Feuille de TD 2

Exercice 1. — *Déterminer les nombres premiers p tels que $p+2$ et $p+4$ soient premiers.*

Exercice 2. — *Déterminer les nombres premiers p tels que p divise 2^p+1.*

Exercice 3. — *Soit p un nombre premier impair. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que p divise $n2^n+1$.*

Exercice 4. — *Soient $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge n = 1$. Montrer que n est premier si et seulement si*

$$(X+a)^n \equiv X^n + a \mod n.$$

Exercice 5. — *On rappelle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$.*

(1) On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $e = a/b$ ($b \neq 0$ avec a et b premiers entre eux). En étudiant $\alpha = (k!)(e - u_k)$ pour $k > b$, montrez que l'on aboutit à une contradiction.

(2) Montrez que e n'est pas racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients rationnels.

(3) Montrez que $e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}}$ est irrationnel.

(4) Montrez que e^2 n'est pas racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients rationnels.

(5) Montrez que $e^{\sqrt{3}}$ est irrationnel.

(6) Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée de nombres entiers ; montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $N > 0$ tel que $b_n = 0$ pour tout $n \geq N$;

(ii) le nombre $\nu_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!}$ est rationnel ;

(iii) Le nombre $\nu_2 = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n 2^n}{n!}$ est rationnel.

Exercice 6. — π^2 **est irrationnel** *: Soit $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$.*

(a) Montrez que pour tout $m \geq 0$, $f_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$.

(b) On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}$ premiers entre eux et $b \neq 0$ tels que $\pi^2 = a/b \in \mathbb{Q}$ et on pose

$$G_n(x) = b^n[\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)].$$

Montrez que $G_n(0)$ et $G_n(1)$ sont des entiers.

(c) Montrez que

$$\pi \int_0^1 a^n \sin(\pi x) f_n(x) dx = G_n(0) + G_n(1)$$

et conclure.

1 Le seul nombre premier vérifiant la condition de l'énoncé est 3. En effet, soit p un nombre premier tel que $p+2$ et $p+4$ soient premiers. Si l'on a $p \equiv 1 \mod 3$, (resp. $p \equiv 2 \mod 3$), alors $p+2$ (resp. $p+4$) est divisible par 3. Les entiers $p+2$ et $p+4$ étant distincts de 3, on a donc $p \equiv 0 \mod 3$, puis $p = 3$. Par ailleurs, 5 et 7 sont premiers.

2 Il n'y a que $p = 3$. En effet, soit p un nombre premier divisant $2^p + 1$. D'après le petit théorème de Fermat, p divise $2^p - 2$, d'où $p = 3$.

3 Les entiers n de la forme $(p-1)(1+kp)$, où k est un entier naturel, conviennent. En effet, pour un tel entier n, on a $n \equiv -1 \mod p$. Par ailleurs, $p-1$ divise n et l'on a $2^{p-1} \equiv 1 \mod p$, donc on a $2^n \equiv 1 \mod p$. Il en résulte que $n2^n + 1 \equiv 0 \mod p$, d'où le résultat.

4 On a déjà vu que pour p premier et pour tout $1 \leq k < p$, le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ est divisible par p. Il reste donc à étudier la réciproque. Supposons donc que pour tout $1 \leq i \leq n-1$, on ait $\binom{n}{i} \equiv 0 \mod n$. Regardons alors les congruences modulo n des $\binom{n-1}{i}$. Pour $i = 1$, on a $\binom{n-1}{1} = n - 1 \equiv -1 \mod n$. De la formule de Pascal

$$\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i+1} = \binom{n}{i+1}$$

et de l'hypothèse $\binom{n}{i} \equiv 0 \mod n$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, on en déduit par une récurrence simple que pour tout $1 \leq i \leq n-1$

$$\binom{n-1}{i} \equiv (-1)^i \mod n.$$

Soit alors d un diviseur strict de n. Rappelons la relation $d\binom{n}{d} = n\binom{n-1}{d-1}$ que l'on interprète combinatoirement comme le nombre de choisir d personnes parmi n et de nommer un chef parmi eux : pour ce faire on peut soit commencer par choisir le groupe puis le chef, ou inversement choisir le chef puis le reste du groupe. D'après ce qui précède on doit donc avoir

$$\binom{n}{d} \equiv 0 \mod n \quad \text{et} \quad \frac{n}{d}\binom{d-1}{n-1} = \frac{n}{d}(-1)^{d-1},$$

soit $\frac{n}{d}(-1)^{d-1} \equiv 0 \mod n$ ce qui n'est possible que pour $d = 1$, i.e. n ne possède qu'un unique diviseur strict et est donc premier.

5 Comme d'habitude, l'argument final proviendra du fait élémentaire suivant : toute suite d'entiers relatifs qui converge vers 0 est nulle à partir d'un certain rang. Dans cet exercice le schéma de la preuve est le suivant : soit à montrer qu'une série convergente $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est irrationnel. On raisonne par l'absurde et on écrit pour une suite $k(N)$ d'entiers strictement croissante

$$\frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{k(N)} u_n = \sum_{n>k(N)} u_n \tag{1}$$

égalité que l'on multiplie par un entier a_N tel que

(a) $a_N p/q \in \mathbb{Z}$;

(b) $a_N u_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n = 0, \cdots, k(N)$;

(c) $(a_N \sum_{n>k(N)} u_n)_N$ est une suite $(r_N)_N$ de réels non nuls telle qu'il existe N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$, $|r_N| < 1$.

La contradiction découle alors du fait que le membre de gauche de (1) est une suite d'entiers qui, au vu du membre de droite, à partir d'un certain rang et non nulle et de valeur absolue strictement plus petite que 1 ce qui est impossible.

Remarque : afin d'assurer la dernière condition de (c), on pourra se ramener à une suite convergeant vers 0. En ce qui concerne la condition (a), il suffit de multiplier a_N par q ce qui ne modifie pas les conditions (b) et (c).

(1) La suite considérée est $u_n = \frac{1}{n!}$. On prend $k(N) = N$ et $a_N = N!$; les conditions (a) et (b) sont évidentes. En ce qui concerne (c), la non nullité découle du fait que l'on a une série à termes strictement positifs ; la majoration suivante

$$r_N = (N+1)^{-1} + (N+1)^{-1}(N+2)^{-1} + \cdots \leq \sum_{i=1}^{+\infty}(N+1)^{-i} = 1/N$$

montre la convergence de r_N vers 0 d'où le résultat.

(2) Si e est solution d'une équation de degré 2 alors il existe $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $ae + \frac{b}{e} = c$; quitte à multiplier cette équation par -1, on suppose $a > 0$. La suite considérée est alors $u_n = \frac{a+(-1)^n b}{n!}$ avec $p = c$ et $q = 1$. Si b est négatif (resp. positif), on prend $k(N) = 2N$ (resp. $k(N) = 2N+1$) avec $a_N = k(N)!$. Les conditions (a) et (b) sont évidentes ; la non nullité de r_N découle du fait que comme la suite $\frac{(-1)^n}{n!}$ vérifie le critère des séries alternée, $\sum_{n>k(N)} b\frac{(-1)^n}{n!}$ est du signe de $b(-1)^n$ est donc strictement positif. En ce qui concerne la convergence vers 0, le résultat découle de la majoration $|\frac{a+(-1)^n b}{n!}| \leq \frac{|a|+|b|}{n!}$ et on conclut comme dans (1).

(3) On a

$$\frac{e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$$

ce qui nous amène à considérer $u_n = \frac{2^n}{(2n)!}$. On pose $k(N) = N$ et $a_N = q\frac{(2N)!}{2^N}$. La condition (a) est claire tandis que pour (b) cela découle de l'égalité pour tout $0 \leq m \leq N$,

$$\frac{(2N)!}{2^{N-m}(2m)!} = \frac{N!}{m!}(2m+1)\cdots(2N-1) \in \mathbb{N}.$$

En ce qui concerne (c), la non nullité découle du fait que la série est à termes positifs et la convergence vers 0 découle de la majoration grossière $\frac{2^k(2N)!}{(2n+2k)!} \leq (N+1)^k$ et du fait que $\sum_{k=1}^{\infty}(N+1)^{-k} = 1/N$.

(4) Il suffit de montrer comme dans (c) qu'une égalité de la forme $ae^2 + be^{-2} = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$ est impossible. A l'image de (2), on considère $u_n = \frac{a+(-1)^n}{n!}2^n$. On suppose $a > 0$ et on pose pour $b < 0$ (resp. $b > 0$) $k(N) = 2^N$ (resp. $k(N) = 2^n + 1$). On rappelle que la valuation 2-adique de $n!$ est égale à

$$v_2(n!) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2^3} \rfloor \cdots < n$$

de sorte que pour $n = 2^i$ (resp. $n = 2^i + 1$), on a $v_2(n!) = n - 1$ (resp. $v_2(n!) = n - 2$). On pose alors $\frac{2^n}{n!} = \frac{2^{\alpha_n}}{p_n}$ avec donc $\alpha_n > 0$ égal à 1 (resp. 2) si $n = 2^i$ (resp. $n = 2^i + 1$) ; notons par ailleurs que si $n > m$ alors $p_m | p_n$. On pose alors $a_N = 2^i\frac{k(N)!}{2^{k(N)}}$ avec $i = 0$ (resp. $i = 1$) si $b < 0$ (resp. $b > 0$). La condition (a) est clairement vérifiée tandis que (b) découle du fait que $2^i\frac{k(N)!}{2^{k(N)}}\frac{2^n}{n!} \in \mathbb{Z}$ d'après la discussion précédente. La non nullité dans (c) découle du théorème des séries alternées qui nous dit que $b\sum_{n>k(N)} \frac{(-2)^n}{n!}$ est du signe de $b(-1)^{k(N)}$ et donc strictement positif, cf. (2). En ce qui concerne la convergence vers 0 elle découle de la majoration grossière $\frac{2^r}{(k(N)+1)\cdots(k(N)+r)} \leq (\frac{k(N)}{2})^{-r}$ avec $\sum_{r\geq 1}(\frac{k(N)}{2})^{-r} = (k(N)/2-1)^{-1}$ qui tend bien vers 0 quand N tend vers l'infini.

(5) Comme dans (3), on montre l'irrationnalité de

$$\frac{e^{\sqrt{3}}+e^{-\sqrt{3}}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$$

ce qui nous amène à considérer $u_n = \frac{3^n}{(2n)!}$. Contrairement à ce qui se passait dans (3), $\frac{(2N)!}{3^N}\frac{3^m}{(2m)!}$ pour $m < N$ n'est pas forcément entier ; évidemment pour tout $p \neq 3$, la valuation p-adique de ce rationnel est positive, mais pour $p = 3$ il est possible quelle soit négative. L'idée est donc de rendre la valuation 3-adique de $(2N)!$ maximale et donc de prendre $k(N) = 3^N$. En effet comme dans (4), on a :

$$v_3((2n)!) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + \lfloor \frac{2n}{3^2} \rfloor + \lfloor \frac{2n}{3^3} \rfloor \cdots < n,$$

et pour $n = 3^N$, on obtient $v_3((23^N)!) = 3^N - 1 = k(N) - 1$. On écrit alors pour tout n, $\frac{3^n}{(2n)!}$ sous la forme $\frac{3^{\alpha_n}}{p_n}$ avec $3 \wedge p_n = 1$ et $\alpha_n > 0$; par ailleurs on a $p_m|p_n$ pour tout $m < n$. Ainsi pour $a_N = q\frac{(23^N)!}{3^{3^N}}$, les conditions (a) et (b) sont clairement vérifiées. En ce qui concerne (c), la non nullité découle de la positivité des u_n et en ce qui concerne la convergence elle découle de la majoration grossière

$$\frac{3^k}{(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+2k-1)(2n+2k)} \leq \frac{1}{n^{2k}}.$$

(6) L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) et (iii) est évidente tandis que (ii) $\Rightarrow$ (i) découle comme dans (1) du procédé général pour $u_n = b_n/n!$ avec $k(N) = N$ et $a_N = N!$.

L'implication (iii) $\Rightarrow$ se montre selon le même procédé : pour $u_n = b_n 2^n/n!$ on pose $k(N) = 2^N$ avec $a_N = qk(N)!/2^{k(N)}$. La condition (a) est claire tandis que (b) se prouve comme dans (4), en remarquant que $\frac{k(N)!}{2^{k(N)}}\frac{2^n}{n!} \in \mathbb{Z}$. La condition de non nullité dans (c) découle du fait que la série est à termes positifs tandis que la convergence vers 0 se prouve comme dans (4).

6 (a) $f_n^{(m)}(0) = 0$ pour $m < n$ et $m > 2n$. En écrivant $x^n(1-x)^n = \sum_k c_k x^k$, on a $f^{(m)}(0) = \frac{m!}{n!}c_m$ pour $m \geq n$.

(b) En remarquant que $f_n(1-x) = f_n(x)$ on a le même résultat en 1 d'où le résultat.

(c) C'est une simple intégration par parties et la conclusion découle de la majoration de l'intégrale par $\pi a^n/n!$ dont la limite est nulle pour n tendant vers l'infini ($0 < f(x) \leq 1/n!$). Un entier plus petit que 1/2 est nul ce qui ne se peut pas car l'intégrale n'est pas nulle pour n fixé.