoheadrightarrow K$ définie par $X \mapsto \zeta$ qui induit un isomorphisme $\mathbb{F}_2[X]/(P) \simeq K$ avec P irréductible de degré 2, de conclure à l'unicité, à isomorphisme près, d'un corps de cardinal 4.

(ii) De même, on vérifie que X^3+X+1 n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_2$; étant de degré 3 il est alors irréductible sur $\mathbb{F}_2$ de sorte que $\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1)$ est un corps de cardinal 8 et donc isomorphe à $\mathbb{F}_8$. Comme $\mathbb{F}_8^\times \simeq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ tout élément autre que $0, 1$ est un générateur du groupe des inversibles, par exemple X.

(iii) Encore une fois X^4+X+1 n'a pas de racines sur $\mathbb{F}_2$ mais cela ne suffit pas pour conclure à son irréductibilité, car il pourrait être le produit de deux polynômes irréductibles de degré 2. Or, on a vu que X^2+X+1 est l'unique polynôme irréductible de degré 2 sur $\mathbb{F}_2$ et comme X^4+X+1 n'est pas égal à $(X^2+X+1)^2 = X^4+X^2+1$, il est nécessairement irréductible.
Remarque : On aurait aussi pu invoquer le fait que X^4+X+1 est premier avec son polynôme dérivé, qui est le polynôme constant égal à 1, et ne peut donc pas être le carré d'un polynôme.

(iv) À nouveau X^2+X-1 n'a pas de racines dans $\mathbb{F}_3$, il y est donc irréductible et $\mathbb{F}_9 \simeq \mathbb{F}_3[X]/(X^2+X-1)$. En outre $\mathbb{F}_9^\times \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ de sorte qu'il y a $\varphi(8) = 4$ générateurs et donc 4 non générateurs. Pour vérifier que X est d'ordre 8, on calcule $X^4 = (X^2)^2 = (1-X)^2 = X^2-2X+1 = -3X+2 = -1$ et X est bien un générateur de $\mathbb{F}_9^\times$. □

V.3. Existence et unicité des corps finis : preuves constructives

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que pour tout p premier et pour tout $n \geq 1$, il existe un corps de cardinal p^n sans utiliser la théorie générale des corps. Pour ce faire, il nous suffit de montrer qu'il existe un polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_p$ de degré n.

Lemme V.3.1. — *Soit K un corps de caractéristique p et $P(X) \in K[X]$ alors $P(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ si et seulement si $P(X^p) = P(X)^p$.*

Remarque : On renvoie le lecteur au §**??** pour une généralisation de ce résultat via la théorie de Galois.

Démonstration. — Soit $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, avec $a_i \in K$; si $P(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ alors on a $\left(\sum_{i=0}^n a_i X^i\right)^p = \sum_{i=0}^n a_i^p X^{pi} = \sum_{i=0} a_i (X^p)^i = P(X^p)$. La réciproque se montre de la même façon en remarquant que l'ensemble des $x \in K$ tels que $x^p = x$ est égal à $\mathbb{F}_p \subset K$: en effet tout élément de $\mathbb{F}_p$ est une racine du polynôme $X^p - X$ lequel a au plus p solutions dans K d'où le résultat. □

Proposition V.3.2. — *Soit P un polynôme irréductible unitaire de $\mathbb{F}_p[X]$ de degré r. Si L est une extension de $\mathbb{F}_p$ possédant une racine α de P alors $P(X) = \prod_{i=0}^{r-1}(X - \alpha^{p^i})$.*

Remarque : En général, via la théorie de Galois, le polynôme minimal de α sur k s'explicite en fonction de l'action sur α, du groupe de Galois d'une extension K/k contenant α. Dans le cas des corps finis, nous verrons qu'un tel groupe de Galois est connu à priori puisqu'il est engendré par le morphisme de Frobenius. C'est ce fait qui explique la précision et la simplicité de la proposition précédente.

Démonstration. — Notons p^n le cardinal de L de sorte que $\alpha^{p^n} = \alpha$. Par ailleurs l'ensemble des m tels que $\alpha^{q^m} = \alpha$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$; notons s son générateur positif. Comme $P(X) \in \mathbb{F}_p[X]$, d'après le lemme précédent on a $P(X^p) = P(X)^p$ de sorte que les α^{p^i} pour $i = 0, \ldots, s-1$ sont des racines

de P dans L. Notons $Q(X) = \prod_{i=0}^{s-1}(X - \alpha^{p^i})$, qui est à coefficients dans $\mathbb{F}_p[X]$ car $Q(X^p) = Q(X)^p$ et divise P ; on en déduit donc que $P = Q$ car P est irréductible et donc $s = r$ d'où le résultat. □

Proposition V.3.3. — *Soit p un nombre premier et n un entier ≥ 1 ; on a alors l'égalité*

$$X^{p^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{P \in \mathcal{A}_p(n)} P,$$

où $\mathcal{A}_p(d)$ désigne l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{F}_p[X]$ de degré d.

Démonstration. — Si on suppose que P divise $X^{p^n} - X$ alors $r = \deg P$ divise n ; si réciproquement on suppose que r divise n alors les racines α^{q^i} pour $i = 1, \ldots, r$ sont aussi racines de $X^{p^n} - X$ et donc P divise $X^{p^n} - X$. Le résultat découle alors de l'observation évidente que $X^{p^n} - X$ n'a pas de racines multiples puisqu'il est premier avec son polynôme dérivé qui est le polynôme constant égal à -1. □

Corollaire V.3.4. — *Pour tout $n \geq 1$, il existe au moins un polynôme irréductible unitaire de $\mathbb{F}_p[X]$ de degré n.*

Démonstration. — Notons $I_n(p)$ le cardinal de $\mathcal{A}_p(n)$; d'après la proposition précédente on a $p^n = \sum_{d|n} I_d(p)d$. On va alors montrer par récurrence sur n que $I_n(p) > 0$. Le résultat est clair pour $n = 1$, supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$ et traitons le cas du rang n. On réécrit l'égalité précédente sous la forme $p^d = dI_d(p) + \sum_{d'|d,\ d'<d} I_{d'}(p)d'$, pour tout $d < n$, avec d'après l'hypothèse de récurrence $p^d > dI_d(p)$. Ainsi, la formule ci-dessus pour $d = n$ donne les inégalités

$$p^n < nI_n(p) + \sum_{d|n,\ d\neq n} p^d \leq nI_n(p) + \sum_{k=0}^{n-1} p^k = nI_n(p) + \frac{p^n - 1}{p-1} < nI_n(p) + p^n$$

et donc $I_n(p) > 0$ d'où le résultat. □

Remarque : Plus précisément, on a la minoration

$$nI_n(p) \geq p^n - \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p^r \geq p^n \Big(1 - \frac{p^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - n} - p^{-n}}{p-1}\Big),$$

puis en utilisant $p^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - n} - p^{-n} \leq p^{-1}$ et, pour $p \geq 3$, $\frac{1}{p-1} \leq \frac{1}{2}$, on obtient pour $p \geq 3$

$$I_n(p) \geq \frac{p^n}{n} \frac{2p-1}{2p} \geq \frac{p^n}{2n}. \tag{4}$$

Pour $p = 2$, la minoration $I_n(p) \geq \frac{2^n}{2n}$ est encore vérifiée.

Corollaire V.3.5. — *Pour tout $n \geq 1$ et pour tout nombre premier p, il existe un corps de cardinal p^n.*

Démonstration. — Il suffit de considérer $K = \mathbb{F}_p[X]/\big(P(X)\big)$ pour P un polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_p$ et de degré n dont l'existence est assurée par le corollaire précédent. □

Proposition V.3.6. — *Deux corps finis de même cardinal sont isomorphes.*

Démonstration. — Soit K un corps fini ; son cardinal est de la forme p^n avec p premier. Soit alors $\alpha \in K^\times$ d'ordre $p^n - 1$. On considère alors le morphisme $\mathbb{F}_p[X] \to K$ qui à X associe α ; il est surjectif et son noyau est un idéal de la forme $\big(P(X)\big)$ pour un polynôme $P(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ nécessairement irréductible. Quitte à le diviser par son coefficient dominant, on peut le prendre unitaire de sorte d'après la proposition V.3.3 il divise $X^{p^n} - X = \prod_{a \in K}(X - a)$.

Si L est un corps de cardinal p^n comme tout $a \in L$ vérifie $a^{p^n} = a$, les racines de $X^{p^n} - X$ dans L sont exactement tous ses éléments de sorte que le polynôme $P(X)$ est totalement décomposé dans L. Étant donné une racine a quelconque de P dans L, le morphisme de $\mathbb{F}_p[X] \to L$ qui à X associe a se factorise pas $\mathbb{F}_p[X]/\big(P(X)\big)$ et induit un isomorphisme de K sur L. □

Remarque : Pour tout q de la forme p^r, soit $\mathbb{F}_q$ « le » corps de cardinal q ; les résultats du paragraphe précédent s'adaptent en remplaçant $\mathbb{F}_p$ par $\mathbb{F}_q$ et donc p par q.

Proposition V.3.7. — *Soit K un corps de cardinal p^n ; si $L \subset K$ est un sous-corps de K son cardinal est alors de la forme p^d pour $d \mid n$. Réciproquement pour tout diviseur d de n, il existe un sous-corps de K de cardinal p^d.*

Démonstration. — Dans le sens direct, en considérant K comme un L-espace vectoriel, on obtient que son cardinal est égal à $p^n = (p^d)^e$ et donc d divise n. Réciproquement si $n = kd$, on a $p^n - 1 = (p^d - 1)N$ avec $N = (p^d)^{k-1} + \cdots + 1$ et

$$X^{p^n} - X = X(X^{p^{dk}-1} - 1) = X(X^{p^d-1} - 1)(X^{(p^d-1)(N-1)} + \cdots + 1),$$

et donc comme K est l'ensemble des racines de $X^{p^n} - X$ dans K, l'ensemble des racines dans K du polynôme $X^{p^d} - X$ forme un corps de cardinal p^d. □

Construction de $\overline{\mathbb{F}}_p$: considérons par récurrence un corps $\mathbb{F}_{p^{n!}}$ de cardinal $p^{n!}$ comme une extension de degré n de $\mathbb{F}_{p^{(n-1)!}}$ qui existe d'après ce qui précède (unique à isomorphisme près). Notons alors $\overline{\mathbb{F}}_p$ la réunion croissante $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{p^{n!}}$; c'est un corps noté k. En effet pour $x, y \in k$, il existe n tels que $x, y \in \mathbb{F}_{p^{n!}}$ et $x + y, xy$ sont définis dans $\mathbb{F}_{p^{n!}}$. Il est en outre immédiat que $\overline{\mathbb{F}}_p$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p$ car tout $x \in k$ est un élément d'un $\mathbb{F}_{p^{n!}}$ pour n assez grand. Il reste alors à voir que $\overline{\mathbb{F}}_p$ est algébriquement clos ; soit donc $P(X) \in k(X)$ irréductible et soit $\mathbb{F}_{p^m}$ une extension contenant les coefficients de P et soit L un corps de rupture de P dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ sur $\mathbb{F}_{p^m}$; L est alors une extension finie de $\mathbb{F}_{p^m}$ et est donc égale à un certain $\mathbb{F}_{p^r}$ et donc inclus dans $\mathbb{F}_{p^{r!}} \subset k$. Ainsi, tout polynôme irréductible sur k est de degré 1 soit k algébriquement clos.

Remarque : Étant donné une construction de $\overline{\mathbb{F}}_p$ comme ci-dessus, pour tout $n \geq 1$ on notera $\mathbb{F}_{p^n}$ **le** corps de cardinal p^n contenu dans $\overline{\mathbb{F}}_p$: il est égal à l'ensemble des racines dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ du polynôme $X^{p^n} - X$.

Corollaire V.3.8. — *Les sous-corps de $\mathbb{F}_{p^n}$ sont exactement les $\mathbb{F}_{p^r}$ où r divise n ; en particulier le plus petit sous-corps de $\overline{\mathbb{F}}_p$ contenant $\mathbb{F}_{p^n}$ et $\mathbb{F}_{p^m}$ est $\mathbb{F}_{p^{n\vee m}}$ alors que $\mathbb{F}_{p^n} \cap \mathbb{F}_{p^m} = \mathbb{F}_{p^{n\wedge m}}$.*

Démonstration. — Le premier point découle directement de la proposition V.3.7. En particulier si $\mathbb{F}_{p^r}$ contient $\mathbb{F}_{p^n}$ et $\mathbb{F}_{p^m}$ alors $n \mid r$ et $m \mid r$ de sorte que $n \vee m \mid r$ et $\mathbb{F}_{p^{n\vee m}} \subset \mathbb{F}_{p^r}$; on conclut alors en remarquant que $\mathbb{F}_{p^{n\vee m}}$ contient $\mathbb{F}_{p^n}$ et $\mathbb{F}_{p^m}$.

De la même façon $\mathbb{F}_{p^n} \cap \mathbb{F}_{p^m}$ est un corps $\mathbb{F}_{p^d}$ tel que $\mathbb{F}_{p^n}$ et $\mathbb{F}_{p^m}$ en sont des extensions. On en déduit donc que d divise n et m et donc d divise $n \wedge m$ et donc $\mathbb{F}_{p^d} \subset \mathbb{F}_{p^{n\wedge m}}$. Réciproquement comme $n \wedge m$ divise n et m, on en déduit que $\mathbb{F}_{p^{n\wedge m}} \subset \mathbb{F}_{p^n} \cap \mathbb{F}_{p^m}$ d'où le résultat. □

V.4. Factorisation des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$

Nous allons dans ce paragraphe présenter une stratégie, i.e. un algorithme, pour factoriser les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Notons tout d'abord que factoriser $A \in \mathbb{Z}[X]$ dans $\mathbb{Q}$ revient à le factoriser dans $\mathbb{Z}[X]$: explicitement si $A = \prod_i A_i$ où les A_i sont des polynômes

irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$, alors après multiplication par un certain entier d, on a $dA = \prod_i (d_i A_i)$ où les $d_i A_i \in \mathbb{Z}[X]$ sont primitifs de sorte que d'après le lemme de Gauss, on a $d = \pm 1$.
Exemples de factorisation par réduction modulo p :

— le polynôme $X^2 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_2$, il l'est donc sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$;
— le polynôme $X^4 - X^2 + 2X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$: en effet nous allons voir que les décompositions en facteurs irréductibles modulo 2 et 3 sont incompatibles. Modulo 2 il se factorise en $(X^2 + X + 1)^2$ avec $X^2 + X + 1$ irréductible sur $\mathbb{F}_2$; modulo 3 il se factorise en $(X - 1)(X^3 + X^2 - 1)$ avec $X^3 + X^2 - 1$ irréductible sur $\mathbb{F}_3$.

Algorithme de Berlekamp : soit $A = \prod_{i=1}^r A_i \in \mathbb{F}_q[X]$ sans facteur carré, où les A_i sont irréductibles. On note $R = \mathbb{F}_q[X]/(A)$ qui est une $\mathbb{F}_q$-algèbre de dimension $\deg A = n$.

Définition V.4.1. — Soit f le morphisme d'élévation à la puissance q dans R, i.e. $f(Q) = Q^q$, et on définit $R^f := \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \{Q \in R : \ R^q = R\}$.

Proposition V.4.2. — *La dimension* $\dim_{\mathbb{F}_q}(R^f) = r$ *est égale au nombre de facteurs irréductibles de A.*

Démonstration. — D'après le théorème chinois, $R \simeq \prod_{i=1}^r \mathbb{K}_i$ où $\mathbb{K}_i := \mathbb{F}_q[X]/(A_i)$ est une extension de degré $n_i := \deg A_i$ de $\mathbb{F}_q$. On note alors $f_i : \mathbb{K}_i \longrightarrow \mathbb{K}_i$ le morphisme d'élévation à la puissance q i.e. le morphisme de Frobenius qui engendre $\mathbb{K}_i/\mathbb{F}_q$. En particulier on a $\mathbb{K}_i^{f_i} = \mathbb{F}_q$ et donc $R^f \simeq \prod_{i=1}^r \mathbb{K}_i^{f_i} \simeq \mathbb{F}_q^r$. □

Notation V.4.3. — *Soit* $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ *la matrice de* $f - \mathrm{Id}$ *dans la base canonique* $(X^i)_{0 \leq i \leq n-1}$ *de R.*

Proposition V.4.4. — *Si* $r > 1$, *il existe* $G \in R^f$ *non constant et une décomposition non triviale* $A = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} \mathrm{pgcd}(A, G - a)$.

Démonstration. — Comme $\dim_{\mathbb{F}_q} R^f = r > 1$, il existe nécessairement un élément G non constant dans R^f. En substituant G dans $X^q - X = \prod_{a \in \mathbb{F}_q}(X - a)$, on obtient $G(X)^q - G(X) = \prod_{a \in \mathbb{F}_q}(G(X) - a)$. Comme les $G(X) - a$ sont premiers entre eux deux à deux, les polynômes P et $G^q - G$ sont sans facteurs multiples et donc $\mathrm{pgcd}(A, G^q - G) = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} \mathrm{pgcd}(A, G - a)$. Pour $G \in R^f$, on a $G^q - G = 0$ et donc $\mathrm{pgcd}(P, G^q - G) = P$. La décomposition est en outre non triviale car sinon on aurait $P \mid G - a$ et donc $G = a$ dans R ce qui n'est pas. □

L'algorithme de Berlekamp procède ainsi :

— On calcule la matrice M de Berlekamp.
— On calcule la dimension r du noyau de M ; si $r = 1$ alors P est irréductible.
— On cherche un vecteur G du noyau de M qui n'est pas un polynôme constant.
— Avec l'algorithme d'Euclide, on calcule les pgcd de A et $G - a$ pour tout $a \in \mathbb{F}_q$.
— Avec chacun des facteurs trouvés dans l'étape précédente, on recommence le processus.

Les résultats qui suivent sont pour l'essentiel dus à Mignotte, on pourra en trouver une présentation dans [**?**] §3.5.

Théorème V.4.5. — *Pour tout* $P(X) = \sum_{i=0}^n p_i X^i$, *polynôme à coefficients complexes, on note* $|P| = (\sum_{i=0}^n |p_i|^2)^{1/2}$. *Soient alors* $A(X) = \sum_{i=0}^m a_i X^i$ *et* $B(X) = \sum_{i=0}^n b_i X^i$ *des polynômes à coefficients entiers tels que B divise A. Alors pour tout* $0 \leq j \leq n$, *on a* $|b_j| \leq \binom{n-1}{j}|A| + \binom{n-1}{j-1}|a_m|$.

Démonstration. — Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on pose les polynômes $G(X) = (X-\alpha)A(X)$ et $H(X) = (\bar{\alpha}X - 1)A(X)$. On a alors

$$\begin{aligned}|G|^2 &= |a_m|^2 + |\alpha a_0|^2 + \sum_{i=1}^{m} |a_{i-1} - \alpha a_i|^2 \\ &= |a_m|^2 + |\alpha a_0|^2 + \sum_{i=1}^{m} \big(|a_{i-1}|^2 + |\alpha a_i|^2 - 2Re(\alpha a_i \bar{a}_{i-1})\big) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \big(|\alpha a_{i-1}|^2 + |a_i|^2 - 2Re(\alpha a_i \bar{a}_{i-1})\big) + |a_0|^2 + |\bar{\alpha} a_m|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} |\bar{\alpha} a_{i-1} - a_i|^2 + |a_0|^2 + |\bar{\alpha} a_m|^2 = |H|^2.\end{aligned}$$

Soit alors $A(X) = a_m \prod_{j=1}^{m}(X - \alpha_j)$ et posons

$$C(X) = a_m \prod_{|\alpha_j| \geq 1} (X - \alpha_j) \prod_{|\alpha_j| < 1} (\bar{\alpha}_j X - 1)$$

de sorte que $|C| = |A|$. Ainsi, en considérant seulement le coefficient de X^m et le terme constant, on en déduit que $|A|^2 = |C^2| \geq |a_m|^2\Big(M(A)^2 + m(A)^2\Big)$, où on a posé $M(A) = \prod_{|\alpha_j|>1} |\alpha_j|$ et $m(A) = \prod_{|\alpha_j|<1} |\alpha_j|$. En particulier, on a que $M(A) \leq |A|/|a_m|$ et

$$|a_j| = |a_m| \Big| \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{m-j} \leq m} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_{m-j}} \Big| \leq |a_m| \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{m-j} \leq m} \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_{m-j}},$$

où $\beta_i = \max\{1, |\alpha_i|\}$.

Lemme V.4.6. — *Si $1 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_m$ sont des réels dont le produit est égal à M, alors les fonctions symétriques $\sigma_{m,k} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ vérifient $\sigma_{m,k} \leq \binom{m-1}{k-1} M + \binom{m-1}{k}$.*

Démonstration. — Si on change la paire (x_{m-1}, x_m) par $(1, x_{m-1}x_m)$, quitte à réordonner, les contraintes sur le m-uplet sont encore vérifiées et $\sigma_{m,k}$ augmente de $\sigma_{m-2,k-1}(x_{m-1} - 1)(x_m - 1)$. Ainsi, si $x_{m-1} > 1$, le point $(x_1, \ldots, x_m)$ ne réalise pas un maximum. Le maximum est donc atteint pour $x_{m-1} = 1$ ce qui implique $x_i = 1$ pour tout $i < m$ de sorte que $x_m = M$. Le reste du calcul est alors élémentaire : le terme $\binom{m-1}{k-1}$ correspond aux k-uplets contenant x_m et $\binom{m-1}{k}$ à ceux qui ne le contienne pas. □

Comme le produit des β_i est par définition $M(A)$ on en déduit que pour tout j,

$$\begin{aligned}|a_j| &\leq |a_m| \left(\tbinom{m-1}{m-j-1} M(A) + \tbinom{m-1}{m-j} \right) \\ &\leq |a_m| \left(\tbinom{m-1}{j} M(A) + \tbinom{m-1}{j-1} \right),\end{aligned}$$

Ainsi, on a $|b_j| \leq |b_n|\big(\binom{n-1}{j} M(B) + \binom{n-1}{j-1}\big)$ et donc $|b_j| \leq |a_m|\big(\binom{n-1}{j} M(A) + \binom{n-1}{j-1}\big)$ car comme B divise A, on a $M(B) \leq M(A)$ et $|b_n| \leq |a_m|$. Le résultat découle alors de l'inégalité $M(A) \leq |A|/|a_m|$. □

En général la borne donnée par le théorème précédent est très grande ; plutôt que de raisonner avec un p grand on raisonne modulo p^e pour e assez grand en relevant de proche en proche les solutions : c'est le lemme de Hensel suivant.

Théorème V.4.7. — ***(Lemme de Hensel).*** *Soient p premier et C, A_e, B_e, U et V des polynômes à coefficients entiers tels que*

$$C(X) \equiv A_e(X)B_e(X) \mod p^e, \quad U(X)A_e(X) + V(X)B_e(X) \equiv 1 \mod p.$$

On suppose $e \geq 1$, A_e unitaire, $\deg U < \deg B_e$, $\deg V < \deg B_e$. Alors il existe des polynômes A_{e+1} et B_{e+1} vérifiant les mêmes conditions en remplaçant e par $e+1$ et tels que

$$A_{e+1}(X) \equiv A_e(X) \mod p^e, \qquad B_{e+1}(X) \equiv B_e(X) \mod p^e.$$

En outre ces polynômes sont uniques modulo p^{e+1}.

Démonstration. — Posons $D = (C - A_eB_e)/p^e \in \mathbb{Z}[X]$. On cherche $A_{e+1} = A_e + p^eS$ et $B_{e+1} = B_e + p^eT$ avec $S, T \in \mathbb{Z}[X]$. La condition $C(X) \equiv A_{e+1}(X)B_{e+1}(X) \mod p^{e+1}$ est équivalent, comme $2e \geq e+1$, à $A_eT + B_eS \equiv D \mod p$. La solution générale est alors $S \equiv VD + WA_e \mod p$ et $T \equiv UD - WB_e \mod p$ pour un polynôme W. La condition sur le degré impose que S et T sont uniques modulo p et donc A_{e+1} et B_{e+1} sont uniques modulo p^{e+1}. □

Algorithme de factorisation d'un polynôme $F \in \mathbb{Z}[T]$ unitaire de degré n et de discriminant non nul (et donc sans facteur carré) :

— On choisit, d'après Mignotte, un nombre premier p ne divisant pas le discriminant de F et un entier $e \geq 1$ tels que $p^2 > 2^{n+1}\|F\|_2$.

— À l'aide de l'algorithme de Berlekamp, on détermine la factorisation unitaire de F dans $\mathbb{F}_p[T]$.

— À l'aide du lemme de Hensel, on relève la factorisation précédente en une factorisation unitaire $F = F_1 \cdots F_r \in \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}[T]$.

— Pour toute partie non vide R contenue dans $\{1, \ldots, r\}$, on calcule le polynôme $F_R := \prod_{i \in R} F_i \in \mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}[T]$ et on teste si le représentant unitaire de F_R dans $\mathbb{Z}[T]$ tel que ses coefficients sont $\leq \lfloor \frac{p^e}{2} \rfloor$ divise effectivement F.

Si on trouve ainsi un facteur non trivial alors F est réductible et on examine les parties $S \subset \{1, \ldots, r\}$ n'intersectant pas la partie R trouvée. Si aucune des parties R ne fournit un facteur non trivial de F alors $F \in \mathbb{Z}[T]$ est irréductible.

Illustrons cet algorithme sur $A(X) = X^6 - 6X^4 - 2X^3 - 7X^2 + 6X + 1$. Supposons que A n'est pas irréductible de sorte qu'il possède un facteur irréductible de degré ≤ 3 avec $|b_j| \leq 23$ d'après le théorème précédent. On choisit alors $p \geq 2 \times 23$ et tel que A modulo p est sans facteur carré, par exemple $p = 47$. En appliquant l'algorithme de Berlekamp on trouve la factorisation :

$$A(X) = (X - 22)(X - 13)(X - 12)(X + 12)(X^2 - 12X - 4) \mod 47.$$

Montrons alors que A n'a pas de facteurs irréductibles de degré 1 ou 2 : le terme constant de A étant égal à 1, on en déduit que les termes constants de ses facteurs irréductibles sont égaux à ± 1. Par ailleurs les coefficients de ces facteurs appartiennent à $\{-23, \ldots, 23\}$ et sont donc déterminés par leur réduction modulo 47.

— Comme aucun des facteurs de degré 1 n'a un coefficient constant égal à $\pm 1 \mod 47$, on en déduit que A n'a aucun facteur de degré 1.

— Concernant les facteurs de degré 2, modulo 47 on a

$$12 \times 22 = -18, \quad 12 \times 13 = 15, \quad 12 \times 12 = 3 \quad \text{et} \quad 13 \times 22 = 4$$

on ne trouve donc pas ± 1 et donc A n'admet aucun facteur de degré 2.

— Pour les facteurs de degré 3, on obtient qu'un facteur irréductible de degré 3 de A est soit $X^3 + 23X^2 - X + 1$ soit $X^3 - 7X - 1$. La première possibilité est exclue car $b_2 \leq 12$ d'après les majorations du théorème précédent. On teste alors la divisibilité du deuxième cas et on trouve

$$A(X) = (X^3 - 7X - 1)(X^3 + X + 1).$$

Remarque : Sur $\mathbb{F}_p$, on ne connaît pas d'algorithme de factorisation en temps polynomial sauf à supposer GRH. En particulier l'algorithme ci-dessus est au pire en temps exponentiel, cependant en moyenne il s'avère que cet algorithme, probabiliste puisqu'il dépend d'un choix de p, aboutit en temps polynomial. De manière surprenante, sur $\mathbb{Z}$, Lenstra a trouvé un algorithme en temps polynomial qui en pratique, cependant, se révèle moins bon que celui présenté ci-dessus.

Considérons pour finir $f \in \mathbb{Q}[X_0, \ldots, X_n]$ et on choisit un entier e strictement supérieur aux degrés partiels de f. Soit alors la substitution de Kronecker

$$S_e(f) := f(T, T^e, T^{e^2}, \ldots, T^{e^n}) \in \mathbb{Q}[T].$$

Si f possède un facteur g non trivial alors clairement $S_e(g)$ divise $S_e(f)$. Réciproquement pour toute factorisation de $S_e(f)$, en utilisant l'écriture en base e des puissances, on remplace chacun des $T^m = T^{i_0 + i_1 e + \cdots + i_n e^n}$, par $X_0^{i_0} \cdots X^{i_n}$, de façon à écrire un tel facteur sous la forme $S_e(g)$ avec g de degré inférieur à e. On teste ensuite si g divise f. Si f n'est pas irréductible, ses diviseurs seront nécessairement trouvés par cet algorithme. Moralité on peut factoriser les polynômes en plusieurs variables à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

CHAPITRE VI

THÉORIE DES NOMBRES

VI.1. Théorie des corps

Rappelons qu'un corps est un triplet $(K, +, \times)$ tel que $(K, +)$ est un groupe commutatif d'élément neutre 0_K et où $(K - \{0_K\}, \times)$ est un groupe d'élément neutre 1_K, tel que $\times$ est distributif par rapport à $+$, i.e.

$$\forall (a, b, c) \in K^3 : \ a \times (b + c) = a \times b + a \times c \text{ et } (b + c) \times a = b \times a + c \times a.$$

Remarque : habituellement le mot corps est réservé à la situation où $\times$ est commutative ; dans le cas contraire on parle d'algèbre à division. C'est en 1843 que W.R. Hamilton, à partir de l'interprétation des nombres complexes comme couple de nombres réels, s'est rendu compte qu'il était impossible de munir $\mathbb{R}^3$ d'une structure de corps et qu'en dimension 4, on devait autoriser la non commutativité dans la multiplication : il a alors obtenu l'algèbre à division des quaternions $\mathbb{H}$, i.e. les nombres de la forme $a + bi + cj + dk$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

VI.1.1. Généralités sur les extensions. — Puisque le seul idéal non nul d'un corps est le corps lui-même, alors un morphisme de corps, $\sigma : k \to K$ est nécessairement injectif ce qui permet d'identifier k à son image $\sigma(k)$ et donc de le considérer comme un sous-corps de K. Dans cette situation on dit que K est *une extension* du corps k et on note K/k.
Remarque : on dit aussi que K est un sur-corps de k ou que k est un sous-corps de K.

Définition VI.1.1. — Soit $k \subset K$ une extension de corps ; la dimension de K en tant que k-espace vectoriel se note $[K : k]$ et s'appelle *le degré* de l'extension K/k. *Une extension intermédiaire* L de K/k est un corps tel que $k \subset L \subset K$; on dit aussi que L/k est *une sous-extension* de K/k ou un sous-corps de K contenant k.

Remarque : le degré $[K : k]$ peut éventuellement être infini, par exemple $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Lemme VI.1.2. — *Soit k un corps et A une k-algèbre de dimension finie sur k ; alors A est un corps.*

Démonstration. — Soit $a \in A$ non nul ; la multiplication par a défini une application ϕ_a qui est k-linéaire et injective puisque A est intègre. Comme A est un k-espace vectoriel de dimension finie alors ϕ_a est bijective de sorte qu'il existe b tel que $ab = 1$ et donc a est inversible. □

Proposition VI.1.3. — ***(théorème de la base télescopique)*** *Soit $k \subset K \subset L$ des extensions de corps alors*

$$[L : k] = [L : K].[K : k].$$

Démonstration. — Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ (resp. $(f_j)_{1\leq j\leq m}$) une base de K (resp. de L) en tant que k-espace vectoriel (resp. K-espace vectoriel) avec $n = [K : k]$ (resp. $m = [L : K]$). Montrons alors que $(e_i f_j)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ est une base de L en tant que k-espace vectoriel. En ce qui concerne la liberté, soit

$$0 = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i f_j = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j} f_j \Big) e_i;$$

la famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ étant libre, on en déduit que pour tout $i = 1, \cdots, n$, $\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j} f_j = 0$. La famille des $(f_j)_{1\leq j\leq m}$ étant libre, on conclut alors que tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls et donc que la famille $(e_i f_j)_{i,j}$ est libre.

Soit ensuite $l \in L$ que l'on écrit sous la forme $\sum_{j=1}^{m} a_j f_j$ avec $a_j \in K$; on écrit alors $a_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} e_i$ de sorte que $l = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i f_j$ et la famille est génératrice. □

Définitions VI.1.4. —

— *Soit $S \subset K$ une partie quelconque d'un corps K. L'ensemble des sous-corps de K contenant S étant non vide, l'intersection de tous ces sous-corps est un sous-corps de K, c'est le plus petit sous-corps contenant S appelé* le sous-corps engendré par S.

— *Si K est une extension de k,* la sous-extension $k(S)$ engendrée par S sur k *est le sous-corps de K engendré par $S \cup k$. Si $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$ est fini, on le note aussi $k(x_1, \cdots, x_n)$.*

— *Une extension K/k est dite* de type fini *si K est engendré comme surcorps de k par un nombre fini d'éléments, i.e. s'il est de la forme $k(x_1, \cdots, x_n)$.*

— *On dit que l'extension K/k est* une extension monogène *si K est engendré sur k par un élément, i.e. s'il existe $x \in K$ tel que $K = k(x)$.*

Remarque : pour I, J deux parties de K, on a $k(I \cup J) = k(I)(J)$; en particulier toute extension de type finie $k \subset k(x_1, \cdots, x_n)$ est obtenue comme composée d'extensions monogènes

$$k(x_1, \cdots, x_n) = k(x_1)(x_2, \cdots, x_n) = k(x_1)(x_2) \cdots (x_n).$$

Définition VI.1.5. — Le noyau du morphisme $\mathbb{Z} \to K$ défini par

$$n \mapsto \overbrace{1_K + \cdots + 1_K}^{n}$$

est, en tant qu'idéal de l'anneau principal $\mathbb{Z}$, de la forme $p\mathbb{Z}$ pour $p \geq 0$ appelé la caractéristique de K. On appelle *sous-corps premier de K*, le sous-corps de K engendré par l'image de ce morphisme.

Lemme VI.1.6. — *La caractéristique p d'un corps est soit nulle soit un nombre premier.*

Démonstration. — Écrivons $p = nm$, il s'agit alors de prouver que $p = n$ ou bien $p = m$ ce qui revient à montrer que p divise n ou bien p divise m. On a donc $(n1_K) \times (m1K) = 0_K$ de sorte que, K étant intègre, $n1K = 0_K$ ou bien $m1_K = 0_K$. Autrement dit, on a $p|n$ ou bien $p|m$, i.e. $p = n$ ou bien $p = m$. □

Remarque : si la caractéristique de K est nulle (resp. non nulle) alors son sous-corps premier est $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) ; il est contenu dans tout sous-corps de K.

VI.1.2. Extensions algébriques et transcendantes. —

Définition VI.1.7. — Soit $k \subset K$ une extension de corps. Un élément $x \in K$ est dit *algébrique sur* k s'il existe un polynôme $P \in k[X]$ non nul tel que $P(x) = 0$. Dans le cas contraire on dit que x est *transcendant sur* k. L'extension K/k est dit algébrique si tous les éléments de K sont algébriques sur k.

Proposition VI.1.8. — *Les points suivants sont équivalents :*

(i) $x \in K$ *est algébrique sur* k *;*

(ii) la sous-algèbre $k[x] \subset K$ *engendrée par* x *et* k*, est de dimension finie sur* k *;*

(iii) la sous-algèbre $k[x] \subset K$ *est un corps.*

Démonstration. — Si x est algébrique sur k, il est annulé par un polynôme de degré $d > 0$ et donc $1, x, \cdots, x^{d-1}$ engendrent $k[x]$, prouvant $(i) \Rightarrow (ii)$. L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est générale : la multiplication par $z \in k[x]$ non nul, est un endomorphisme du k-espace vectoriel $k[x]$ qui est injective puisque $k[x] \subset K$ est intègre et donc surjective, puisque $k[x]$ est de dimension finie, i.e. 1 est atteint et donc z est inversible.

Enfin pour l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$, on écrit x^{-1} sous la forme $P(x)$ pour P un polynôme de $k[X]$ de sorte que l'équation

$$xP(x) - 1 = 0$$

est une relation de liaison entre les x^i pour $i \leq \deg(P) + 1$ et donc $k[x]$ est de dimension finie sur k. □

Corollaire VI.1.9. — *Le sous-ensemble* A *des éléments algébriques de* K *sur* k *est un sous-corps de* K*.*

Démonstration. — Notons que A contient 0 et 1. Soient alors $x, y \in A$ de sorte que $\{1, x^1, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ (resp. $\{1, y, \cdots, y^{m-1}\}$) engendre $k[x]$ (resp. $k[y]$) où $n = [k[x] : k]$ (resp. $m = [k[y] : k]$). On en déduit alors que les $x^i y^j$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ engendrent $k[x, y]$ qui est donc de dimension finie sur k. Mais comme $k[x - y]$ et $k[xy]$ sont contenus dans $k[x, y]$, ils sont aussi de dimension finie et donc $x - y$ et xy sont aussi dans A. On conclut en notant que si x est annulé par P alors $1/x$ est annulé par le polynôme $X^{\deg(P)}P(1/X)$. □

Remarque : en particulier si $x_1, \cdots, x_r$ sont des éléments algébriques de K/k alors $k[x_1, \cdots, x_r] \subset K$ est un corps de dimension $\leq \prod_{i=1}^{r} [k[x_i] : k]$. Réciproquement le théorème des zéros de Hilbert affirme que $k[x_1, \cdots, x_n]$ est un corps si et seulement si il est de dimension finie sur k.

Définition VI.1.10. — On appelle *polynôme minimal* d'un élément algébrique x de K/k, le générateur *unitaire* de l'idéal des polynômes de $k[X]$ annulant x.

Remarque : soient α, β deux nombres algébriques de polynômes minimaux respectifs $\mu_{\alpha,k}$ et $\mu_{\beta,k}$ alors le polynôme minimal de $\alpha + \beta$ est un facteur irréductible du résultant, relativement à la variable Y :

$$R_Y\Big(\mu_{\alpha,k}(X - Y), \mu_{\beta,k}(Y)\Big) =) \prod_{\beta_i} \mu_{\alpha,k}(X - \beta_i) \in k[X]$$

où les β_i sont les racines de $\mu_{\beta,k}$. Par exemple pour $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ et $\beta = \sqrt{5}+\sqrt{6}$ avec $\mu_{\alpha,\mathbb{Q}}(X) = X^4 - 10X^2 + 1$ et $\mu_{\beta,\mathbb{Q}}(X) = X^4 - 22X^2 + 1$. On calcule alors le résultant ce qui nous donne

$$\begin{aligned} R_Y(\mu_{\alpha,\mathbb{Q}}(X-Y), \mu_{\beta,\mathbb{Q}}(Y)) &= X^{16} - 128X^{14} + 5712X^{12} - 117248X^{10} + 1169248X^8 \\ &\quad -5289984X^6 + 8195328X^4 - 1990656X^2 + 20736 \\ &= (X^8 - 64X^6 + 96X^5 + 808X^4 - 1152X^3 - 2304X^2 + 1152X + 144). \\ &\quad (X^8 - 64X^6 - 96X^5 + 808X^4 + 1152X^3 - 2304X^2 - 1152X + 144) \end{aligned}$$

et par des calculs approximatifs des racines, on vérifie que le facteur cherché est $X^8 - 64X^6 - 96X^5 + 808X^4 + 1152X^3 - 2304X^2 - 1152X + 144$.

Selon le même principe les résultants $R_Y(\mu_{\alpha,k}(X/Y), \mu_{\beta,k}(Y))$ et $R_Y(\mu_{\alpha,k}(XY), \mu_{\beta,k}(Y))$ fournissent des polynômes annulant respectivement $\alpha\beta$ et α/β.

Proposition VI.1.11. — *Soit P le polynôme minimal de $x \in K$ algébrique sur k. Alors P est irréductible et $k[x]$ est canoniquement k-isomorphe à $k[X]/(P)$. En particulier* $\deg(P) = [k[x] : k]$.

Démonstration. — Par définition le morphisme d'algèbre $k[X] \to K$ qui envoie X sur x a pour image $k[x]$ et pour noyau l'idéal (P) ce qui fournit, par factorisation, l'isomorphisme $k[X]/(P) \simeq k[x]$. Comme $k[x]$ est un corps, on en déduit que (P) est maximal i.e. P est irréductible. □

Exemple : soit $K = \mathbb{Q}[\zeta_n]$ où ζ_n est une racine primitive de l'unité dans $\mathbb{C}$. Alors le n-ième polynôme cyclotomique Φ_n appartient à $\mathbb{Z}[X]$ et donc à $\mathbb{Q}[X]$, est irréductible et annule ζ_n, c'est donc son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ et

$$[\mathbb{Q}[\zeta_n] : \mathbb{Q}] = \phi(n).$$

L'extension $\mathbb{Q}[\zeta_n]/\mathbb{Q}$ est dite *cyclotomique*.

Proposition VI.1.12. — *Soit $K = k(x_1, \cdots, x_n)$ une extension telle que chaque x_i est algébrique de degré d_i sur k alors $K = k[x_1, \cdots, x_n]$ et K/k est algébrique de degré fini $\leq d_1 \cdots d_n$.*

Démonstration. — Soit $\phi : k[X_1, \cdots, X_n] \longrightarrow K$ le morphisme de k-algèbres défini par $\phi(X_i) = x_i$; l'image de ϕ est $A := k[x_1, \cdots, x_n]$. Comme chaque monôme x_i^n est combinaison k-linéaire des monômes x_i^r avec $0 \leq r < d_i$, on en déduit que A est engendrée sur k par les monômes $x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$ avec $r_i < d_i$ et donc A est une k-algèbre de dimension finie $\leq d_1 \cdots d_n$. De plus A est intègre car contenue dans K. D'après le lemme VI.1.2 A est un corps contenant $x_1, \cdots, x_n$ et donc K. □

Remarque : ainsi une extension K/k est de degré fini si et seulement si elle est algébrique et de type fini.

En ce qui concerne les extensions K/k de type fini arbitraires et donc pas nécessairement algébriques, nous allons introduire et étudier la notion de base et degré de transcendance.

Définition VI.1.13. — On dit que $x_1, \cdots, x_n$ sont *algébriquement indépendants* sur k si le morphisme

$$\phi : k[X_1, \cdots, X_n] \longrightarrow K, \quad P \mapsto P(x_1, \cdots, x_n)$$

est injectif.

Remarque : dans ce cas le morphisme ϕ se prolonge en un isomorphise de $k(X_1, \cdots, X_2)$ sur le sous-corps de K engendré par les x_i. En particulier chacun des x_i est transcendant sur k.

Définition VI.1.14. — On dit qu'une partie B de K est *une base de transcendance sur k* si elle vérifie les deux conditions suivantes :
- les éléments de B sont algébriquement indépendants sur k ;
- le corps K est une extension algébrique du sous-corps $k(B)$.

Remarque : cela revient à dire que B est une partie algébriquement indépendante *maximal*.

Lemme VI.1.15. — *Soit K/k une extension et soit S une partie finie de K telle que K soit algébrique sur $k(S)$. Alors S contient une base de transcendante B de K sur k. De plus le degré $[k(S) : k(B)]$ est fini.*

Remarque : en particulier si $K = k(S)$ alors K est de degré fini sur $k(B)$.

Démonstration. — Posons $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$ avec $x_1, \cdots, x_r$ algébriquement indépendants sur k et pour $i > r$, x_i algébrique sur $k(B)$ pour $B = \{x_1, \cdots, x_r\}$. Par transitivité des extensions algébriques, K est algébrique sur $k(B)$ et B est bien une base de transcendance de K sur k. □

Proposition VI.1.16. — *Soit K/k une extension de corps admettant une base de transcendance sur k qui est finie. Alors toutes les bases de transcendance de K sur k ont le même cardinal.*

Démonstration. — Soit B une base de transcendance de cardinal minimal n. Il suffit alors de montrer que si une partie B' est algébriquement indépendante sur k, alors elle est de cardinal $\leq n$. Pour ce faire nous allons raisonner par récurrence sur $s(B, B') := \sharp B - \sharp(B \cap B')$ que B' est de Si $s = 0$ alors $B \subset B'$ et donc $B' = B$ par maximalité de B. Supposons alors le résultat acquis jusqu'au rang $s - 1$ avec $s \geq 1$. On écrit $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ avec $B \cap B' = \{b_{s+1}, \cdots, b_n\}$. Si $B' \subset B$ il n'y a rien à montrer, supposons donc qu'il existe $b' \in B'$ et $b' \notin B$. Alors par maximalité de B, $B \cup \{b'\}$ n'est pas algébriquement indépendante et il existe $P \in k[X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}]$ non nul tel que $P(b_1, \cdots, b_n, b') = 0$ avec en outre $P \notin k[X_{s+1}, \cdots, X_{n+1}]$ puisque les éléments de B' sont algébriquement indépendants. Quitte à renuméroter on se ramène au cas où P contient la variable X_1.

Posons alors $B_1 = \{b_2, \cdots, b_n, b'\}$: b_1 est algébrique sur $k(B_1)$ et comme K est algébrique sur $k(B_1)[b_1]$, il est aussi algébrique sur $k(B_1)$. Comme $\sharp B_1 = n$, la minimalité de n jointe au lemme précédent, implique que B_1 est une base de transcendance de K sur k. De plus on a

$$\sharp B_1 - \sharp(B_1 \cap B') = s - 1 \text{ car } B_1 \cap B' = \{b_{s+1}, \cdots, b_n, b'\}.$$

Ainsi l'hypothèse de récurrence appliquée à B_1 et B', nous donne $\sharp B' \leq \sharp B_1 = n$. □

Théorème VI.1.17. — *Soit $k \subset K$ une extension de corps de type fini.*
- *Toutes les bases de transcendance de K sur k ont le même cardinal appelé* degré de transcendance de K sur k *et noté* $\mathrm{degtr}_k K$. *De plus tout ensemble d'éléments algébriquement indépendants est contenu dans une base de transcendance.*
- *Soit L/k une sous-extension de K/k ; alors L/k est de type fini et son degré de transcendance est inférieur ou égal à celui de K/k.*

Démonstration. — On a déjà vu l'existence des bases de transcendance et l'unicité de leur cardinal ; on peut ainsi en complétant un ensemble algébriquement indépendants aboutir à une base de transcendance.

En ce qui concerne le deuxième point, comme toute partie de L algébriquement indépendante sur k est aussi une partie de K algébriquement indépendante sur k, on obtient que L possède une base de transcendance fini $B = \{b_1, \cdots, b_t\}$ que l'on peut compléter en une bas de transcendance

$$\tilde{B} = B \coprod C = \{b_1, \cdots, b_t\} \coprod \{c_1, \cdots, c_s\}$$

de K sur k. Il reste alors à vérifier que L/k est de type fini.

Lemme VI.1.18. — *L'ensemble C est algébriquement indépendant sur L.*

Démonstration. — Sinon il existerait $P \in L[X_1, \cdots, X_s]$ non nul tel que $P(c_1, \cdots, c_s) = 0$. Quitte à renuméroter supposons que X_s apparaisse dans P et donc que c_s est algébrique sur $L(c_1, \cdots, c_{s-1})$. Comme $L/k(B)$ est algébrique on en déduit que $L(c_1, \cdots, c_{s-1})$ est algébrique sur $k(B)(c_1, \cdots, c_{s-1})$ et donc c_s est algébrique sur $k(B)(c_1, \cdots, c_{s-1})$ ce qui n'est pas. □

Soient alors $l_1, \cdots, l_n$ des éléments de L linéairement indépendants sur $k(B)$ et montrons qu'ils le sont encore sur $k(\tilde{B})$. Soit

$$0 = F_1 l_1 + \cdots + F_n l_n$$

une relation linéaire avec $F_i \in k(\tilde{B})$; en chassant les dénominateurs on se ramène à $F_i \in k[\tilde{B}]$ avec

$$F_i = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^s} P_{i,\nu}(b_1, \cdots, b_t) c_1^{\nu_1} \cdots c_s^{\nu_s}.$$

On obtient alors

$$0 = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^s} \Big(\sum_{i=1}^{n} P_{i,\nu}(b) l_i \Big) c^{\nu}$$

soit d'après le lemme précédent, $\sum_{i=1}^{n} P_{i,\nu}(b) l_i = 0$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}^s$ et comme les l_i sont linéairement indépendants sur $k(B)$, il vient $P_{i,\nu} = 0$ pour tout i, ν et donc $F_i = 0$ pour $i = 1, \cdots, n$. Ainsi $l_1, \cdots, l_n$ sont linéairement indépendants sur $k(\tilde{B})$ et donc

$$[L : k(B)] \leq [K : k(\tilde{B})] < \infty$$

et donc L est une extension de degré fini de $k(B)$ et L/k est de type fini. □

VI.1.3. Nombres algébriques de degré d. — L'énoncé suivant justifie l'affirmation selon laquelle les nombres algébriques ne se laissent pas facilement approchés par des rationnels, observation qui a permis à Liouville de construire des nombres transcendants.

Proposition VI.1.19. — *Soit α un nombre réel algébrique de degré $d \geq 2$ sur $\mathbb{Q}$ de polynôme minimal $\mu_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$ de contenu 1. On pose $c = |P'(\alpha)|$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier q_0 tel que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$ avec $q \geq q_0$, on ait*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{(c + \epsilon) q^d}.$$

Démonstration. — On écrit $P(X) = a_0 \prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i)$ avec $a_0 > 0$ et $\alpha = \alpha_1$ de sorte que $P'(\alpha) = a_0 \prod_{i=2}^{d}(\alpha - \alpha_i)$. Comme P est irréductible de degré ≥ 2, l'entier $q^d P(p/q) = a_0 q^d \prod_{i=1}^{d}(p/q - \alpha_i)$ est non nul. Pour tout q, on considère $p = [q\alpha]$ de sorte que $|q\alpha - p| \leq 1/2$ et donc

$$|\alpha_i - \frac{p}{q}| \leq |\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}$$

et donc

$$1 \leq q^d |P(p/q)| \leq q^d a_0 |\alpha - \frac{p}{q}| \prod_{i=2}^{d}(|\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}).$$

Pour q suffisamment grand le membre de droite est majoré par $q^d|\alpha - \frac{p}{q}|(|P'(\alpha)| + \epsilon)$, ce qui donne le résultat. □

Remarque : pour $\epsilon = 1$ et $K = \max\{c+1, \max_{1\leq q\leq q_0} \frac{1}{q^{d-1}|q\alpha - p|}\}$, on en déduit que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$ distinct de α, on a

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{Kq^d}.$$

Définition VI.1.20. — Un nombre réel α est dit de Liouville si pour tout $k > 0$, il existe $p/q \in \mathbb{Q}$ avec $q \geq 2$ tel que

$$0 < |\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^k}.$$

D'après la proposition précédente, tout nombre de Liouville est transcendant. Par exemple que pour $g \geq 2$ un entier rationnel et pour $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée d'entiers rationnels dont une infinité d'entre eux est non nul, le réel

$$x = \sum_{n\geq 0} a_n g^{-n!}$$

est de Liouville. En effet notons $A = \max_{n\geq 0} |a_n|$ et soit $k > 0$ un nombre réel ; soit alors N un entier suffisamment grand tel que $a_{N+1} \neq 0$ et posons

$$q = g^{N!}, \quad p = \sum_{n=0}^{N} a_n g^{N!-n!},$$

de sorte que $x - \frac{p}{q} = \frac{a_{N+1}}{g^{(N+1)!}} + \sum_{i\geq 2} \frac{a_{N+i}}{g^{(N+i)!}}$. Pour $i \geq 2$, on a $(N+i)! - (N+1)! \geq N + i$ et donc

$$\sum_{i\geq 2} \frac{a_{N+i}}{g^{(N+i)!}} \leq \frac{A}{g^{(N+1)!}} \sum_{i\geq 2} \frac{1}{g^{N+i}} < \frac{1}{g^{(N+1)!}} \leq \frac{|a_{N+1}|}{g^{(N+1)!}}.$$

On utilise enfin $|a_{N+1}| \leq A$ et $g^{(N+1)!} = q^{N+1}$ d'où

$$0 < |x - \frac{p}{q}| \leq \frac{2A}{q^{N+1}}.$$

Remarque : Citons le théorème de Thue-Siegel-Dyson-Roth : soit x algébrique de degré d, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K(x, \epsilon)$ tel que pour tout p/q on ait

$$|x - p/q| > \frac{K(x,\epsilon)}{q^{f(d)+\epsilon}}$$

où :

— $f(d) = d/2 + 1$ (Thue) ;
— $f(d) = 2\sqrt{d}$ (Siegel) ;
— $f(d) = \sqrt{2d}$ (Dyson et Gelfond) ;
— $f(d) = 2$ (Roth)

A titre de réflexion, vous pouvez réfléchir à l'argumentaire suivant : soit f une fonction sur $\mathbb{N}$ telle que $f(q) \to +\infty$ quand $q \to +\infty$. On note X_f l'ensemble des réels x de $[0,1]$ admettant une suite d'approximations p_n/q_n avec $|x - p_n/q_n| \leq 1/f(q_n)$, alors

$$X_f = \bigcap_{q_0}^{\infty} \bigcup_{q \geq q_0} \bigcup_{0 \leq p \leq q} [\frac{p}{q} - \frac{1}{f(q)}, \frac{p}{q} + \frac{1}{f(q)}]$$

L'intersection étant décroissante et les ensembles de mesure finie, il vient

$$\mu(X_f) = \lim_{q_0 \to \infty} \mu\Big(\bigcup_{q \geq q_0} \bigcup_{0 \leq p \leq q} [\frac{p}{q} - \frac{1}{f(q)}, \frac{p}{q} + \frac{1}{f(q)}]\Big) \leq \lim_{q_0 \to \infty} \sum_{q \geq q_0} \frac{2(q+1)}{f(q)}$$

En particulier si la série $\sum_{q \geq 1} q/f(q)$ converge alors $\mu(X_f) = 0$ ce qui est le cas pour $f(q) = q^\alpha$ avec $\alpha > 2$.
Remarque : en ce qui concerne les résultats d'approximation simultanée des nombres algébrique, on renvoie le lecteur intéressé à [**?**] chapitre VI.

VI.1.4. Corps de rupture et corps de décomposition. — Pour P un polynôme irréductible de $k[X]$, l'idéal (P) est maximal et donc $K := k[X]/(P)$ est un corps contenant k que l'on identifie aux polynômes constants. Notons que dans ce corps la classe x de X vérifie $P(x) = 0$, autrement dit P admet une racine dans K ; en outre on a $K = k[x]$.

Définition VI.1.21. — Le corps $L = k[X]/(P)$ est *le corps de rupture de* P sur k.

Définition VI.1.22. — Deux extensions K et K' de k sont dites *k-isomorphes* s'il existe un isomorphisme $\phi : K \xrightarrow{\sim} K'$ de corps tel que $\phi(\lambda) = \lambda$ pour tout $\lambda \in k$.

Remarque : autrement dit K et K' sont k-isomorphes s'ils le sont en tant que k-algèbres.

Proposition VI.1.23. — *Soit L/k une extension dans laquelle P admet une racine α ; il existe alors un unique k-morphisme $\psi : K \to L$ tel que $\psi(x) = \alpha$ d'image le sous-corps $k[\alpha]$ de L.*

Démonstration. — Le polynôme minimal $\mu_{k,\alpha}$ de α sur k divise P et donc, P étant irréductible, est de la forme λP pour $\lambda \in k^\times$. Le morphisme de k-algèbres $\phi : k[X] \to L$ défini par $\phi(X) = \alpha$ induit alors un morphisme $\psi : K := k[X]/(P) \to L$ tel que $\psi(x) = \alpha$. En outre ce morphisme est unique puisque $K = k[x]$. □

Remarque : en ce qui concerne l'unicité, il est parfois utile de disposer de la version plus souple suivante. Pour $\tau : k \simeq k'$ un isomorphisme de corps, on note $\phi_\tau : k[X] \simeq k'[X]$ l'isomorphisme d'anneaux qu'il induit :

$$\sum_i a_i X^i \mapsto \sum_i \tau(a_i) X^i.$$

Alors pour tout $P \in k[X]$, ϕ_τ induit un isomorphisme d'anneaux

$$k[X]/(P) \simeq k'[X]/(\tau(P)).$$

Remarque : le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est le corps de rupture de X^2+1 ou de n'importe quel polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$. En particulier on notera que des polynômes irréductibles distincts peuvent avoir les mêmes corps de rupture.
Remarque : si $K = k(\alpha)$ est une extension algébrique monogène alors K est un corps de rupture sur k du polynôme minimal de α sur k.

Pour qu'un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 soit irréductible sur un corps k, il faut évidemment qu'il n'ait pas de racines dans k. Cette condition nécessaire est aussi suffisante si le polynôme est de degré 2 ou 3. La proposition suivante généralise ce fait aux degrés plus grands :

Proposition VI.1.24. — *Soit P un polynôme de $k[X]$ de degré α. Alors P est irréductible si et seulement s'il n'admet de racine dans aucune extension K de k telle que $[K : k] \leq \alpha/2$.*

Démonstration. — Pour P est irréductible, une extension K/K possédant une racine α de P contient nécessairement $k[\alpha]$ qui est un corps de rupture de P sur k et donc $\deg P = [k[\alpha] : k] \leq [K : k]$.

Réciproquement soit Q un facteur irréductible de P : si P n'est pas irréductible on peut choisir Q de degré $\leq \frac{\deg P}{2}$ et P admet une racine dans un corps de rupture de Q lequel est donc de degré $\leq \frac{\deg P}{2}$ d'où le résultat. □

Remarque : en caractéristique nulle, ce critère est purement théorique puisqu'il y a pour k donné, une infinité d'extension de degré k. En revanche pour les corps finis, la situation est tout autre puisqu'à isomorphisme près, une telle extension est unique.

Corollaire VI.1.25. — *Soit $P(X) \in K[X]$ un polynôme irréductible sur K de degré n ; si L est une extension de K de degré m avec $n \wedge m = 1$, alors P est encore irréductible sur L.*

Proposition VI.1.26. — *Soit $K = k[\alpha]$ une extension algébrique monogène ; notons $\mu_{\alpha,k}$ le polynôme minimal de α sur k. Pour toute extension L/k, le nombre de k-morphismes $K \to L$ est égal au nombre de racines de $\mu_{\alpha,k}$ dans L. Par conséquent on a*

$$\sharp \hom_{k-alg}(K, L) \leq \deg \mu_{\alpha,k} = [K : k]$$

avec égalité si et seulement si $\mu_{\alpha,k}$ est totalement décomposé dans L.

Remarque : rappelons qu'un polynôme irréductible P de $k[X]$ a des racines simples dans toute extension L/k : en effet sinon le pgcd $P \wedge P' \in K[X]$ ne serait pas égal à 1 puisqu'il aurait une racine dans L, on obtiendrait alors un diviseur non trivial de P ce qui ne se peut pas puisque P est irréducible.

Démonstration. — Pour tout k-morphisme $\phi : K \to L$, $\phi(\alpha)$ est une racine de $\mu_{\alpha,k}$ dans L. Réciproquement comme $K \simeq k[x]/(\mu_{\alpha,k})$ alors toute racine β de $\mu_{\alpha,k}$ dans L définit un morphisme de k-algèbres $\phi_\beta : K \to L$ tel que $\phi_\beta(\alpha) = \beta$ et évidemment ces morphismes sont deux à deux distincts. □

Exemple : pour $k = \mathbb{Q}$ et $P(X) = X^3 - 2$, chacun des sous-corps suivants de $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}], \qquad \mathbb{Q}[j\sqrt[3]{2}], \qquad \mathbb{Q}[j^2\sqrt[3]{2}]$$

pour $j = e^{2i\pi/3}$, est un corps de rupture de P qui sont $\mathbb{Q}$-isomorphes et deux à deux distincts. En effet si on avait par exemple, $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \mathbb{Q}[j\sqrt[3]{2}]$ alors on aurait $j \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ ce qui ne se peut pas car $\mathbb{Q}[j]$ est une extension de degré 2 de $\mathbb{Q}$ et que 2 ne divise pas $3 = [\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}]$.

Définition VI.1.27. — Soit $P \in k[X]$ un polynôme non constant. On dit qu'une extension K/k est *un corps de décomposition de P sur k* si elle vérifie les deux conditions suivantes :
— P est scindé dans $K[X]$;
— K est engendré sur k par les racines de P.

Remarque : en particulier un corps de décomposition est une extension de degré fini sur k et donc algébrique.

Proposition VI.1.28. — *Tout $P \in k[X]$ non constant admet un corps de décomposition.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur le degré n de P. Si $n = 1$ alors $P = aX + b$ et donc k est un corps de décomposition de P. Supposons alors le résultat acquis jusqu'au degré $n-1$ et traitons le cas $\deg P = n$. Soit alors S un facteur irréductible de P et k_1/k un corps de rupture de S sur k. Dans $k_1[X]$, on a $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$ avec $Q \in k_1[X]$ de degré $n-1$. Par hypothèse de récurrence, il existe une extension K/k_1 dans laquelle Q a des racines $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ et telle que $K = k_1(\alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ de sorte que P est scindé sur K avec pour racines $\alpha_1 := \alpha, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ et $K = k(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. □

En ce qui concerne l'unicité, il est plus souple de l'énoncer comme suit.

Théorème VI.1.29. — *Soient $\tau : k \simeq k'$ un isomorphisme de corps, $P \in k[X]$ non constant et K (resp. K') un corps de décomposition de P (resp. de $\tau(P)$) sur k (resp. sur k'). Alors τ se prolonge en un isomorphisme $\sigma : K \simeq K'$.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur le nombre m de racines de P qui sont dans K mais pas dans k ; on se ramène aussi au cas où P est unitaire. Pour $m = 0$ on a clairement $K = k$ et $K' = k'$ et on peut prendre $\sigma = \tau$.

Supposons alors le résultat établi pour tout $m' < m$ et soit $P \in k[X]$ ayant exactement m racines dans $K - k$. On factorise $P = P_1 \cdots P_r$ en facteurs irréductibles dans $k[X]$: comme $m > 0$ l'un au moins de ces facteurs, disons P_1, est de degré ≥ 2. Comme P se scinde dans $K[X]$ en facteurs irréductibles de degré 1, P_1 a aussi toutes ses racines dans K ; notons α l'une d'elles et soit

$$\psi : K[X]/(P_1) \simeq k[\alpha] =: k_1.$$

Par application de τ, $\tau(P_1)$ est aussi un diviseur irréductible de $\tau(P)$ scindé dans K' dont on note β une racine :

$$\psi' : k'[X]/(\tau(P_1)) \simeq k'[\beta] =: k'_1.$$

Comme remarqué ci-avant, τ induit un isomorphisme

$$\phi_\tau : k[X]/(P_1) \simeq k'[X]/(\tau(P_1))$$

qui prolonge $\tau : k \simeq k'$ et $\tau_1 := \psi' \circ \phi_\tau \circ \psi^{-1}$ est alors un isomorphisme $k_1 \simeq k'_1$ qui prolonge τ. Désormais K (resp. K') est un corps de décomposition sur k_1 (resp. sur k'_1) de P (resp. $\tau_1(P)$) où le nombre de racines de P dans $K - k_1$ est $< m$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe alors un isomorphisme $\sigma : K \simeq K'$ dont la restriction à k_1 est τ_1 et donc, dont la restriction à k est τ. □

Définition VI.1.30. — On dit que K est *une clôture algébrique* de k si K/k est une extension algébrique et que K est algébriquement clos, i.e. que les seuls polynômes irréductibles de $K[X]$ sont ceux de degré 1.

Remarque : un corps est algébriquement clos si et seulement si tout polynôme de $K[X]$ est totalement décomposé dans K ou s'il ne possède pas d'autre corps de rupture que lui-même.
Remarque : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos mais n'est pas une extension algébrique de $\mathbb{Q}$: ce n'est donc pas une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$.

Définition VI.1.31. — Soit K/k une extension de corps ; nous avons vu que le sous-ensemble $K_{alg/k}$ de ses éléments algébriques est un corps ; on l'appelera *la fermeture algébrique de k dans K*.

Remarque : si x est algébrique sur $K_{alg/k}$ alors, d'après le théorème de la base télescopique, il est algébrique sur k et donc appartient à $K_{alg/k}$: autrement dit $K_{alg/k}$ est égal à sa propre fermeture algébrique. En particulier si K est algébriquement clos alors $K_{alg/k}$ est une clôture algébrique de k : en effet si $P \in K_{alg/k}[X]$ est non constant, une de ses racines quelconques dans K est algébrique sur K' et donc appartient à K'.

Notation VI.1.32. — *On notera $\overline{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des nombres complexes qui sont algébriques sur $\mathbb{Q}$. D'après ce qui précède c'est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$.*

Théorème VI.1.33. — ***(Steinitz)***
Tout corps k admet un clôture algébrique unique à k-isomorphisme (non unique) près.

Démonstration. — Désignons par $\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de $k[X]$ et soit A la k-algèbre de polynômes en une infinité de variables X_λ pour $\lambda \in \Lambda$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$ soit $P_\lambda(X_\lambda)$ l'image de P_λ dans A par le morphisme $k[X] \to A$ qui envoie X sur X_λ.

Lemme VI.1.34. — *L'idéal I de A engendré par les éléments $P_\lambda(X_\lambda)$ pour $\lambda \in \Lambda$ est un idéal propre de A.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde : il existerait alors un sous-ensemble fini $\Lambda_0 = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ de Λ tel que

$$1 = \sum_{i=1}^{n} Q_i P_{\lambda_i}(X_{\lambda_i}), \tag{5}$$

avec $Q_i \in A$. Cette égalité a en fait lieu dans un anneau de polynômes $B := k[X_{\lambda_j} : j = 1, \cdots, N]$ en un nombre fini de variables : il suffit en effet de rajouter à Λ_0 les X_λ qui apparaissent dans les Q_i.

Considérons alors k_1 un corps de rupture de P_{λ_1} sur k et soit α_1 une de ses racines dans k_1. De même en considérant un facteur irréductible de P_2 dans $k_1[X]$, on construit une extension k_2/k_1 tel que P_2 ait une racine dans k_2 et ainsi de suite jusqu'à $K = k_n$. Soit alors le morphisme

$$\phi : K[X_{\lambda_j} : j = 1, \cdots, N] \longrightarrow K$$

défini par $\phi(X_{\lambda_i}) = \alpha_i$ pour $\lambda_i \in \Lambda_0$ et $\phi(X_j) = 0$ pour les autres. On applique alors ϕ à l'égalité (5) ce qui fournit $1 = 0$ d'où la contradiction. □

Ainsi puisque I est un idéal propre de A, considérons $\mathcal{M}$ un idéal maximal de A contenant I et posons $K_1 = A/\mathcal{M}$ et $K_0 = k$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, notons x_λ l'image de X_λ dans K_1 : c'est une racine de P_λ. Ainsi tout polynôme irréductible de $k[X]$ admet une racine dans K_1.

Lemme VI.1.35. — *L'extension K_1/K_0 est algébrique.*

Démonstration. — Soit $y \in K_1$ qui est donc l'image d'un polynôme $Q \in A$ lequel ne fait intervenir qu'un nombre fini de variables X_λ. Ainsi y appartient à la sous-algèbre $C := k[x_{\lambda_1}, \cdots, x_{\lambda_s}]$ de K_1 et comme chaque x_{λ_i} est algébrique sur k, puisque racine de P_{λ_i}, y est algébrique sur k. □

Si K_1 n'est pas algébriquement clos, on peut appliquer à K_1 le même processus : on obtient ainsi une extension algébrique $K_1 \subset K_2$ dans laquelle tout polynôme irréductible de $K_1[X]$ a au moins une racine et telle que K_2/K_0 est algébrique. On construit ainsi une suite croissante d'extensions algébriques

$$k = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots$$

telle que tout polynôme irréductible $P \in K_i[X]$ a une racine dans K_{i+1}. Posons alors $K = \bigcup_{i \geq 0} K_i$ qui est donc algébrique sur k et algébriquement clos. En effet tout polynôme irréductible $P \in K[X]$ a tous ses coefficients dans un certain K_i et donc une racine dans K_{i+1} et donc K.

Il nous reste à montrer l'unicité à isomorphisme près. Commençons par le lemme suivant.

Lemme VI.1.36. — *Soient K/k une extension algébrique, Ω un corps algébriquement clos et $\tau : k \hookrightarrow \Omega$ un morphisme de corps. Alors τ se prolonge à K (de façon non unique en général).*

Démonstration. — Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (k', τ') où k'/k est une sous-extension de K/k et $\tau' : k' \hookrightarrow \Omega$ est un morphisme prolongeant τ. Alors $\mathcal{E}$ est non vide puisqu'il contient (k, τ), et lorsqu'on le munit de la relation d'ordre

$$(k', \tau') \leq (k'', \tau'') \Leftrightarrow k' \subset k'' \text{ et } \tau'' \text{ prolonge } \tau',$$

$\mathcal{E}$ est un ensemble ordonné inductif. En effet si (k_i, τ_i) est une chaîne totalement ordonnée alors $k' = \bigcup_i k_i$ est un sous-corps de K et on définit τ' par $\tau'(x) = \tau_i(x)$ où i est un indice quelconque tel que $x \in k_i$. Le couple (k', τ') ainsi définit appartient bien à $\mathcal{E}$ et est un majorant de la chaîne considérée. Ainsi d'après le théorème de Zorn, $\mathcal{E}$ possède un élément maximal (k_0, τ_0).

Montrons que $k_0 = K$; un élément $x \in K$ est algébrique sur k et donc sur k_0. On note $P \in k_0[X]$ son polynôme minimal sur k_0. Le polynôme $\tau_0(P)$ admet une racine dans Ω puisque Ω est algébriquement clos. Identifiant k_0 à son image dans Ω via τ_0, on obtient des isomorphismes

$$k_0[\alpha] \simeq k_0[X]/(P) \simeq k_0[x]$$

et τ_0 se prolonge en un morphisme $k_0[x] \simeq k_0[\alpha] \hookrightarrow \Omega$. Par maximalité de (k_0, τ_0) on en déduit que $k_0 = k_0[x]$ et donc $x \in k_0$. □

Soient alors Ω et Ω' deux clôtures algébriques de k. D'après le lemme précédent l'injection $\tau : k \hookrightarrow \Omega$ se prolonge en une injection $\tau' : \Omega' \hookrightarrow \Omega$. Soit alors $x \in \Omega$ qui est, par hypothèse, algébrique sur k et donc sur Ω'. Comme Ω' est algébriquement clos, le polynôme minimal de x sur Ω' est de degré 1, i.e. $x \in \Omega'$. Ainsi τ' est un isomorphisme. □

VI.2. Théorie de Galois

VI.2.1. Extensions séparables. —

Définition VI.2.1. — Un polynôme *irréductible* $P \in k[X]$ est dit *séparable sur* k si ses racines $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ dans un corps de décomposition K de P sur k sont deux à deux distinctes. Un polynôme non constant est dit séparable sur k si tous ses facteurs irréductibles dans $k[X]$ le sont.

Remarque : notons que cette notion ne dépend pas du corps de décomposition considéré, puisqu'ils sont tous isomorphes entre eux et que donc si dans un, P possède des racines multiples ce sera le cas pour tous.
Exemple : soit $k = \mathbb{F}_p(T^p) \subset K = \mathbb{F}_p(T)$ et considérons le polynôme $P = X^p - T^p \in k[X]$ qui est un polynôme d'Eisenstein et donc irréductible sur k. Dans $K[X]$ il se factorise en $P(X) = (X - T)^p$ de sorte que P n'est pas un polynôme séparable sur k. En revanche il l'est sur K.
Remarque : si $P \in k[X]$ est séparable sur k et si L est une extension de k alors tout diviseur $Q \in L[X]$ de P est aussi séparable sur L.

Proposition VI.2.2. — *Soit $P \in k[X]$ non constant ; alors P est séparable si et seulement si P et P' sont premiers entre eux.*

Démonstration. — Si P n'est pas séparable sur k, alors il existe une extension finie K/k dans laquelle P admet une racine α d'ordre ≥ 2, i.e. $P'(\alpha) = 0$ de sorte que le pgcd de P et P' est de degré ≥ 1 puisqu'il admet une racine dans K. Réciproquement si $D = P \wedge P'$ est de degré ≥ 1 alors il admet une racine α dans une extension K/k de degré finie et donc $P(\alpha) = P'(\alpha)$ et donc P n'est pas séparable sur k. □

Remarque : un polynôme irréductible $P \in k[X]$ est séparable si et seulement si $P' \neq 0$.

Corollaire VI.2.3. — *En caractéristique nulle, tout polynôme est séparable.*

Définition VI.2.4. — Soit K/k une extension algébrique. On dit que $\alpha \in K$ est *séparable sur* k si son polynôme minimal sur k l'est. On dit que l'extension K/k est *séparable* si tous ses éléments le sont.

Proposition VI.2.5. — *Soient $k \subset L \subset K$ des extensions de corps. Si K/k est séparable alors L/k et K/L le sont aussi.*

Démonstration. — Le cas de L/k est trivial, étudions alors le cas de K/L. Pour $x \in K$, par hypothèse $\mu_{x,k}$ est séparable et $\mu_{x,L}$ en est un diviseur de sorte que x est séparable sur L. □

Définition VI.2.6. — Soient K/k une extension de corps et $\tau : k \to L$ un morphisme. On note $\hom_\tau(K, L)$ l'ensemble des morphismes de corps $\phi : K \to L$ tels que $\phi_{|k} = \tau$.

Remarque : si on identifie k à son image $\tau(k)$, alors $\hom_\tau(K, L)$ n'est autre que l'ensemble des k-morphismes de K vers L.

Théorème VI.2.7. — *Soit K/k une extension de degré fini.*

1) Pour toute extension L/k, on a l'inégalité

$$\sharp \hom_{k-alg}(K, L) \leq [K : k].$$

2) Si K/k est séparable alors l'inégalité de 1) est une égalité lorsque L est algébriquement clos.

3) S'il existe une extension L/k telle que l'égalité ait lieu alors K/k est séparable.

Démonstration. — Par hypothèse K est de la forme $k[x_1, \cdots, x_r]$; on va alors montrer 1) et 2) en raisonnant par récurrence sur r. Pour $r = 1$, i.e. $K = k[x]$, d'après la proposition VI.1.26, le cardinal de $\hom_{k-alg}(K, L)$ est égal au nombre de racines distinctes dans L, du polynôme minimal de x sur k et donc $\leq [K : k]$. De plus si x est séparable sur k, l'égalité est obtenue dans 1) si L est un corps de décomposition sur k de P ce qui finit de prouver 1) et 2) dans le cas $r = 1$.

Supposons alors le résultat établi jusqu'au rang $r - 1$. On pose $k_1 = k[x_1] \subset K = k_1[x_2, \cdots, x_r]$ et

$$\sharp \hom_{k-alg}(k_1, L) \leq [k_1 : k]. \tag{6}$$

En outre pour $\tau : k_1 \to L$ un k-morphisme, par hypothèse de récurrence appliquée à K/k_1, on a

$$\sharp \hom_{\tau}(K, L) = \sharp \hom_{k_1-alg}(K, l) \leq [K : k_1]. \tag{7}$$

Or si $\phi : K \to L$ est un k-morphisme sa restriction ϕ_1 à k_1 est un k-morphisme et $\phi \in \hom_{\phi_1}(K, L)$. On a donc

$$\sharp \hom_{k-alg}(K, L) \leq \hom_{k-alg}(k_1, L) \sharp \hom_{k_1-alg}(K, L) \tag{8}$$

avec égalité si et seulement si tout k-morphisme $\tau : k_1 \to L$ se prolonge en un k-morphisme $\phi : K \to L$. En utilisant la multiplicativité des degrés, les inégalités (6) et (7) donnent

$$\sharp \hom_{k-alg}(K, L) \leq [K : k_1].[k_1 : k] = [k : k] \tag{9}$$

ce qui finit de prouver 1).

Supposons de plus que K/k est séparable et que L est algébriquement clos ; d'après le lemme VI.1.36, tout k-morphisme $k_1 \to L$ se prolonge en un k-morphisme $\phi : K \to L$ et donc (8) est une égalité. De plus (6) et (7) sont des égalités d'après le cas $r = 1$ et l'hypothèse de récurrence et donc (9) est un égalité, ce qui finit de prouver 2).

En ce qui concerne 3), supposons qu'il existe L/k telle que (9) soit une égalité et soit $x \in K$ arbitraire. Prenons dans le raisonnement précédent $k_1 = k[x]$ de sorte que (9) implique que les inégalités (6), (7) et (8) sont des égalités. En particulier on a

$$\sharp \hom_{k-alg}(k[x], L) = [k[x] : k],$$

et d'après la proposition VI.1.26 ceci implique que x est séparable sur k et puisque x est quelconque que K/k est séparable. □

Corollaire VI.2.8. — *Soit K/k une extension de degré fini.*

1) Si $x \in K$ est séparable sur k alors $k[x]/k$ est séparable.

2) Soit E/k une extension intermédiaire. Si K/E et E/k sont séparables alors K/k l'est aussi.

3) Si $K = k[x_1, \cdots, x_r]$ avec chaque x_i séparable sur k alors K/k est séparable.

Démonstration. — 1) Soit L un corps de décomposition sur k de $\mu_{x,k}$; comme x est séparable sur k alors $\mu_{x,k}$ est scindé à racines simples dans L et donc d'après la proposition VI.1.26,

$$\sharp \hom_{k-alg}(k[x], L) = [k[x] : k],$$

de sorte que d'après le théorème précédent, $k[x]/k$ est séparable.

2) Soit L une clôture algébrique de K ; puisque E/k et K/E sont séparables alors d'après le théorème précédent on a

$$\sharp \hom_{k-alg}(E, L) = [E : k]$$

et tout k-morphisme $\tau : E \to L$ se prolonge en exactement $[K : E]$ morphismes $K \to L$. On en déduit que

$$\sharp \hom_{k-alg}(K, L) = [K : E].[E : k] = [K : k],$$

et donc, d'après le théorème précédent, K/k est séparable.

Enfin 3) découle de 1) et 2) par récurrence sur r. □

Corollaire VI.2.9. — *Soit $P \in k[X]$ un polynôme séparable et K un corps de décomposition de P sur k. Alors K/k est séparable.*

Démonstration. — Soient $x_1, \cdots, x_r$ les racines de P dans $K = k[x_1, \cdots, x_r]$. Pour tout $i = 1, \cdots, r$, $\mu_{x_i,k}$ est un diviseur irréductible de P et est donc séparable sur k, de sorte que x_i est séparable sur k. Le résultat découle alors du corollaire précédent. □

Théorème VI.2.10. — ***(de l'élément primitif)***
Soit K/k une extension séparable de degré fini ; alors K admet un élément primitif ζ sur k, i.e. $K = k[\zeta]$.

Démonstration. — Si k est un corps fini alors $K^\times$ est cyclique et $K = k[\zeta]$ pour tout générateur ζ de $K^\times$.

Supposons à présent que k est infini et notons $n = [K : k]$. Pour Ω une clôture algébrique de K, K/k étant séparable, il existe des k-isomorphismes $K \to \Omega$ deux à deux distincts $\tau_1, \cdots, \tau_n$ de sorte que pour tous $i \neq j$, $\mathrm{Ker}(\tau_i - \tau_j)$ est un sous-espace strict de K.

Lemme VI.2.11. — *Un espace vectoriel V sur un corps infini k n'est pas réunion finie de sous-espaces stricts $V_1, \cdots, V_t$.*

Démonstration. — C'est clair pour $t = 1$ et on suppose, par hypothèse de récurrence, que $t \geq 2$ et le résultat établi pour $t-1$. Ainsi il existe $u, v \in V$ tels que $u \notin V_t$ et $v \notin V_1 \cup \cdots \cup V_{t-1}$. Si on avait $V = V_1 \cup \cdots \cup V_t$ alors $v \in V_t$ et comme l'ensemble des $x_\lambda := u + \lambda v$ pour $\lambda \in k$ est infini, il existe $\lambda \neq \mu$ tels que x_λ et x_μ appartiennent au même V_j. On ne peut avoir $j = t$ car sinon on aurait $u \in V_t$; donc $j < t$ et V_j contient $x_\lambda - x_\mu = (\lambda - \mu)v$ et donc v aussi ce qui n'est pas. □

Ainsi d'après le lemme il existe $x \in K$ n'appartenant à aucun des $\mathrm{Ker}(\tau_i - \tau_j)$ de sorte que les $\tau_i(x)$ sont deux à deux distincts. Comme ce sont des racines dans Ω de $\mu_{x,k}$ de sorte que

$$n \leq [k[x] : k] \leq [K : k] = n$$

et donc $K = k[x]$. □

Remarque : soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie et $\alpha \in K$ un élément primitif de polynôme minimal $\mu_{\alpha,\mathbb{Q}}(X) = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$. Les plongements de K dans $\mathbb{C}$ sont en bijection avec les racines α_i de $\mu_{\alpha,\mathbb{Q}}$. À chaque racine réelle (resp. complexe) correspond un plongement réel (resp. complexe), i.e. dont l'image est contenue dans $\mathbb{R}$ (resp. n'est pas contenue dans $\mathbb{R}$).

Notation VI.2.12. — *On note r_1 (resp. r_2) le nombre de plongements réels de K : on a $r_1 + 2r_2 = n = [K : \mathbb{Q}]$. Le couple (r_1, r_2) est appelé* la signature *de K.*

Remarque : sous-entendu dans la notation est que ces nombres ne dépendent pas du choix de l'élément primitif α ce qui est clair.

Définition VI.2.13. — Soient $\sigma_1, \cdots, \sigma_{r_1}$ les plongements réels d'une extension fini K de $\mathbb{Q}$ et soient $\sigma_{r_1+1}, \cdots, \sigma_{r_1+r_2}$ des plongements complexes de K tels que $\{\sigma_{r_1+1}, \overline{\sigma_{r_1+1}}, \cdots, \sigma_{r_1+r_2}, \overline{\sigma_{r_1+r_2}}\}$ est l'ensemble des plongements complexes de K. *Le plongement canonique* de K est alors l'application $\mathbb{Q}$-linéaire

$$\begin{cases} \underline{\sigma}: & K & \longrightarrow & \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2} \\ & x & \mapsto & \big(\sigma_1(x), \cdots, \sigma_{r_1+r_2}(x)\big). \end{cases}$$

Remarque : le plongement canonique dépend du choix pour chaque $i = 1, \cdots, r_2$ entre σ_{r_1+i} et $\overline{\sigma_{r_1+i}}$.

Proposition VI.2.14. — *Soit K/k une extension de degré fini ; les deux points suivants sont alors équivalents*

1) L'extension K/k admet un élément primitif.

2) Le nombre d'extensions intermédiaires de K/k est fini.

Démonstration. — Supposons 1) i.e. qu'il existe ζ tel que $K = k[\zeta]$ et notons $P := \mu_{\zeta,k}$. Pour $k \subset L \subset K$ une extension intermédiaire $Q := \mu_{\zeta,L}$ est un diviseur irréductible de P dans $L[X]$ de degré $[K : L]$ ce qui ne donne qu'un nombre fini de tels Q. Notons $L' \subset L$ le sous-corps de L engendré sur k par les coefficients de Q ; comme Q est encore irréductible sur L' on a donc $[K : L] = \deg Q = [K : L']$ et donc $L = L'$. Autrement dit L est entièrement déterminé par Q et comme il n'y a qu'un nombre fini de tels Q on obtient bien 2).

En ce qui concerne la réciproque, notons que dans le cas où k est fini, les points 1) et 2) sont toujours satisfait de sorte qu'il n'y a rien à montrer. Supposons donc que k est infini et soit $\zeta \in K$ tel que $[k[\zeta] : k]$ soit maximal et montrons que $K = k[\zeta]$. Soit donc $x \in K$ et pour $t \in k$ on note $\zeta_t = \zeta + tx$ ainsi que $L_t = k[\zeta_t]$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de corps intermédiaires et que k est supposé infini, il existe $s \neq t$ tels que $L_s = L_t$. Ce corps contient $(s - t)x$ et donc x ainsi que ζ soit

$$k[\zeta] \subset k[\zeta, x] \subset k[\zeta_t].$$

Par maximalité du degré de $k[\zeta]$, on en déduit que ces inclusions sont des égalités et donc en particulier que $x \in k[\zeta]$. □

Remarque : pour $K = \mathbb{F}_p(X, Y)$ et k le sous-corps engendré par X^p et Y^p on note que $[K : k] = p^2$ et que pour tout $x \in K$, comme $x^p \in k$, on a $[k[x] : k] = 1$ ou p selon que x appartient ou n'appartient pas à k. Ainsi K/k n'est pas monogène et admet donc une infinité de corps intermédiaires.

Définition VI.2.15. — Un corps k est dit *parfait* si sa caractéristique est nulle ou s'il est de caractéristique $p > 0$ et que son Frobenius est surjectif.

Remarque : un corps algébriquement clos de caractéristique p est parfait ; en particulier un sous-corps d'un corps parfait n'est pas nécessairement parfait. Un corps fini est parfait, en revanche $\mathbb{F}_p(T)$ n'est pas parfait.

Lemme VI.2.16. — *Soit k un corps parfait et K/k une extension finie. Alors K est parfait.*

Démonstration. — Supposons que k est de caractéristique p sinon il n'y a rien à prouver. Le Frobenius f_K de K est bijectif sur k par hypothèse et y admet donc un inverse f_K^{-1}. Alors $f_K(K)$ est un $k = f_K(k)$-sous-espace vectoriel de K ; plus généralement si les $x_i \in K$

forment une famille libre sur k alors les $f_K(x_i)$ sont aussi libre sur k dans $f_K(K)$ de sorte que $[K : k] \leq [f_K(K) : k]$, l'égalité découlant alors de l'inclusion $f_K(K) \subset K$. □

L'intérêt des crops parfaits vient du résultat fondamental suivant.

Théorème VI.2.17. — *Un corps k est parfait si et seulement si tout polynôme irréductible de $k[X]$ est séparable.*

Démonstration. — Supposons k parfait et soit $P \in k[X]$ irréductible. Alors $P' = 0$ si et seulement si k est de caractéristique p et P est de la forme $P = \sum_n a_{np}X^{np}$. Comme k est parfait on a alors

$$P = \sum_n F^{-1}(a_{np}^p)X^{np} = \Big(\sum_n F^{-1}(a_{np})X^n\Big)^p,$$

et P ne serait pas irréductible. Ainsi P' est non nul et $P \wedge P' = 1$, i.e. P est séparable sur k.

Réciproquement supposons que tout polynôme irréductible de $k[X]$ est séparable et supposons k de caractéristique $p > 0$. Soit alors $t \in k$ et supposons que t n'admette pas de racine p-ième de sorte que le polynôme minimal P sur k d'une racine p-ième $t^{1/p}$ de t dans une clôture algébrique de k, est irréductible de degré > 1. Comme P divise $X^p - t = (X - t^{1/p})^p$ alors $P(X) = (X - t^{1/p})^k$ avec $2 \leq k \leq p$ et P n'est pas séparable, d'où la contradiction. □

VI.2.2. Extensions normales et galoisiennes. —

Définition VI.2.18. — Une extension algébrique K/k est dit *normale* si pour tout $\alpha \in K$ le polynôme $\mu_{\alpha,k}$ est décomposé dans K.

Proposition VI.2.19. — *Soit K le corps de décomposition sur k d'un polynôme $P \in k[X]$; alors K/k est normale.*

Démonstration. — Soit $\alpha \in K$ et L un corps de décomposition sur K de $\mu_{\alpha,k}$; comme $P\mu_{\alpha,k}$ est scindé dans L et que L est engendré par les racines de $P\mu_{\alpha,k}$, alors L est aussi un corps de décomposition de $P\mu_{\alpha,k}$ sur k. Il s'agit alors de vérifier que $L = K$. Soit β une racine quelconque de $\mu_{\alpha,k}$ et soit $\tau : k[\alpha] \simeq k[\beta]$. D'après le théorème VI.1.29, τ se prolonge en un k-automorphisme σ de L. Notons $x_1, \cdots, x_m$ les racines distinctes de P ; par définition K est engendré par les x_i et donc $\sigma(K)$ est engendré par les $\sigma(x_i)$. Or, comme $\sigma(P) = P$, σ induit une permutation des x_i et donc $\sigma(K) = K$ de sorte que $\beta = \sigma(\alpha)$ appartient à K. □

Définition VI.2.20. — Pour K/k une extension algébrique, on note

$$\mathrm{aut}(K/k) = \{g \in \mathrm{aut}(K) : \ g_{|k} = \mathrm{Id}_k\}.$$

Remarque : si $[K : k]$ est fini alors d'après le théorème VI.2.7, $\mathrm{aut}(K/k)$ est un groupe fini. Pour $\alpha \in K$ et $g \in \mathrm{aut}(K/k)$ comme $g(\mu_{\alpha,k}) = \mu_{\alpha,k}$ alors g permute les racines de $\mu_{\alpha,k}$. Ainsi $\mu_{\alpha,k}$ est divisible par $\prod_{\beta\in\mathcal{O}_{K/k}(\alpha)}(X - \beta)$ où $\mathcal{O}_{K/k}(\alpha)$ désigne l'orbite de α sous l'action de $\mathrm{aut}(K/k)$, i.e. $\mathcal{O}_{K/k}(\alpha) := \{g(\alpha) : \ g \in \mathrm{aut}(K/k)\}$. On se demande alors si cette divisibilité est une égalité, autrement dit si l'action de $\mathrm{aut}(K/k)$ sur l'ensemble des racines de $\mu_{\alpha,k}$ est transitive.

- Évidemment pour qu'on ait une chance que cette égalité ait lieu, il faut pour le moins que K contienne toutes les racines de $\mu_{\alpha,k}$. Par exemple pour $k = \mathbb{Q}$ et $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, le groupe $\mathrm{aut}(K/k)$ est réduit à l'identité puisque ni $j\sqrt[3]{2}$ ni $j^2\sqrt[3]{2}$ n'appartiennent à K.
- Notons par ailleurs que $\prod_{\beta\in\mathcal{O}_{K/k}(\alpha)}(X-\beta)$ est un polynôme dont toutes les racines sont deux à deux distinctes. Ainsi s'il devait être égal à $\mu_{\alpha,k}$, α doit être séparable sur k.

Définition VI.2.21. — On dit qu'une extension K/k de degré fini est *galoisienne* si $\sharp\mathrm{aut}(K/k) = [K : k]$. Dans ce cas $\mathrm{aut}(K/k)$ est noté $\mathrm{Gal}(K/k)$ et s'appelle *le groupe de Galois* de K/k.

Théorème VI.2.22. — *Soit K/k une extension de degré fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) K/k est galoisienne ;

2) K/k est normale et séparable ;

3) K est le corps de décomposition sur k d'un polynôme séparable.

Dans ces conditions, pour tout $\alpha \in K$, on a

$$\mu_{\alpha,k}(X) = \prod_{\beta \in \mathcal{O}_{K/k}(\alpha)} (X - \beta).$$

Démonstration. — L'implication 3) $\Rightarrow$ 2) découle de la proposition VI.2.19 et du corollaire VI.2.9. L'implication 2) $\Rightarrow$ 3) est facile : on écrit $K = k[x_1, \cdots, x_n]$ de sorte que K/k étant séparable et normale, $P = \prod_{i=1}^{n} \mu_{x_i,k}$ est séparable et scindé dans K : K est donc bien un corps de décomposition de P sur k.

Montrons 2) $\Rightarrow$ 1) : soit L une clôture algébrique de K. D'après le théorème VI.2.7, il y a exactement $n := [K : k]$ k-morphismes $g_1, \cdots, g_n$ de K dans L et donc

$$\sharp\mathrm{aut}(K/k) \leq n = [K : k].$$

Il s'agit donc de montrer que chacun des g_i appartient à $\mathrm{aut}(K/k)$, i.e. applique K sur lui-même. D'après le théorème de l'élément primitif, il existe $\zeta \in K$ tel que $K = k[\zeta]$ et pour tout $i = 1, \cdots, n$, comme $g_i(\mu_{\zeta,k}) = \mu_{\zeta,k}$, $g_i(\zeta)$ est une racine de P et donc appartient à K puisque K/k est normale : on a donc bien $g_i(K) = K$ d'où le résultat.

Montrons enfin que 1) $\Rightarrow$ 2), et donc que $\mathrm{aut}(K/k)$ est de cardinal $[K : k]$. D'après VI.2.7, on en déduit que K/k est séparable et il nous reste à prouver que K/k est normale. Soit $\alpha \in K$ et L une clôture algébrique de K : il s'agit alors de montrer que pour toute racine $\beta \in L$ de $\mu_{\alpha,k}$ alors $\beta \in K$. D'après l'unicité à isomorphisme près du corps de rupture de $\mu_{\alpha,k}$ soit $\tau : k[\alpha] \simeq k[\beta]$ avec $\tau(\alpha) = \beta$. D'après le lemme VI.1.36, τ se prolonge en un k-morphisme $\sigma : K \to L$. Ainsi des inégalités

$$[K : k] = \sharp\mathrm{aut}(K/k) \leq \sharp\,\mathrm{hom}_{k-alg}(K, L) \leq [K : k]$$

on en déduit que $\sharp\,\mathrm{hom}_{k-alg}(K, L) = [K : k]$ et donc que $\sigma \in \mathrm{aut}(K/k)$, soit $\beta = \sigma(\alpha) \in K$ d'où le résultat. □

Théorème VI.2.23. — ***(Artin)***
Soient K un corps et G un sous-groupe fini de $\mathrm{aut}(K)$. *On note*

$$K^G := \{x \in K : \ g(x) = x, \ \forall g \in G\}.$$

Alors K^G est un sous-corps de K tel que l'extension K/K^G est galoisienne de groupe de Galois G.

Remarque : en particulier $[K : K^G] = \sharp G$.

Démonstration. — Il est clair que K^G est un sous-corps de K, montrons que K/K^G est galoisienne. Soit $\alpha \in K$ et notons $\mathcal{O}_G(\alpha)$ son orbite sous G. Considérons alors $P_\alpha(X) := \prod_{\beta\in\mathcal{O}_G(\alpha)}(X-\beta) \in K[X]$. Comme pour tout $g \in G$ on a

$$g(P_\alpha)(X) = \prod_{\beta\in\mathcal{O}_G(\alpha)} (X - g(\beta)) = \prod_{\beta\in\mathcal{O}} (X-\beta) = P_\alpha$$

on en déduit que $P_\alpha \in K^G[X]$. En outre P_α est divisible par μ_{α,K^G} qui est lui-même divisible par $Q(X) := \prod_{\beta\in\mathcal{O}_{K/K^G}(\alpha)}(X-\beta)$. Comme $G \subset \mathrm{aut}(K/K^G)$, alors $\deg Q \geq \sharp G$ et donc $P_\alpha = \mu_{\alpha,K^G}$ et l'orbite de α sous G est égale à celle sous $\mathrm{aut}(K/K^G)$. Ainsi μ_{α,K^G} est scindé à racines simples dans K et donc, comme le raisonnement est valable pour tout $\alpha \in K$, K/K^G est séparable et normale, i.e. galoisienne. En outre le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/K^G)$ contient G et donc $\sharp G \leq [K : K^G]$; pour ζ un élément primitif de K/K^G, d'après ce qui précède

$$[K : K^G] = \deg \mu_{\zeta,K^G} = \sharp\mathcal{O}_G(\alpha) \leq \sharp G$$

et donc finalement $G = \mathrm{aut}(K/K^G) = [K : K^G]$. □

Corollaire VI.2.24. — *Soit K/k une extension galoisienne de groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(K/k)$; alors $K^G = k$.*

Démonstration. — Clairement $k \subset K^G$ et puisque K/k est galoisienne, $[K : k] = \sharp G$. Or d'après le théorème d'Artin, on a $[K : K^G] = \sharp G$ et le résultat découle du théorème de la base télescopique. □

Définition VI.2.25. — On appelle groupe de Galois d'un polynôme P non constant de $k[X]$, le groupe de Galois d'un corps de décomposition de P sur k.

Remarque : dans le cas où k est un corps parfait, le polynôme $\frac{P}{P\wedge P'}$ est séparable et admet les mêmes corps de décomposition ce qui permet de se ramener au cas P séparable. Comme le groupe de Galois laisse k invariant, il permute les racines de P ce qui permet de le considérer comme un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ où $n = \deg P$.

Proposition VI.2.26. — *Le polynôme P est irréductible si et seulement si l'action de son groupe de Galois est transitive sur ses racines.*

Démonstration. — Supposons P irréductible : ses racines x_i s'identifient aux k-morphismes $k[X]/(P) \longrightarrow \Omega$ où Ω est un clôture algébrique de k. Or ces k-morphismes s'identifient aux éléments du groupe de Galois et l'action est donc transitive.

Réciproquement supposons l'action transitive et supposons $P = QR$ avec $Q, R \in k[X]$ et $\deg Q > 0$. Comme précédemment le groupe de Galois permute les racines de Q de sorte que si l'action est transitive les racines de Q sont celles de P et $Q = P$. □

Exemple : reprenons l'exemple de l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta_n]/\mathbb{Q}$ où ζ_n est une racine primitive n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$. Un élément σ de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\zeta_n]/\mathbb{Q})$ est déterminé par $\sigma(\zeta_n)$ qui est de la forme $\zeta_n^{\chi(\sigma)}$ pour $\chi(\sigma) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. On définit ainsi un morphisme injectif

$$\chi : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\zeta_n]/\mathbb{Q}) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$$

qui est aussi surjectif car les deux groupes ont même cardinal.

Définition VI.2.27. — Pour $P \in k[X]$ séparable dont les racines dans une clôture algébrique Ω de k sont $x_1, \cdots, x_n$. *Le discriminant* de P est défini par

$$\mathrm{Disc}(P) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i \neq j} (x_i - x_j).$$

Proposition VI.2.28. — *Avec les notations ci-dessus,* $\mathrm{Disc}(P)$ *est un élément de* $k^\times$ *et si* k *n'est pas de caractéristique* 2*, est un carré de* $k^\times$ *si et seulement si le groupe de Galois de* G *est contenu dans le groupe alterné* $\mathcal{A}_n$.

Démonstration. — Visiblement $\mathrm{Disc}(P)$ est non nul et invariant par son groupe de Galois G ; il appartient donc à $k^\times$. Notons alors $\delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j) \in \Omega$, de sorte que $\mathrm{Disc}(P) = \delta^2$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, par définition de la signature on a $\sigma(\delta) = \epsilon(\sigma)\delta$. Ainsi, en caractéristique différente de 2, $\delta \in k^\times$ si et seulement si $G \subset \mathcal{A}_n$. □

VI.2.3. Correspondance de Galois. — Soit K/k une extension de degré fini galoisienne de groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(K/k)$.

Définition VI.2.29. — Pour tout sous-groupe H de G, on note

$$K^H := \{x \in K : \ h(x) = x, \ \forall h \in H\},$$

le sous-corps de K fixé par H.

Remarque : on a clairement $k = K^G \subset K^H$ de sorte que K^H est un corps intermédiaire entre k et K.

Théorème VI.2.30. — ***(Correspondance de Galois)***

1) Pour tout sous-groupe H *de* G*, l'extension* K/K^H *est galoisienne et* $\mathrm{Gal}(K/K^H) = H$.

2) Réciproquement pour L *un corps intermédiaire,* K/L *est galoisienne et*

$$\mathrm{Gal}(K/L) = \{g \in G : \ g(l) = l, \ \forall l \in L\}$$

est un sous-groupe H *de* G *et* $L = K^H$.

3) Les applications

$$H \mapsto K^H \qquad et \qquad L \mapsto \mathrm{Gal}(K/L)$$

sont des bijections réciproques entre les deux ensembles

$$\{\textit{corps intermédiaires } L \textit{ de } K/k\} \leftrightarrow \{\textit{sous-groupes } H \textit{ de } G\}.$$

Si L *et* H *se correspondent, on a*

$$[K : L] = \sharp H \qquad et \qquad [L : k] = \sharp G/H.$$

Ces deux bijections sont décroissantes, i.e.

$$H \subseteq H' \Leftrightarrow K^H \supseteq K^{H'} \qquad et\ L \subseteq L' \Leftrightarrow \mathrm{Gal}(K/L) \supseteq \mathrm{Gal}(K/L').$$

4) Si L *correspond à* H *alors, pour tout* $g \in G$*,* $g(L)$ *correspond* gHg^{-1}.

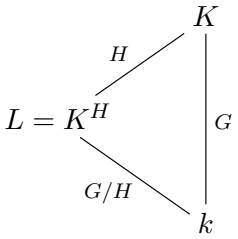
5) Soient L *un corps intermédiaire et* $H = \mathrm{Gal}(K/L)$ *; alors* L/k *est séparable et on a les équivalences*

$$L/k \textit{ galoisienne} \Leftrightarrow L/k \textit{ normale} \Leftrightarrow H \textit{ distingué dans } G.$$

Dans ce cas on a $\mathrm{Gal}(L/k) \simeq G/H$.

6) Soient L un corps intermédiaire et $H = \mathrm{Gal}(K/L)$. Alors les bijections de 3) induisent une bijection entre l'ensemble des sous-extensions $k \subseteq L' \subseteq L$ et l'ensemble des sous-groupes H' de G contenant H : en particulier il n'y a qu'un nombre fini de tels L'.

Remarque : visuellement on résume ces résultats par un diagramme



Démonstration. — L'assertion 1) est le théorème d'Artin.

2) Soient L un corps intermédiaire et $x \in K$. Par hypothèse $\mu_{x,k}$ est scindé à racines simples sur K et donc $\mu_{x,L}$ aussi et donc K/L est séparable et normale et donc galoisienne. Son groupe de Galois est clairement un sous-groupe H de G et $L = K^H$ d'après le corollaire VI.2.24 ce qui prouve 2). L'assertion 3) résulte alors de 1) et 2) et de la multiplicativité du degré.

4) Si L correspond à H alors pour tout $g \in G$, on a

$$g(L) = \{g(x) :\ h(x) = x,\ \forall h \in H\} = \{y = g(x) :\ ghg^{-1}(y) = y,\ \forall h \in H\}$$

i.e. $g(L)$ correspond à gHg^{-1}.

5) Soit L un corps intermédiaire de groupe de Galois $H = \mathrm{Gal}(L/K)$ d'après 2). Alors L/k étant séparable, elle est galoisienne si et seulement si elle est normale. Si H est distingué dans G, d'après 4) on a $g(L) = L$ pour tout $g \in G$ de sorte que pour tout $\alpha \in L$, $\mu_{\alpha,k}(X) = \prod_{\beta \in \mathcal{O}_G(\alpha)}(X - \beta)$ a toutes ses racines dans L et donc L/k est normale. Réciproquement si L/k est normale, pour $x \in L$ et $g \in G$, comme $g(x)$ est une racine de $\mu_{x,k}$ alors $g(x) \in L$ et donc $g(L) = L$ pour tout $g \in H$, de sorte que, d'après 4), H est distingué dans G. On a ainsi l'équivalence

$$L/k \text{ galoisienne } \Leftrightarrow H \text{ distingué dans } G.$$

Supposons ces conditions équivalentes vérifiées alors

$$\sharp\,\mathrm{Gal}(L/k) = [L : k] = \frac{[K : k]}{[K : L]} = \sharp G/H.$$

Par ailleurs, L étant stable sous G, l'application de restriction $g \mapsto g_{|L}$ est un morphisme de groupes dont le noyau est $\mathrm{Gal}(K/L) = H$ ce qui fournit un isomorphisme

$$G/H \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L/k).$$

Enfin 6) est une conséquence immédiate de 3). □

Remarque : la notion d'extension galoisienne est ainsi le cadre dans lequel les sous- extensions sont contrôlées par les sous-groupes de son groupe d'automorphisme. Partant d'une extension quelconque de degré fini, on aimerait ainsi la plonger dans une extension galoisienne. Une condition nécessaire d'après la proposition VI.2.5 est que l'on parte d'une extension séparable. La proposition suivante montre que cette condition est suffisante.

Proposition VI.2.31. — ***(Clôture normale)***
Soit K/k une extension de degré fini alors K est contenu dans une extension L de degré fini et normale sur k. Par ailleurs il existe à K-isomorphisme près, une unique telle extension

qui est minimale pour cette propriété appelée une clôture normale de K/k. *Si en outre K/k est séparable alors L/k est galoisienne et dite* une clôture galoisienne *de K/k.*

Remarque : en particulier si k est de caractéristique nulle, toute extension K/k de degré fini admet une clôture galoisienne.

Démonstration. — Écrivons $K = k[x_1, \cdots, x_r]$ et $P = \prod_{i=1}^{r} \mu_{x_i,k}$. Soit alors L un corps de décomposition de P sur K ; comme L est aussi un corps de décomposition de P sur k, l'extension L/k est finie et normale. Si L' est une extension intermédiaire entre K et L, normale sur k alors L' contient $x_1, \cdots, x_r$ et donc toutes les racines des $\mu_{x_i,k}$ et donc L : autrement dit L est minimale.

Soit par ailleurs E une extension de K normale sur k et minimale pour cette propriété ; E contient donc un corps de décomposition L' de P sur K et par minimalité $E = L'$. D'après l'unicité du corps de décomposition, il existe un K-isomorphisme $\tau : L \simeq E$.

Enfin si K/k est séparable alors P est séparable sur k ainsi que L le corps de décomposition de P sur k. □

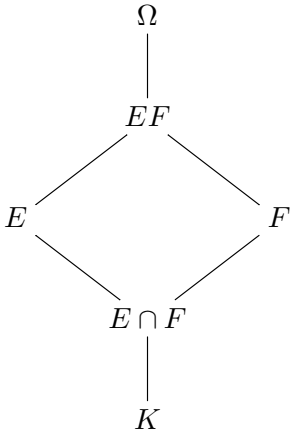
Corollaire VI.2.32. — *Soit K/k une extension séparable de degré fini. Le nombre d'extensions intermédiaires $k \subseteq L \subseteq K$ est fini.*

Démonstration. — Soit E une clôture galoisienne de K/k et G son groupe de Galois qui est donc fini. L'affirmation découle alors du fait que les extensions intermédiaires L de K/k sont en bijection avec l'ensemble des sous-groupes de G contenant $H = \mathrm{Gal}(E/K)$. □

VI.2.4. Extensions composées. — Considérons la situation suivante : K est un corps, Ω une clôture algébrique de K et soient E, F deux extensions de K contenues dans Ω.

Définition VI.2.33. — On note EF le sous-corps de Ω engendré par E et F appelé *l'extension composée* de E et F.

Remarque : en introduisant $E \cap F$, on représente la situation par le diagramme



Lemme VI.2.34. — *Si E/K est galoisienne alors EF/F est galoisienne. Si en outre F/K est galoisienne alors EF/K et $E \cap F/K$ sont galoisiennes.*

Démonstration. — Si E/K est galoisienne alors E est le corps de décomposition sur K d'un polynôme P séparable sur K et donc EF/E est un corps de décomposition sur E de P, i.e. l'extension est galoisienne.

Si en outre F est le corps de décomposition sur K d'un polynôme Q séparable sur K alors EF est le corps de décomposition sur K du polynôme PQ et donc EF/F est galoisienne.

En ce qui concerne $E \cap F/K$, il suffit de vérifier que tout K-morphisme $\sigma : E \cap F \to \Omega$ stabilise $E \cap F$, i.e. $\sigma(E \cap F) = E \cap F$. D'après le théorème VI.2.7, σ s'étend en un K-morphisme $\tau : EF \to \Omega$: comme E/K (resp. F/K) est galoisienne, alors $\tau(E) = E$ (resp. $\tau(F) = F$) et donc $\tau(E \cap F) = E \cap F$. □

Étudions à présent ce qui se passe au niveau des groupes de Galois. Supposons donc E/K galoisienne de sorte que EF/F est galoisienne : un élément $\sigma \in \mathrm{Gal}(EF/F)$ est l'identité sur F et donc sur K, i.e. $\sigma \in \mathrm{Gal}(EF/K)$. Comme E/K est galoisienne alors $\sigma(E) = E$ de sorte que σ définit un élément de $\mathrm{Gal}(E/K)$ noté $i(\sigma)$.

Proposition VI.2.35. — *L'homomorphisme i ci-dessous obtenu comme le composé*

$$\mathrm{Gal}(EF/F) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(EF/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(E/K)$$

est injectif d'image $\mathrm{Gal}(E/E \cap F)$.

Démonstration. — Si $\sigma \in \mathrm{Gal}(EF/F)$ est l'identité sur E alors σ est l'identité sur le corps engendré par E et F, i.e. sur EF, d'où l'injectivité.

Notons H l'image de i et E^H le corps associé avec donc $H = \mathrm{Gal}(E/E^H)$. On a clairement $E \cap F \subset E^H$; réciproquement E^H est l'ensemble des $x \in E$ qui sont fixés par tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(EF/F)$ et donc $x \in E \cap F$. □

Corollaire VI.2.36. — *Si E/K est galoisienne alors*

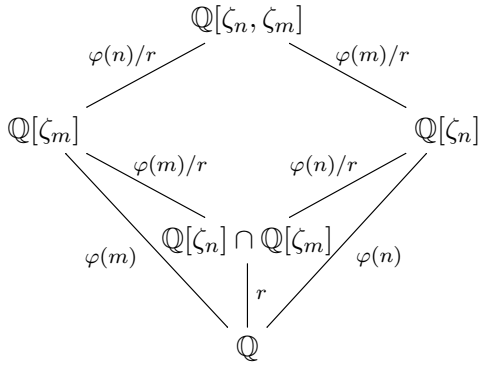
$$[EF : F] = [E : E \cap F].$$

Remarque : en particulier, si E/K est galoisienne, on a $[EF : K] = [E : K].[F : K]$ si et seulement si $K = E \cap F$.

Exemple : considérons le cas où $E = \mathbb{Q}[\zeta_n]$ et $F = \mathbb{Q}[\zeta_m]$ sont deux extensions cyclotomiques. On note $d = n \wedge m$ et $\delta = n \vee m$. Comme $\zeta_n = \zeta_\delta^{\delta/n}$ et $\zeta_m = \zeta_\delta^{\delta/m}$ alors $\mathbb{Q}[\zeta_n, \zeta_m] \subset \mathbb{Q}[\zeta_\delta]$. Inversement d'une relation de Bézout $d = un + vm$ que l'on divise par nm, on en déduit l'égalité $\zeta_\delta = \zeta_m^u \zeta_n^v$ et donc $\mathbb{Q}[\zeta_\delta] \subset \mathbb{Q}[\zeta_n, \zeta_m]$ et finalement

$$\mathbb{Q}[\zeta_n, \zeta_m] = \mathbb{Q}[\zeta_{n \vee m}].$$

En ce qui concerne $\mathbb{Q}[\zeta_n] \cap \mathbb{Q}[\zeta_m]$, des égalités $\zeta_d = \zeta_m^{m/d} = \zeta_n^{n/d}$ on en déduit que $\mathbb{Q}[\zeta_d] \subset \mathbb{Q}[\zeta_n] \cap \mathbb{Q}[\zeta_m]$. Les extensions cyclotomiques étant galoisiennes on a le schéma suivant qui résume les degrés des différentes extensions :



Comme $\delta d = nm$, l'égalité $[\mathbb{Q}[\zeta_n, \zeta_m] : \mathbb{Q}] = \varphi(\delta)$ dévient alors

$$\varphi(n)\varphi(m) = r\varphi(nm/\delta)$$

de sorte que, comme $\varphi(d)\varphi(nm/d) = \varphi(n)\varphi(m)$, on obtient $r = \varphi(d)$ et donc

$$\mathbb{Q}[\zeta_n] \cap \mathbb{Q}[\zeta_m] = \mathbb{Q}[\zeta_{n\wedge m}].$$

Considérons à présent la situation où E/K et F/K sont toutes deux galoisiennes. Notons

$$j : \mathrm{Gal}(EF/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(E/K) \times \mathrm{Gal}(F/K)$$

le morphisme déduit des morphismes surjectifs $\mathrm{Gal}(EF/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(E/K)$ et $\mathrm{Gal}(EF/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(F/K)$: comme précédemment j est injective.
Remarque : si $E \cap F = K$ alors comme $[EF : K] = [E : K].[F : K]$ on en déduit que j est aussi surjectif. Dans le cas général, les composés π_1 et π_2 de j avec respectivement $\mathrm{Gal}(E/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(E \cap F/K)$ et $\mathrm{Gal}(F/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(E \cap F/K)$, sont clairement égaux à $\mathrm{Gal}(EF/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(E \cap F/K)$ de sorte que l'image de j en contenue dans le sous-groupe

$$G = \{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathrm{Gal}(E/K) \times \mathrm{Gal}(F/K) : \ \pi_1(\sigma_1) = \pi_2(\sigma_2)\}.$$

Théorème VI.2.37. — *Soient E/K et F/K deux extensions galoisiennes. L'extension EF/K est alors galoisienne de groupe de Galois G défini ci-dessus.*

Démonstration. — Il suffit d'après ce qui précède de montrer que $\sharp G = [EF : K]$. En voyant G comme l'image réciproque de $\mathrm{Gal}(E \cap F/K)$ plongé diagonalement dans $\mathrm{Gal}(E \cap F/K) \times \mathrm{Gal}(E \cap F/K)$ par le morphisme

$$(\pi_1, \pi_2) : \mathrm{Gal}(E/K) \times \mathrm{Gal}(F/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(E \cap F/K) \times \mathrm{Gal}(E \cap F/K)$$

on en déduit que $\sharp G = [E \cap F : K].\sharp \operatorname{Ker} \pi_1 \sharp \operatorname{Ker} \pi_2$ soit

$$\begin{aligned} \sharp G &= [E \cap F : K].[E : E \cap F].[F : E \cap F] \\ &= [F : K].[E : E \cap F] \\ &= [EF : K]. \end{aligned}$$

□

Exemple : reprenons la situation où $E = \mathbb{Q}[\zeta_n]$ et $F = \mathbb{Q}[\zeta_m]$ sont deux extensions cyclotomiques. On a vu précédemment que $EF = \mathbb{Q}[\zeta_{n\vee m}]$ et que $E \cap F = \mathbb{Q}[\zeta_{n\wedge m}]$. On vérifie alors que $(\mathbb{Z}/n\vee m\mathbb{Z})^\times$ s'identifie au sous-groupe constitué des éléments $(a, b) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ tel que les images de a et b modulo d sont égales.

VI.3. Résolubilité par radicaux

VI.3.1. Introduction historique. — Étant donnée une équation de degré 2, $P(X) = X^2 + aX + b$ ses racines s'expriment selon la formule habituelle

$$x_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Pour une équation de degré 3, $X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3$, après le changement de variable $Y = X + a_1/3$, l'équation s'écrit $Y^3 + pY + q$. Les formules de Tartaglia-Cardan [1] permettent alors d'exprimer les racines en prenant des racines carrées et des racines cubiques.

1. Il semblerait que Tartaglia ait communiqué la méthode à Cardan lui faisant promettre de la garder secrète, mais ce dernier la publia en 1545.

Par exemple lorsque le discriminant $\Delta = -4p^3 - 27q^2$ est strictement négatif, l'unique racine réelle s'exprime par la formule suivante :

$$x_1 = \frac{\sqrt[3]{\frac{-27q+3\sqrt{-3\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-27q-3\sqrt{-3\Delta}}{2}}}{3}.$$

Rappelons l'idée originelle de Cardan : on cherche x sous la forme $x = u + v$ avec donc

$$u^3 + v^3 + p(u + v) + q = 0$$

et on impose la relation $3uv + p = 0$ ce qui nous amène à résoudre le système :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -(\frac{p}{3})^3 \end{cases}$$

Ainsi u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation $X^2 + qX - (\frac{p}{3})^3 = 0$, équation de degré 2 que l'on sait résoudre.

En ce qui concerne l'équation de degré 4, qui après un changement de variable affine se ramène à une équation de la forme $x^4 = px^2 + qr + r$, l'idée de Ferrari, un élève de Cardan, consiste à rajouter un paramètre supplémentaire t en écrivant $x^4 = (x^2 + t)^2 - 2x^2t^2 - t^2$ de sorte que l'équation à résoudre se réécrit

$$(x^2 + t)^2 - 2x^2t - t^2 = px^2 + qx + r \Leftrightarrow (x^2 + t)^2 = (2t + p)x^2 + qx + (t^2 + r).$$

On choisit alors une valeur de t de sorte que $(2t+p)x^2+qx+(t^2+r)$ se factorise sous la forme $(ax + b)^2$ ce qui revient à dire que le polynôme a une racine double i.e. que son discriminant $q^2 - 4(2t + p)(t^2 + r)$ est nul. On se ramène ainsi à résoudre une équation de degré 3 en t pour laquelle on dispose des formules de Cardan. On trouve donc t puis a et b qui s'exprime comme des radicaux en fonction de p, q et r. L'équation devient alors $(x^2+t) = (ax+b)^2$ que l'on résoud sous la forme $x^2 + t = \pm(ax + b)$, équations de degré 2 pour laquelle on dispose des formules habituelles.

Plus généralement pour une équation de degré n, on cherche à savoir s'il est possible de l'exprimer à partir de ses coefficients par extraction de racines d'ordre fini, i.e. à l'aide de radicaux. Avant de présenter le point de vue de Galois, mentionnons les réflexions de Lagrange (1771) sur ces questions, qui furent certainement le point de départ du travail de Galois. Lagrange fait la remarque suivante, que l'on traduit en language moderne : si $x_1, \cdots, x_n$ désignent les racines de l'équation de degré n à résoudre, dans un clôture algébrique, alors une quantité $f(x_1, \cdots, x_n)$ fonction des racines est d'autant plus simple à calculer qu'elle sera symétrique en les x_i. L'idée de Lagrange est alors de former de telles quantité suffisamment symétriques pour être calculée, mais assez complexes pour que les racines puissent se calculer à partir de ces quantités.

Voyons comment ces idées se mettent en place pour l'équation de degré 3. Notons j une racine cubique primitive de l'unité et considérons

$$u = x_1 + jx_2 + j^2x_3.$$

Regardons alors l'action de $\mathfrak{S}_3$: l'orbite de u sous les 3-cycles est donnée

$$\begin{cases} u = x_1 + jx_2 + j^2x_3 \\ u' = x_2 + jx_3 + j^2x_1 \\ v'' = x_3 + jx_1 + j^2x_2 \end{cases}$$

et on note que ces trois quantités ont le même cube. En ce qui concerne les transpositions, elles échangent u, u', u'' avec

$$\begin{cases} v = x_1 + jx_3 + j^2x_2 \\ u' = x_3 + jx_2 + j^2x_1 \\ v'' = x_2 + jx_1 + j^2x_3 \end{cases}$$

qui ont aussi le même cube. Ainsi les quantités u^3v^3 et u^3+v^3 sont symétriques et se calculent donc aisément ; on déterminera ensuite u^3 et v^3 en résolvant l'équation de degré 2 dont ils sont les racines. Enfin pour déterminer x_1, x_2, x_3, on résout le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \sigma_1 \\ x_1 + jx_2 + j^2x_3 = u \\ x_1 + jx_3 + j^2x_2 = v. \end{cases}$$

Pour l'équation de degré 4, on considère la quantité $u = x_1x_2 + x_3x_4$; l'orbite sous $\mathfrak{S}_4$ est alors de cardinal 3 :

$$\begin{cases} u = x_1x_2 + x_3x_4 \\ v = x_1x_3 + x_2x_4 \\ w = x_1x_4 + x_2x_3. \end{cases}$$

Ainsi les quantités $S = u + v + w$, $T = uv + vw + wu$ et $P = uvw$ sont symétriques et se déterminent aisément. On calcule alors u, v, w en résolvant l'équation

$$X^3 - SX^2 + TX - P = 0.$$

Ensuite pour $p_{12} = x_1x_2$ et $p_{34} = x_3x_4$, de la connaissance de leur produit et de leur somme, on les calcule via la résolution de l'équation de degré 2 associée. Puis pour $s_{12} = x_1 + x_2$ et $s_{34} = s_3 + s_4$, des équations linéaires

$$\begin{cases} s_{12} + s_{34} = \sigma_1 \\ p_{34}s_{12} + p_{12}s_{34} = \alpha \end{cases}$$

on en déduit s_{12} et s_{34} pourvu que l'on puisse calculer α, ce qui est bien le cas puisque α est symétrique. Enfin de la connaissance de s_{12} et p_{12} (resp. s_{34} et p_{34}) on en déduit x_1 et x_2 (resp. x_3 et x_4).

VI.3.2. Groupe de Galois du polynôme $X^n - a$. — Si on veut interpréter les calculs précédents en termes de groupe de Galois, la première étape est de comprendre le groupe de Galois quand on prend une racine d'un nombre. Comme Cardan l'aurait dit s'il avait disposé des nombres complexes, il est pratique de disposer dans le corps de départ des racines n-ième de l'unité ce que l'on supposera à présent. En particulier, pour $a \in k^\times$, le corps de rupture $K = k[\alpha]$ sur k de $X^n - a$ sera aussi un corps de décomposition : $\alpha^n = a$. On note G le groupe de Galois de K/k. Un élément $g \in G$ est par ailleurs caractérisé par son action sur α qui est nécessairement de la forme ζa pour ζ une racine n-ième de l'unité ; on définit ainsi une injection

$$i : G \hookrightarrow \mu_n(k) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Lemme VI.3.1. — *Le polynôme $X^n - a$ est irréductible si et seulement si a n'est pas une puissance d-ième dans k pour tout diviseur d de n distinct de* 1.

Démonstration. — Rappelons que P est irréductible si et seulement si $[K : k] = \deg P = n$ et donc si et seulement si le morphisme i ci-avant est un isomorphisme. Ainsi si P est irréductible et si $\alpha^d \in K$ alors comme $g(\alpha^d) = \alpha^d$, on en déduit que l'image de i est contenue dans $\mu_d(k)$ et

donc $d = n$. Réciproquement si P n'était pas irréductible alors G est de cardinal un diviseur strict d de n : on a alors $g(\alpha)/\alpha \in \mu_d(k)$ et donc $g(\alpha^d) = \alpha^d$ pour tout $g \in G$ soit $\alpha^d \in k$. □

Ainsi les groupes de Galois associés aux extensions $k[\alpha]/k$ avec $\alpha^n \in k$ et $\sharp\mu_n(k) = n$, sont cycliques. Le fait important est que la réciproque est vraie ce qui permet de caractériser de telles extensions en termes de théorie des groupes.

Théorème VI.3.2. — ***(Kummer)***
Soit K/k une extension galoisienne avec k contenant les racines n-ième de l'unité où $n = [K : k]$. Alors $\mathrm{Gal}(K/k)$ *est cyclique si et seulement s'il existe $a \in k$ tel que K soit le corps de rupture (et donc décomposition) de $X^n - a$.*

Démonstration. — Il reste donc à prouver la réciproque. Notons g un générateur du groupe de Galois, il vérifie donc $g^n = \mathrm{Id}$ que l'on voit comme une égalité dans $\mathcal{L}_k(K)$. Comme $X^n - 1$ est scindé sur k et à racines simples, on en déduit que l'endomorphisme g est diagonalisable ; de la formule $g(xy^{-1}) = g(x)g(y)^{-1}$, on en déduit que l'ensemble des valeurs propres est un sous-groupe de $\mu_n(k)$ qui est donc cyclique d'ordre d. Si on avait $d < n$ alors $g^d = \mathrm{Id}$ ce qui n'est pas puisque g est un générateur du groupe de Galois lequel est de cardinal n. Ainsi g admet une vecteur propre x associée à une valeur propre ζ qui est une racine primitive n-ième de l'unité. Ainsi x admet n conjugués, à savoir les $\zeta^i x$ pour $i = 0, \cdots, n-1$ et donc $K = k[x]$ avec

$$\mu_{x,k}(X) = \prod_{i=0}^{n}(X - \zeta^i x) = X^n - a,$$

avec $a \in k$. □

VI.3.3. Extensions résolubles. — Pour simplifier nous supposerons dans ce paragraphe que k est de caractéristique nulle.

Définition VI.3.3. — Une extension K/k est dite *radicale* s'il existe une suite de corps

$$k = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = K$$

telle que $K_{i+1} = K[x_i]$ avec $x_i^{n_i} \in K_i$. Elle est dite *résoluble* s'il existe une extension finie L/K telle que L/k est radicale.

Remarque : si K/k est résoluble alors tout $x \in K$ s'exprime à l'aide de fractions rationnelles et d'extractions successives de radicaux à partir d'éléments de k.
Remarque : dans la définition de résoluble, si K est contenue dans une clôture algébrique Ω de k, on peut se ramener à L contenue dans Ω.

Lemme VI.3.4. — *Soient E/K et F/K deux extensions radicales (resp. résolubles) contenues dans une clôture algébrique Ω de K ; alors l'extension composée EF/K est radicale (resp. résoluble).*

Démonstration. — Soient

$$K = E_0 \subset E_1 = E_0[x_1] \subset E_2 = E_1[x_2] \subset \cdots \subset E_n = E_{n-1}[x_n] = E$$

et

$$K = F_0 \subset F_1 = F_0[y_1] \subset \cdots \subset F_m = F_{m-1}[y_m] = F$$

telles que pour tout $i = 1, \cdots, n$ (resp. $j = 1, \cdots, m$) il existe une puissance de x_i (resp. y_j) qui appartienne à E_{i-1} (resp. F_{j-1}). Alors

$$K = E_0 \subset \cdots \subset E_n \subset EF_1 = E_n[y_1] \subset \cdots \subset EF_m = EF_{m-1}[y_m] = EF$$

réalise EF/K comme une extension radicale.

Si E/K et F/K sont résolubles, soient alors $E \subset L \subset \Omega$ et $F \subset L' \subset \Omega$ telles que L/K et L'/K sont radicales et LL'/K est radicale et contient EF/K qui est donc résoluble. □

Lemme VI.3.5. — *Soit K/k une extension finie radicale (resp. résoluble) ; sa clôture galoisienne E/k dans une clôture algébrique Ω fixée est encore radicale (resp. résoluble).*

Démonstration. — Par définition E est le sous-corps de Ω engendré par les $\sigma(K)$ pour σ décrivant les k-homomorphismes de K dans Ω. Comme K/k est radicale (resp. résoluble), l'image par σ d'une filtration $k = K_0 \subset \cdots \subset K_n = K$ comme dans la définition VI.3.3, définit une filtration de $\sigma(K)$ montrant que $\sigma(K)/k$ est radicale (resp. résoluble). Le résultat découle alors du lemme précédent. □

Théorème VI.3.6. — *Soit k un corps de caractéristique nulle ; une extension galoisienne K/k est résoluble si et seulement si son groupe de Galois est résoluble.*

Démonstration. — a) Commençons par le sens direct en supposant que K/k est *radicale* et traitons le cas où k *contient les racines de l'unité d'ordre* $[K : k]$. On raisonne par récurrence sur $[K : k]$: on note $G = \mathrm{Gal}(K/K_0)$ et $H = \mathrm{Gal}(K : K_1)$. Comme $[K : K_1]$ divise $[K : K_0]$ alors K_1 contient les racines de l'unité d'ordre $[K : K_1]$ de sorte que K_1/K est galoisienne. On applique alors l'hypothèse de récurrence à l'extension radicale galoisienne K/K_1 de sorte que H est résoluble. De la suite exacte

$$1 \to H \longrightarrow G \longrightarrow G/H \to 1$$

et du fait que, d'après le théorème VI.3.2, $G/H = \mathrm{Gal}(K_1/K_0)$ est cyclique, on en déduit que G est résoluble.

b) Traitons à présent le cas où K/k est une extension résoluble quelconque et $K \subset E$ une extension finie telle que E/k est radicale. Soit Ω une clôture algébrique de E et soit L la clôture galoisienne de E/k dans Ω de sorte que d'après le lemme précédent, L/k est radicale galoisienne. Pour se ramener au cas précédent, on note $k' \subset \Omega$ l'extension de k engendrée par une racine primitive de l'unité d'ordre $[L : k]$. D'après le lemme précédent, pour $L' = k'L$, l'extension L'/k' vérifie les conditions de a) et donc $\mathrm{Gal}(L'/k')$ est résoluble. Comme $\mathrm{Gal}(K/k)$ est un quotient de $\mathrm{Gal}(L'/k)$ il suffit de montrer que ce dernier est résoluble. De la suite exacte courte

$$1 \to \mathrm{Gal}(L'/k') \longrightarrow \mathrm{Gal}(L'/k) \longrightarrow \mathrm{Gal}(k'/k) \to 1$$

et du fait que $\mathrm{Gal}(k'/k)$ en tant que sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ pour $n = [L : k]$, est un groupe cyclique cyclique, il résulte que $\mathrm{Gal}' L'/k)$ est résoluble.

c) Étudions à présent la réciproque, i.e. on suppose que $\mathrm{Gal}(K/k)$ est résoluble. On commence par le cas où k contient les racines de l'unité d'ordre $[K : k]$ et montrons, par récurrence sur $[K : k]$, que K/k est radicale. Soit alors H un sous-groupe distingué de $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ tel que G/H soit cyclique. Ainsi l'extension galoisienne K^H/k a un groupe de Galois H qui est cyclique et comme k contient les racines d'ordre $\sharp H$, d'après VI.3.2, K^H/k est radicale. Par récurrence K/K^H est aussi radicale et donc K/k est radicale.

d) Dans le cas général, notons Ω une clôture algébrique de K et soit $k' \subset \Omega$ le corps engendré sur k par une racine de l'unité d'ordre $[K : k]$. Pour $K' = k'K$, le groupe de Galois

$\mathrm{Gal}(K'/k') \simeq \mathrm{Gal}(K/k)$ est résoluble de sorte que d'après c), K'/k' est radicale. Comme k'/k est radicale alors K'/k est radicale et K/k est donc résoluble. □

VI.4. Calculer les groupes de Galois sur $\mathbb{Q}$

On se propose dans ce paragraphe de donner différentes techniques pour calculer le groupe de Galois d'une extension galoisienne $K/\mathbb{Q}$. On a vu que K pouvait se décrire comme le corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$. En considérant $a^n P(\frac{X}{a})$, on se ramène au cas où $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire et on notera $x_1, \cdots, x_n$ les racines de P dans $K = \mathbb{Q}(x_1, \cdots, x_n)$.

VI.4.1. quand on voit les racines. — La situation favorable, similaire à celle des extensions de Kummer où $P(X) = X^n - a$, est celle où les racines de P sont explicites et où l'action des éléments du groupe de Galois se décrit explicitement.

Considérons par exemple $K = \mathbb{Q}(i + \sqrt{2})$. Vérifions tout d'abord que $K/\mathbb{Q}$ est bien galoisienne. Comme $-1/2$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sont deux extensions quadratiques distinctes de $\mathbb{Q}$ de sorte que leur composé $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ est une extension galoisienne de degré 4 de $\mathbb{Q}$ On peut décrire l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) = \{Id, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ sur i et $\sqrt{2}$:

$$\tau_1(i) = -i,\ \tau_1(\sqrt{2}) = \sqrt{2},\ \tau_2(i) = i,\ \tau_2(\sqrt{2}) = -\sqrt{2},\ \tau_3(i) = -i,\ \tau_3(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}.$$

Seul Id laisse fixe l'élément $\alpha = i + \sqrt{2}$ de L. On en déduit que le corps engendré par α est L tout entier, c'est-à-dire $L = K$.

VI.4.2. comme sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$. — Le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ permute les racines de P et, comme K est engendré sur $\mathbb{Q}$ par les racines de P, tout élément de G est complètement déterminé par son action sur les racines de P. On peut ainsi considérer G comme un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Proposition VI.4.1. — *Le groupe G vu comme sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ est contenu dans $\mathcal{A}_n$ si et seulement si le discriminant $D(P)$ est un carré dans $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. — Notons comme précédemment $\delta(P) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_i - x_j)$ de sorte que $D(P) = \delta(P)^2$. Par définition de la signature, cf. **??**, pour tout $g \in G$ on a $g(\delta(P)) = \epsilon(g)\delta(P)$ où $\epsilon(g)$ est la signature de $g \in G$ vu comme une permutation de $\mathfrak{S}_n$. Ainsi $G \subset \mathcal{A}_n$ est équivalent à demander que $\delta(P) \in \mathbb{Q}$, d'où le résultat. □

Exemple : le discriminant $P(X) = X^3 - 3X + 1$ est $-4(-3)^3 - 27 = 81 = 9^2$ et donc $G \subset \mathcal{A}_3$ de sorte que G n'étant pas trivial, $G = \mathcal{A}_3$.

Proposition VI.4.2. — *On suppose que $P \in \mathbb{Q}[X]$ n'admet que des racines simples. Alors P est irréductible si et seulement si l'action de G sur les racines de P est transitive.*

Démonstration. — Dans le sens direct, pour x_i et x_j deux racines de P, par unicité du corps de rupture il existe un $\mathbb{Q}$-isomorphisme $\sigma : \mathbb{Q}[x_i] \simeq \mathbb{Q}[x_j]$ tel que $\sigma(x_i) = x_j$. D'après **??**, cet isomorphisme se prolonge en un $\mathbb{Q}$-isomorphisme $K \simeq K$, i.e. il existe $g \in G$ tel que $g(x_i) = x_j$.

Réciproquement soit $Q = \mu_{x_1,\mathbb{Q}}$ un facteur irréductible de P annulant x_1. Pour $1 < i \leq n$, il existe $g \in G$ tel que $g(x_1) = x_i$ de sorte que $Q(x_i) = 0$ et donc $Q|P$ possède les mêmes racines que P ce qui prouve, les racines étant simples, que P est irréductible. □

Remarque : lorsque P est irréductible, comme K contient un corps de rupture $\mathbb{Q}[x_i]$, le cardinal de G est divisible $\deg P = [\mathbb{Q}[x_i] : \mathbb{Q}]$.

Corollaire VI.4.3. — *Si P est irréductible de degré p premier avec exactement deux racines non réelles alors $G \simeq \mathfrak{S}_p$.*

Démonstration. — Comme p divise $\sharp G$ et que les seuls éléments d'ordre p de $\mathfrak{S}_p$ sont les p-cycles, on en déduit que G contient un p-cycle. La conjugaison complexe définit en outre une transposition dans G. On conclut alors en utilisant que $\mathfrak{S}_p$ est engendré par un p-cycle et une transposition quelconques. □

Proposition VI.4.4. — *On suppose que P n'admet que des racines simples et que les orbites de l'action de G sur les racines de P sont de cardinal $m_1, \cdots, m_r$. Alors P se factorise sous la forme $P = P_1 \cdots P_r$ avec P_i irréductible de degré m_i.*

Démonstration. — Pour une telle orbite $\mathcal{O}$ on note $P_{\mathcal{O}} = \prod_{x_i \in \mathcal{O}} (X - x_i)$; comme $g(P_{\mathcal{O}}) = P_{\mathcal{O}}$ pour tout $g \in G$ on en déduit que $P_{\mathcal{O}} \in \mathbb{Q}[X]$. Soit alors Q une facteur irréductible de $P_{\mathcal{O}}$; les racines de Q forment alors un sous-ensemble de $\mathcal{O}$ stable sous l'action de G et donc $Q = P_{\mathcal{O}}$. □

VI.4.3. par spécialisation. — Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et $K/\mathbb{Q}$ le corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$: $K = \mathbb{Q}(x_1, \cdots, x_n)$ où $x_1, \cdots, x_n$ sont les racines de P. On note

$$A = \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n].$$

Remarque : avec les notions du §**??**, les x_i sont des entiers et A est donc un sous-anneau de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K. En particulier comme le corps des fractions de A est K, $\mathcal{O}_K$ est un A-module de type fini.

Lemme VI.4.5. — *L'anneau $\overline{A} = A/pA$ est non nul.*

Démonstration. — Dans le cas contraire il existerait $a \in A$ tel que $1 = pa$. En prenant la norme $N_{\mathbb{Q}[a]/\mathbb{Q}}$ au sens du §**??** i.e. $N(z) = \prod_{i=1}^{d} \sigma_i(z)$ où $\sigma_1, \cdots, \sigma_d$ sont les $\mathbb{Q}$-morphismes de $\mathbb{Q}[a]$ dans $\mathbb{C}$, on aurait

$$1 = N(pa) = p^d N(a) \text{ avec } N(a) \in \mathbb{Z}$$

car a est entier, ce qui est absurde. □

Remarque : comme $\mathcal{O}_K$ est un A-module fini, le discriminant D de $\mathcal{O}_K$ sur A est bien défini et pour p ne divisant pas D, les localisés en p de A et $\mathcal{O}_K$ sont alors égaux et donc en particulier pour ces premiers $A/pA \simeq \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$: moralement quitte à écarter un ensemble fini de nombre premiers, cela revient au même de travailler avec $\mathcal{O}_K$ ou avec A, cf. **??**.

Soit $\overline{\mathfrak{P}}$ un idéal maximal de $\overline{A}$ et $\mathfrak{P}$ son image inverse dans A : on a $\mathfrak{P} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Le corps $\kappa = \overline{A}/\overline{\mathfrak{P}}$ est un corps de décomposition sur $\mathbb{F}_p$ de $\overline{P}$ et donc une extension finie de $\mathbb{F}_p$.

Définition VI.4.6. — Comme le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ permute les x_i, il stabilise A et on note $D_{\mathfrak{P}}$ son sous-groupe qui stabilise $\mathfrak{P}$: $D_{\mathfrak{P}}$ est appelé *le groupe de décomposition de* $\mathfrak{P}$.

Remarque : en fait le groupe de décomposition $D_{\mathfrak{P}}$ dépend peu de $\mathfrak{P}$ mais plutôt de p. En effet si $\mathfrak{Q}$ en est un autre alors il existe $g \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tel que $\mathfrak{Q} = g(\mathfrak{P})$: dans le cas contraire on aurait $\mathfrak{Q} + g(\mathfrak{P}) = A$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ et d'après le lemme chinois, on aurait $x \in A$ tel que $x \equiv 1 \mod g(\mathfrak{P})$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ et $x \equiv 0 \mod \mathfrak{Q}$. Or la norme

$\prod_{g\in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})} g(x) \in p\mathbb{Z} = \mathfrak{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathfrak{P} \cap \mathbb{Z}$ et donc appartient également à $\mathfrak{P}$ et donc un des facteurs $g(x) \in \mathfrak{P}$ soit $x \equiv 0 \mod g^{-1}(\mathfrak{P})$, contradiction.
On en déduit alors que

$$D_{\mathfrak{Q}} = gD_{\mathfrak{P}}g^{-1}$$

en particulier si $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ est abélien alors $D_{\mathfrak{Q}} = D_{\mathfrak{P}}$ et on le note D_p.

Théorème VI.4.7. — *L'action de* $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ *sur* A *induit une action de* $D_{\mathfrak{P}}$ *sur* κ *et le morphisme induit*

$$D_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\kappa/\mathbb{F}_q)$$

est surjectif. Si $\overline{P}$ *est à racines simples dans* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *alors la flèche précédent est aussi injective.*

Démonstration. — Soit x un générateur de $\kappa/\mathbb{F}_p$ de sorte qu'un élément σ_0 de $\mathrm{Gal}(\kappa/\mathbb{F}_p)$ est déterminé par $\sigma_0(x)$. Par construction $g \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ induit une flèche surjective $A \to A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{P}$ et donc un isomorphisme

$$A/g^{-1}(\mathfrak{P}) \simeq A/\mathfrak{P},$$

avec $g^{-1}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$ si et seulement si $g \in D_{\mathfrak{P}}$. Notons $\mathfrak{Q}_1, \cdots, \mathfrak{Q}_r$ les différents idéaux de la forme $g^{-1}(\mathfrak{P})$ pour $g \notin D_{\mathfrak{P}}$. Comme les $\mathfrak{Q}_0, \mathfrak{Q}_1, \cdots, \mathfrak{Q}_r$ sont distincts deux à deux et maximaux, on a $\mathfrak{Q}_i + \mathfrak{Q}_j = A$ pour tous $i \neq j$. D'après le lemme chinois on peut donc trouver $z \in A$ tel que :

$$z \equiv x \mod \mathfrak{P}_0 \text{ et } z \equiv 0 \mod g^{-1}(\mathfrak{P}) \text{ pour } g \notin D_{\mathfrak{P}}.$$

On a alors $g(z) \in \mathfrak{P}$ pour $g \notin D_{\mathfrak{P}}$ et le polynôme

$$\prod_{g\in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})} (X - g(z)) \in \mathbb{Z}[X]$$

a son image dans $\kappa[X]$ de la forme

$$\prod_{g\in D_{\mathfrak{P}}} (X - \overline{g(z)}) \prod_{g\notin D} X.$$

Or $x = \overline{z}$ est racine de ce polynôme de sorte que

$$\mu_{x,\mathbb{F}_p}(X) = \prod_{g\in \mathrm{Gal}(\kappa/\mathbb{F}_p)} (X - \sigma(x)) \text{ divise } \prod_{g\in D} (X - \overline{g(z)})$$

et donc il existe $g \in D$ tel que $\sigma_0(x) = \overline{g(z)}$, ce qui finit de prouver la surjectivité.

Dans le cas où les racines de $\overline{P}$ sont simples alors l'application qui à une racine de P associe sa réduction modulo p définit une bijection entre les racines de P et celles de $\overline{P}$. L'injectivité découle alors du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} D_{\mathfrak{P}} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\kappa/\mathbb{F}_p) & \hookrightarrow & \mathfrak{S}(\{\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n\}) \\ \downarrow & & & \nearrow & \\ \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) & \hookrightarrow & \mathfrak{S}(\{x_1, \cdots, x_n\}) & & \end{array}$$

□

Remarque : ainsi si on a une permutation des racines de $\bar{P}$ alors il existe une permutation des racines de P du même type. En particulier si $\bar{P}$ est irréductible alors il existe un cycle de longueur n dans $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.
Remarque : notons que $\bar{P}$ a des racines simples si et seulement p ne divise pas son discriminant, autrement dit pour tout nombre premier p sauf un nombre fini, on peut définir la classe de conjugaison $(p, K/\mathbb{Q})$ du frobenius de $\mathrm{Gal}(\kappa/\mathbb{F}_p)$ dans $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ qui, d'après ce qui précède, ne dépend que du premier p considéré.

Théorème VI.4.8. — ***(Cebotarev)***
Soit C une classe de conjugaison dans $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ alors la limite de la suite

$$n \mapsto \frac{\sharp\Big\{p \text{ premier tels que } (p, K/\mathbb{Q}) = C \text{ et } p \leq n\Big\}}{\sharp\{p \text{ premiers tels que } p \leq n\}}$$

existe et vaut $\frac{\sharp C}{\sharp G}$.

Remarque : la preuve de ce résultat repose sur des techniques finies de fonctions holomorphes qui nous entraineraient trop loin d'exposer ici. Moralement ce résultat affirme qu'essayer de calculer le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ par spécialisation nous donnera rapidement la structure de cycles des différents éléments de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$; en revanche, sauf en petites dimensions ou pour de gros sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$, il est difficile de recoller ces informations locales pour reconstruire tout le groupe de Galois.
Remarque : $(p, K/\mathbb{Q})$ trivial est équivalent à demander que $\bar{P}$ soit scindé. Ainsi le théorème de Cebotarev nous dit qu'il existe une infinité de p tels que $\bar{P}$ est scindé ; évidemment ce sont les mauvais p du point de vue du calcul du groupe de Galois.

VI.4.4. Résolvantes. —

Définition VI.4.9. — Soient $F(X_1, \cdots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$, un sous-groupe $G \subset \mathfrak{S}_n$ et un polynôme unitaire $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ dont on note $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ les racines. On note alors

$$H = \mathrm{Stab}_G(F) = \Big\{\sigma \in G : \ F(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(n)}) = F(X_1, \cdots, X_n)\Big\}$$

le stabilsateur de F dans G. Alors la résolvante $\mathrm{Res}_G(F, P)$ est défini par

$$\mathrm{Res}_G(F, P)(X) = \prod_{\sigma \in G/H} (X - F(\alpha_{\sigma(1)}, \cdots, \alpha_{\sigma(n)})).$$

Remarque : dans la définition précédente σ décrit une ensemble fixé de représentants quelconque de G/H ; le résultat n'en dépend pas puisque $H = \mathrm{Stab}_G(F)$.

Proposition VI.4.10. — *Si le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(P)$ de P est conjugué dans G à un sous-groupe de $H = \mathrm{Stab}_G(F)$ alors $\mathrm{Res}_G(F, P)$ a une racine dans $\mathbb{Z}$. En outre si $\mathrm{Res}_G(F, P)$ a une racine simple dans $\mathbb{Z}$ alors $\mathrm{Gal}(P)$ est conjugué à un sous-groupe de H.*

Démonstration. — Supposons que $\mathrm{Gal}(P) = \sigma^{-1} N \sigma$ avec N un sous-groupe de H et $\sigma \in G$. Soient $\tau = \sigma^{-1}\nu\sigma \in \mathrm{Gal}(P)$ et $F(\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)})$ une des racines de $\mathrm{Res}_G(F, P)$. On a

alors :

$$\begin{aligned}\tau\ F(\alpha_{\sigma^{-1}(1)},\cdots,\alpha_{\sigma^{-1}(n)}) &= \sigma^{-1}\nu\sigma F(\alpha_{\sigma^{-1}(1)},\cdots,\alpha_{\sigma^{-1}(n)})\\ &= \sigma^{-1}\nu F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\\ &= \sigma^{-1}F(\alpha_{\nu(1)},\cdots,\alpha_{\nu(n)})\\ &= \sigma^{-1}F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\\ &= F(\alpha_{\sigma^{-1}(1)},\cdots,\alpha_{\sigma^{-1}(n)}).\end{aligned}$$

Ainsi comme $F(\alpha_{\sigma^{-1}(1)},\cdots,\alpha_{\sigma^{-1}(n)})$ est fixe par $\mathrm{Gal}(P)$, elle appartient à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{Z}$ car les α_i sont des entiers algébriques au sens de la définition **??**.

Réciproquement si $F(\alpha_{\sigma^{-1}(1)},\cdots,\alpha_{\sigma^{-1}(n)})\in\mathbb{Z}$ est une racine simple alors elle est fixe par $\mathrm{Gal}(P)$ et donc pour tout $\tau\in\mathrm{Gal}(P)$

$$\tau F(\alpha_{\sigma^{-1}(1)},\cdots,\alpha_{\sigma^{-1}(n)}) = F(\alpha_{\sigma^{-1}(1)},\cdots,\alpha_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Notons que comme $\mathrm{Stab}_G(\sigma^{-1}F)=\sigma^{-1}\mathrm{Stab}_G(F)\sigma$ alors $\mathrm{Res}_G(\sigma^{-1}F,P)=\mathrm{Res}_G(F,P)$ et donc, comme $F(\alpha_{\sigma^{-1}(1)},\cdots,\alpha_{\sigma^{-1}(n)})$ est une racine simple, alors $\tau\in\mathrm{Stab}_G(\sigma^{-1}F)=\sigma^{-1}H\sigma$ et $\mathrm{Gal}(P)\subset\sigma^{-1}H\sigma$. □

Remarque : d'un point de vue pratique, on calcule des approximations assez précises des racines de P puis des $F(\alpha_{\sigma(1)},\cdots,\alpha_{\sigma(n)})$ afin de savoir quand $\mathrm{Res}_G(F,P)$ a une racine simple dans $\mathbb{Z}$.
Exemple : soit $F(X_1,\cdots,X_n)=\prod_{i<j}(X_i-X_j)$ avec $G=\mathfrak{S}_n$. On vérifie que $H=\mathrm{Stab}_G(F)=\mathcal{A}_n$ et

$$\mathrm{Res}_G(F,P)=\Big(X-\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)\Big)\Big(X+\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)\Big)=X^2-\mathrm{Disc}(P).$$

Par hypothèse $P(X)$ est irréductible et donc $\mathrm{Disc}(P)\neq 0$; ainsi $X^2-\mathrm{Disc}(P)$ a une racine simple dans $\mathbb{Z}$ si et seulement si c'est un carré et on retrouve la condition de la proposition VI.4.1.

Le principe pour $n\leq 31$, est de lister les sous-groupes transitifs de $\mathfrak{S}_n$ et pour chacun d'entre eux de calculer un F qui le caractérise parmi ses sous- groupes, puis on calcule si la résolvante a une racine dans $\mathbb{Z}$ ou non.

VI.4.5. Théorie de Galois inverse. — Plutôt que de calculer un groupe de Galois d'une extension galoisienne, on se propose de considérer le problème dans l'autre sens : étant donné un groupe essayer de construire une extension $K/\mathbb{Q}$ dont le groupe de Galois est ce groupe. Dans la suite nous noterons $G=\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et il s'agit alors de déterminer si un groupe donné est un quotient de G.

Proposition VI.4.11. — *Tout groupe abélien fini est quotient de G.*

Démonstration. — Rappelons que le groupe de Galois de l'extension cyclotomique est $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ et, comme tout quotient du groupe de Galois d'une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ est un quotient de G, il suffit de montrer que tout groupe abélien fini est quotient de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ pour un n convenable. Rappelons aussi que si n est de la forme $p_1\cdots p_m$ où les p_i sont des nombres premiers distincts alors

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\simeq\mathbb{Z}/(p_1-1)\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}/(p_m-1)\mathbb{Z}.$$

Ainsi si $n_1,\cdots,n_m$ sont des entiers divisant respectivement $p_1-1,\cdots,p_m-1$ alors $\prod_{i=1}^m\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ est un quotient de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
Un groupe abélien fini H est un produit de groupe cyclique et donc de la forme $\prod_{i=1}^m\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$;

on choisit alors, d'après le théorème de Dirichlet, des nombres premiers $p_1, \cdots, p_m$ distincts deux à deux tels que $n_i \equiv 1 \mod p_i$ pour tout $i = 1, \cdots, m$, de sorte que H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. □

Premiers exemples non commutatifs :
- $\mathfrak{S}_3$ est le groupe de Galois de $X^3 - 2$;
- D_4 est le groupe de Galois de $X^4 - 2$;
- $\mathbb{H}_8$ est le groupe de Galois de $\mathbb{Q}\Big(\sqrt{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{6})}\Big)$.

Théorème VI.4.12. — ***(Shafarevich)***
Tout groupe fini résoluble est quotient de G.

Remarque : rappelons que d'après le théorème de Feit-Thompson, tout groupe d'ordre impair est résoluble. En outre on conjecture que tout groupe fini est quotient de G. Hilbert a démontré que les groupes alternés sont des quotients de G mais, par exemple on ne sait pas si les groupes de la forme $GL_n(\mathbb{F}_q)$ le sont.

VI.4.6. Cas d'un corps de fonctions en une variable. — Nous nous intéressons au groupe de galois de l'extension $k(t)/k$ où t est une indéterminée.

Proposition VI.4.13. — *Soit $F(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} \in k(t)$ une fraction rationnelle non constante écrite sous forme irréductible, alors*

1) F est transcendant sur k ;

2) le polynôme $P(X) - FQ(X) \in k(F)[X]$ est irréductible ;

3) $k(t)/k(F)$ est une extension finie de degré $\max(\deg P, \deg Q)$.

Démonstration. — 1) Si F était algébrique il serait solution d'une équation $X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ ce qui donnerait

$$P(t)^n + a_1 P(t)^{n-1} Q(t) + \cdots + a_n Q(t)^n = 0$$

de sorte que P (resp. Q) diviserait $a_n Q(t)^n$ (resp. $P(t)^n$) soit comme $P \wedge Q = 1$ par hypothèse, P (resp. Q) est une constante et F serait une constante ce qui est exclu par hypothèse.

2-3) Le polynôme $P(X) - FQ(X) \in k(F)[X]$ admet $t \in k(t)$ pour racine et a pour degré $d = \max(\deg P, \deg Q)$. Ainsi 3) découle de 2). Rappelons que $k[X, Y]$ est un anneau factoriel et que comme le contenu de $P(X) - YQ(X) \in k[X][Y]$ est égal à 1 alors d'après le théorème de Gauss, en tant que polynôme de degré 1 en Y, le polynôme $P(X) - YQ(X)$ est irréductible dans $k[X, Y]$ et $k(Y)[X]$. Or d'après 1) l'application $Y \mapsto F$ induit un isomorphisme $k(Y)[X] \simeq k(F)[X]$ qui envoie $P(X) - YQ(X)$ sur $P(X) - FQ(X)$ ce qui finit de prouver 2). □

Exemple : soient σ et τ les $\mathbb{C}$-automorphismes de $\mathbb{C}(t)$ définis par

$$\sigma(F(t)) = F(\zeta_n t), \quad \text{et} \quad \tau(F(t)) = F(t^{-1}),$$

où $\zeta_n = e^{2i\pi/n}$. Ils sont respectivement d'ordre n et 2 avec $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \sigma^{-1}$ de sorte que σ et τ engendrent un groupe G isomorphe au groupe diédral D_n. On note $k = \mathbb{C}(t)^G$ de sorte que $\mathbb{C}(t)/k$ est une extension galoisienne de groupe de Galois D_n. Posons

$$F(t) := t^n + t^{-n} \in \mathbb{C}(t),$$

avec $\mathbb{C}(F) \subset k$, l'égalité découlant du point 3) de la proposition précédente.

Remarque : l'extension $k(t)/k$ est de degré infini de sorte que la théorie de Galois telle qu'exposée précédemment ne s'applique pas. Notons tout de même $\mathrm{Gal}(k(t)/k)$ le groupe des k-automorphismes de $k(t)$.

Proposition VI.4.14. — *1) Pour tout* $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,k)$, *la fonction* $\phi_g : k(t) \to k(t)$ *définie par*

$$F(t) \mapsto F\Big(\frac{at+b}{ct+d}\Big)$$

est un élément de $\mathrm{Gal}(k(t)/k)$.

2) L'application $g \mapsto \phi_{g^{-1}}$ *définit un isomorphisme*

$$PGL(2,k) \simeq \mathrm{Gal}(k(t)/k).$$

Démonstration. — 1) L'application $\phi'_g : k[t] \to k(t)$ est injective car $F(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ est transcendant sur k d'après la proposition précédente. Ainsi ϕ'_g se prolonge en un morphisme injectif de $k(t)$ d'image $k(F)$ qui d'après la proposition précédente est un sous-corps de $k(t)$ de degré 1, i.e. $k(F) = k(t)$.

2) La propriété de morphisme découle de l'expression

$$\frac{a\frac{a't+b'}{c't+d'} + b}{c\frac{a't+b'}{c't+d'}} = \frac{(aa'+bc')t + (ab'+bd')}{(ca'+dc')t + (cb'+dd')}$$

et du calcul du produit matriciel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}.$$

Pour la surjectivité, soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(k(t)/k)$; pour tout $F \in k(t)$ on a alors $\sigma F(t) = F(\alpha(t))$ et en particulier, comme $k(\sigma(t)) = k(t)$, d'après la proposition précédente, $\sigma(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ avec $\max(\deg P, \deg Q) = 1$. Ainsi $\sigma(t)$ est de la forme $\frac{at+b}{ct+d}$ i.e. $\sigma = \phi_g$ pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. En ce qui concerne l'injectivité, l'égalité $\frac{at+b}{ct+d} = t$ est équivalente à $b = c = 0$ et $a = d$ d'où le résultat. □

Remarque : en ce qui concerne le problème de Galois inverse, la situation est d'autant plus simple que, pour la plupart des corps k, les sous-groupes finis de $PGL(2,k)$ sont connus. Par exemple pour $k = \mathbb{C}$, les sous-groupes finis sont :

— les groupes cycliques $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \geq 1$;
— les groupes diédraux D_n de cardinal $2n$ pour $n \geq 2$;
— le groupe $\mathcal{A}_4$;
— le groupe $\mathcal{A}_5$;
— le groupe $\mathfrak{S}_5$.

En outre deux tels sous-groupes abstraitement isomorphes sont en fait conjugués dans $PGL(2,\mathbb{C})$. Pour les familles infinies nous avons déjà donnés une description explicite d'une extension associée. Pour les autres, en utilisant les polyèdres réguliers qui leur sont associés, on construit des extensions explicites : ainsi pour $\mathfrak{S}_4$ on obtient $\mathbb{C}(\frac{(t^8+14t^4+1)^3}{t^4(t^4-1)^4})$. Le fait que l'extension soit monogène est même plus générale comme l'affirme le théorème suivant.

Théorème VI.4.15. — ***(de Lüroth)*** *Soit K/k une extension intermédiaire de $k(t)/k$; il existe alors $F \in k(t)$ tel que $K = k(F) \simeq k(t)$.*

Démonstration. — On suppose que $K \neq k$ et soit $F \in K - k$. Comme $k(F) \subset K$ et que t est algébrique sur $k(t)$ d'après la proposition VI.4.13, on en déduit que $k(t)/K$ est algébrique et que K/k n'est pas de degré fini. Soit $P(X)$ le polynôme minimal de t sur K

$$X^n + F_1(t)X^{n-1} + \cdots + F_n(t).$$

On écrit chaque F_i sous forme irréductible $P_i(t)/Q_i(t)$; en multipliant P par le ppcm des Q_i, on obtient un polynôme annulateur de t

$$P(X,t) = a_0(t)X^n + \cdots + a_n(t) \in k[t][X].$$

Comme t n'est pas algébrique sur k, l'un des $a_i(t)/a_0(t)$ n'est pas constant et posons

$$A(X,T) = a_0(T)a_i(X) - a_i(T)a_0(X) \in K.$$

Comme $A(X,t) = 0$ on en déduit que $P(X,t)$ divise $A(X,t)$ dans $k(t)[X]$ et comme le contenu de $A(X,t)$ dans $k[t]$ est égal à 1 alors il existe $B(X,t) \in k[X,t]$ tel que

$$A(X,t) = P(X,t)B(X,t) \text{ dans } k[t,X].$$

Par ailleurs $\deg_t a_i$ et $\deg_t a_0$ sont inférieurs ou égaux à $\deg_t P$ et comme $\deg_t(a_0(t)a_i(X) - a_i(t)a_0(X)) = \deg_t B + \deg_t F$, on en déduit que $\deg_t B = 0$ et donc $B(X,t) = B(X)$. Or $a_0(t)a_i(X) - a_i(t)a_0(t)$ est symétrique en t et X et est donc aussi divisible par $B(t)$. Ainsi $B(t)$ divise $B(X)P(X,t)$ et comme $B(t) \wedge B(X) = 1$, on en déduit que $B(t)$ divise $P(X,t)$ ce qui impose que $B(t)$ est un polynôme constant. Ainsi $P(X,t)$ est aussi symétrique ne X et t et donc $\deg_X P = \deg_t P = n$.

On a ainsi $k(\frac{a_i}{a_0}) \subset K$ avec $[k(t) : k(\frac{a_i}{a_0})] = n = [k(t) : K]$ de sorte que $K = k(\frac{a_i}{a_0})$, d'où le résultat. □

Remarque : signalons que le théorème de Lüroth en vrai en dimension 2 pour $\mathbb{C}(t_1, t_2)$ mais ne l'est plus en dimension 3.