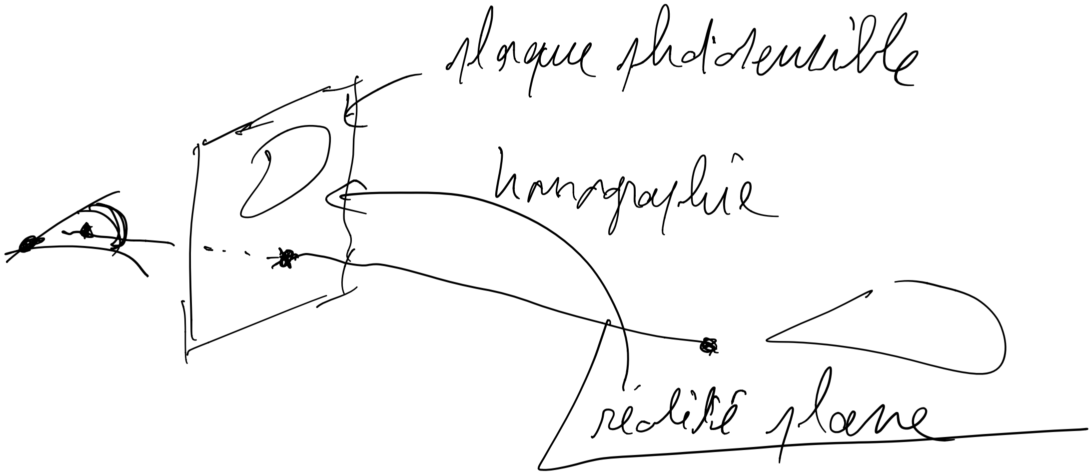
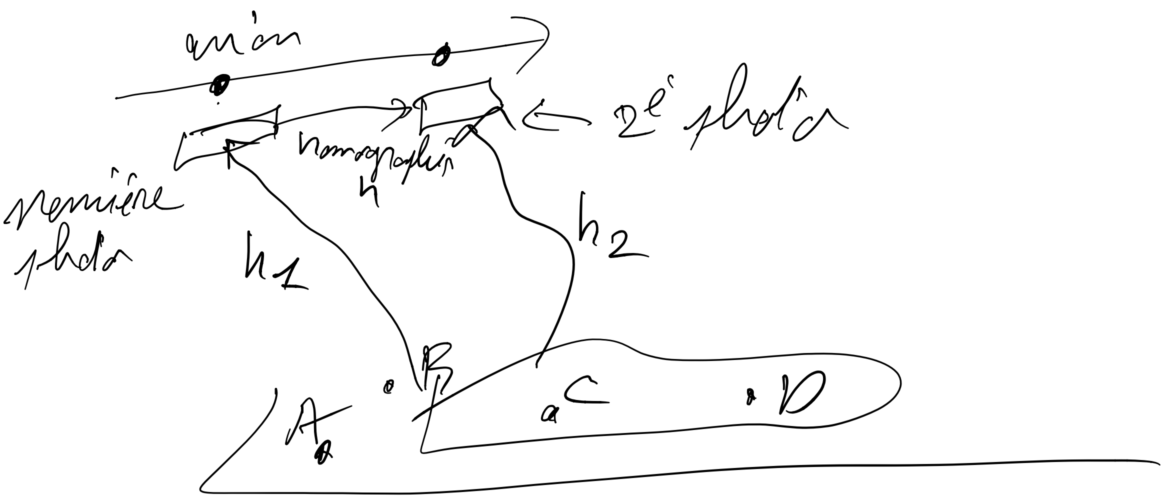
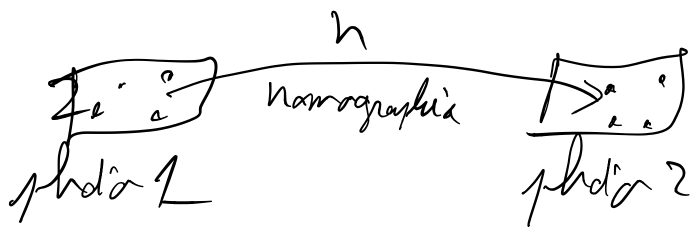
Cours géo proj 3

Applications à la photographie



1 Photographies aériennes





on repère 4 pts (3 non alignés (⇒ repère)
sur les 2 photos

on connaît h ⟹ $\boxed{\text{on peut recoller les photos}}$

<u>rem</u> : ⚠ la Terre n'est pas plate
⚠ la réalité n'est pas plane

② Position du photographe

<u>données</u> 1 photo et un plan de la ville

- on repère sur la photo à <u>l'arrière plan</u> 5 points caractéristiques
(ex : la tour Eiffel, Sacré Cœur ...)

• on les repère sur le plan

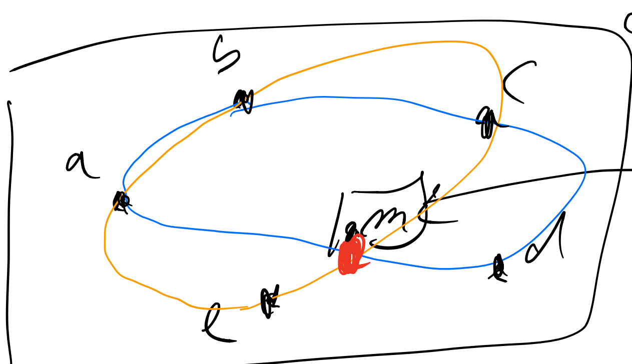
$\boxed{a, b, c, d, e}$ → photo a', b', c', d', e'
plan

$\boxed{\text{Sur la photo:}}$

• a', b', c', d', e' ∈ "alignés sur" la droite de l'horizon
"
$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

→ $[a', b', c', d'] = \rho_1$
$[a', b', d', e'] = \rho_2$
~~dans~~ mesurant les distances sur la photo

$\boxed{\text{Sur le plan}}$ réalité $\xrightarrow{h}$ photo
h
"
homographie
conserve les birapports



plan

m^* $\not\in [(ma),(mb),(mc),(md)] = \rho_1$

$\Updownarrow$

m appartient à la conique passant a,b,c,d

$\not\in [(ma),(mb),(mc),(me)] = \rho_2$

$\Updownarrow$

m appartient à la conique passant par a,b,c,e

P : $E^{\dim 3}$, $P(E)$

Retour sur les coniques projectives

Γ = conique $\qquad$ D = droite

$\boxed{\Gamma \cap D}$ $\qquad$ $a, b \in D$ $\qquad$ $m \in D$

$\boxed{F \text{ plan de } E}$

$\vec{a} \quad \vec{b} \qquad$ "$\lambda a + \mu b$" $= 2\lambda a + 2\mu b$

$\Gamma = V(q)$ $\qquad$ $q(\lambda a + \mu b) = \lambda^2 q(a) + 2\lambda\mu\,\varphi(a,b) + \mu^2 q(b)$

$q(a) = \varphi(a,a)$

- $q(a) = q(b) = \varphi(a,b) \iff D \subset \Gamma$

$q|_F$ est nul

$\Rightarrow q$ est dégénérée

• sinon $\cancel{q(a)}$ $q(a) \neq 0$

$\Rightarrow \mu \neq 0 \Rightarrow \underline{\mu = 1}$

$\lambda^2 q(a) + 2\lambda \varphi(a,b) + q(b) = 0$

$\rightarrow$ <u>au plus 2 solutions</u>

* 1 solution (double) $\Leftrightarrow q(a)q(b) - \varphi(a,b)^2 = 0$

$\Leftrightarrow q_{|F}$ de discriminant nul

$\Leftrightarrow$ F est isotrope

$(\exists x \mid q(x) = 0)$

Conique duale q^* de $\mathbb{P}(E^*)$ $\leftarrow$ $\Leftrightarrow$ <u>D est tangente à Γ</u>

* <u>2 solutions</u> $\neq$ $\Leftrightarrow$ D est sécante

$\Leftrightarrow \underline{\varphi(a,b)^2 - q(a)q(b) \in K^{*2}}$

* <u>0 solutions</u> $\Leftrightarrow$ D est extérieure à Γ

$\Leftrightarrow \varphi(a,b)^2 - q(a)q(b) \notin K^{*2}$

cf plus loin la notion de polaire

Classification projective

$PGL(E)$ $\quad \overline{\dim E = 3}$ $\quad \bar{u} \in GL(E)/K^*$, $\bar{q} \in Q(E)/K^*$

$$\bar{u} \cdot \bar{q} := \overline{q \circ u^{-1}}$$

<u>rem</u>: $V(\bar{u} \cdot \bar{q}) = \bar{u}(V(\bar{q}))$

On dit que q, q' sont projectivement équivalentes si q et q' sont dans la même orbite
($\exists u$ tq $\bar{q}' = \bar{u} \cdot \bar{q}$)

⚠ $\cancel{\Leftarrow}$ $V(\bar{q}') = \bar{u} \cdot V(\bar{q})$ (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ OK)

$\boxed{\text{Cas où } q \text{ est dégénérée}}$ ($\operatorname{rg} q < 3$)

$\Leftrightarrow$ $\Gamma = V(q)$ est impropre

- <u>$\operatorname{rg} q = 1 = \operatorname{rg} q'$</u> $\Rightarrow q \sim q'$

$(\Rightarrow (e_1, e_2, e_3)$ base de E $\quad (e_2, e_3) = \ker q$

$q(x,y,z) = \lambda x^2$

$V(\bar{q})$ = une droite double

• $\underline{rg(q) = rg(q') = 2}$ $\qquad E/\ker q \rightsquigarrow \tilde{q}$

$E/\ker q' \rightsquigarrow \tilde{q}'$

$q \sim q' \iff \tilde{q}$ et $\tilde{q}'$ ont m̂ discriminant

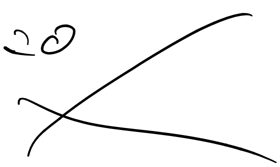
(e_1, e_2, e_3) base de E $\qquad \ker q = \langle e_3 \rangle$

$q(x,y,z) = \lambda x^2 + \mu y^2 \qquad \lambda\mu \neq 0$

$\rightsquigarrow x^2 - \alpha y^2 = q$

• disc $q = 4\alpha \in K^*/K^{*2}$

(i) $\alpha = \beta^2 \rightarrow (x - \beta y)(x + \beta y) = 0$



2 droites

(ii) $\alpha \notin K^{*2} \qquad V(q) = \{(0,0,1)\}$

$\boxed{\text{Cas non dégénéré} \quad rg\, q = 3}$ $\qquad \Gamma = V(q)$

rem : $a, b, d \in \Gamma$

T_a = tg^{te} à Γ en a $\qquad T_a \cap T_b = \{c\}$

T_b = tg à Γ en b

alors (a, b, c, d) repère projectif

en effet : • a, b, d pas alignés
car $\forall D \quad \# \Gamma \cap D \leq 2$

• $d \notin T_a$
$d \notin T_b$

| a, c, d pas alignés
| b, c, d ″
| a, b, c ″

Fait : dans le repère (a, b, c, d) [feuille 1 + bas]

q a pour équation $\boxed{Z^2 - XY = 0}$

dem : $q = uX^2 + vY^2 + wZ^2 + 2u'YZ + 2v'ZX + 2w'XY$

– – – – – – –

Prop : $\exists$ une unique orbite de conique projective propre

Γ dém : Γ et Γ'

$$(a,b,c,d) \xleftrightarrow{u} (a',b',c',d')$$

$$\boxed{Y^2 - XT} \longleftrightarrow Y'^2 - X'T'$$

$P(E)$ Γ conique propre $\boxed{Y^2 - XT}$

D = droite de l'infini $\qquad U = P(E) \setminus D$ affine

- D = tangente à Γ $\quad$ ex : $T = 0$

  $(x, y, 1) \in U$ $\quad x = y^2$ parabole

- D = sécante $\quad$ ex : $Y = 0$

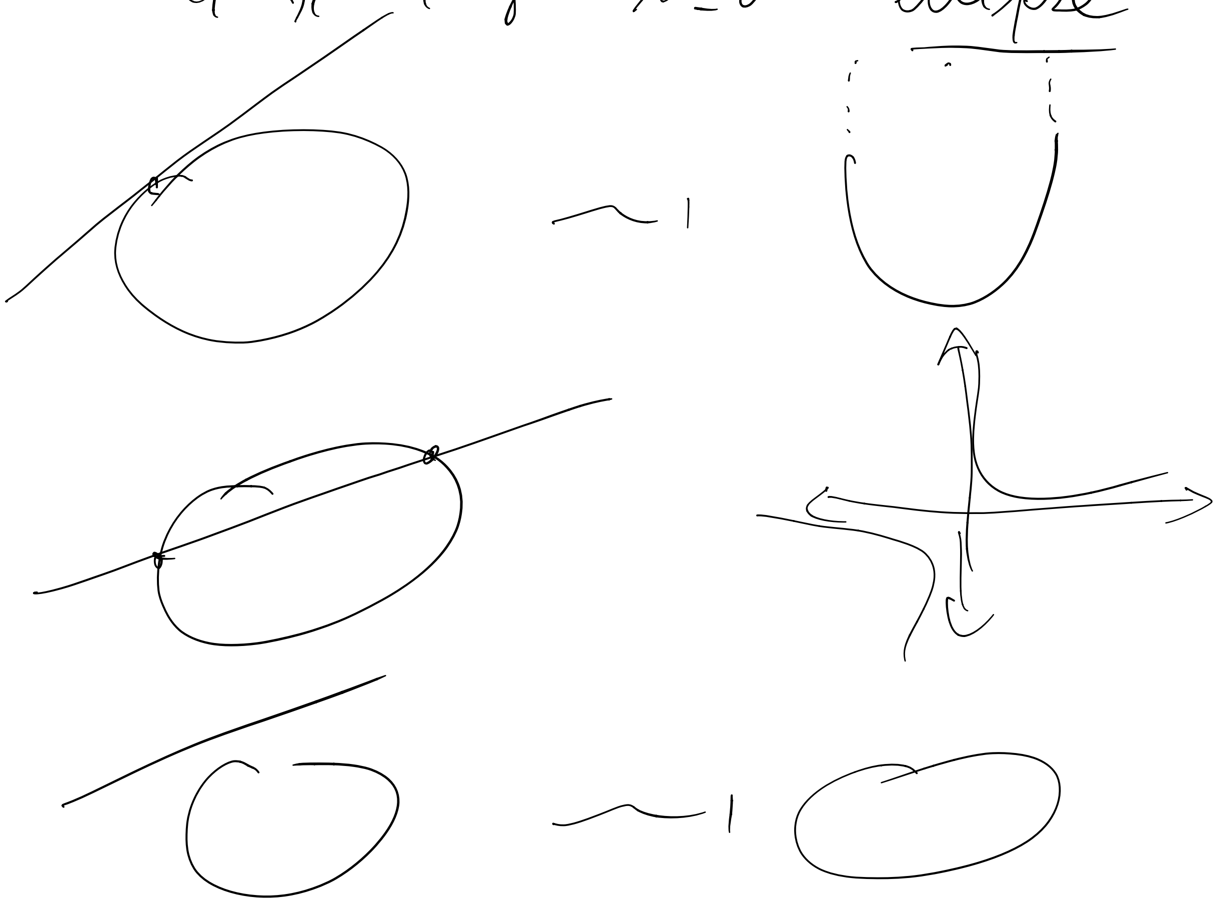
  $U = \{(x, 1, t)\} \to xt = 1$

  hyperbole

- D extérieure $\quad X + T = 0 \qquad$ Cur $\mathbb{R}$

$T' = X + T \qquad X' = X \qquad Y' = Y$

$\rightsquigarrow \; x'^2 + y'^2 - x' = 0$ ellipse



Poles et Polaires

q tq $rg(q) = 3 \longleftrightarrow \varphi$ sur $E \simeq E^*$
canonique

$a \in \mathbb{P}(E) \longleftrightarrow K\vec{a} \subset E$

$\uparrow \qquad\qquad \varphi \uparrow$

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad \perp$

droite de $\mathbb{P}(E) = a^\perp$ $\longleftrightarrow$ $\langle \vec{a} \rangle^\perp$ plan de E

Def : • $a^\perp$ = polaire du point a

droite projection

• D droite proj $D = a^\perp$ et a = pôle de D

rem : $a \in D \iff D^\perp \in a^\perp$

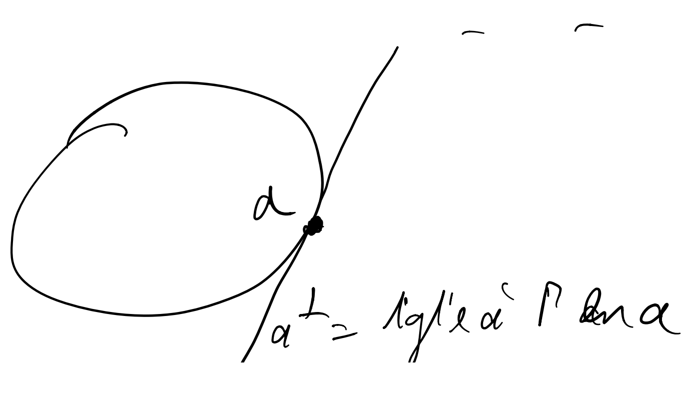
Prop : $\mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{P}(E^*)$

$a \longmapsto a^\perp$ = droite de $\mathbb{P}(E)$ = point de $\mathbb{P}(E^*)$

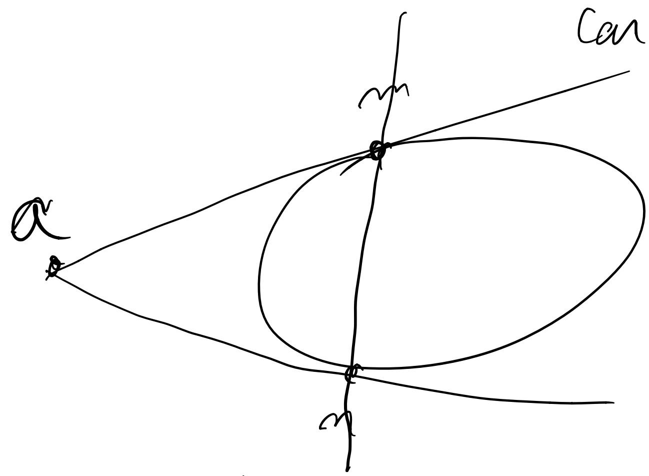
c'est une homographie

dem : c'est clair $a \mapsto f_a : x \mapsto \varphi(a,x)$

dessins :



car $a \in a^\perp$



$(am) = m^\perp$
$(an) = n^\perp$

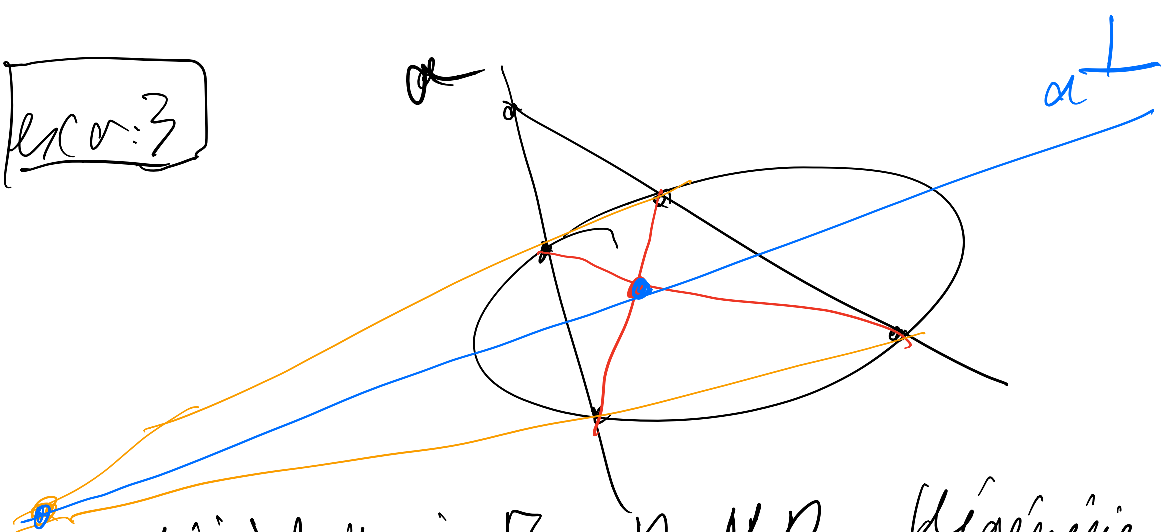
$a \in m^\perp$ $\qquad \leadsto \qquad$ $m \in a^\perp$ $\Rightarrow a^\perp = (mn)$
$a \in n^\perp$ $\qquad\qquad\qquad$ $n \in a^\perp$

Déf : | a est dit extérieur à Γ si $a^\perp$ = sécante de Γ

⇕

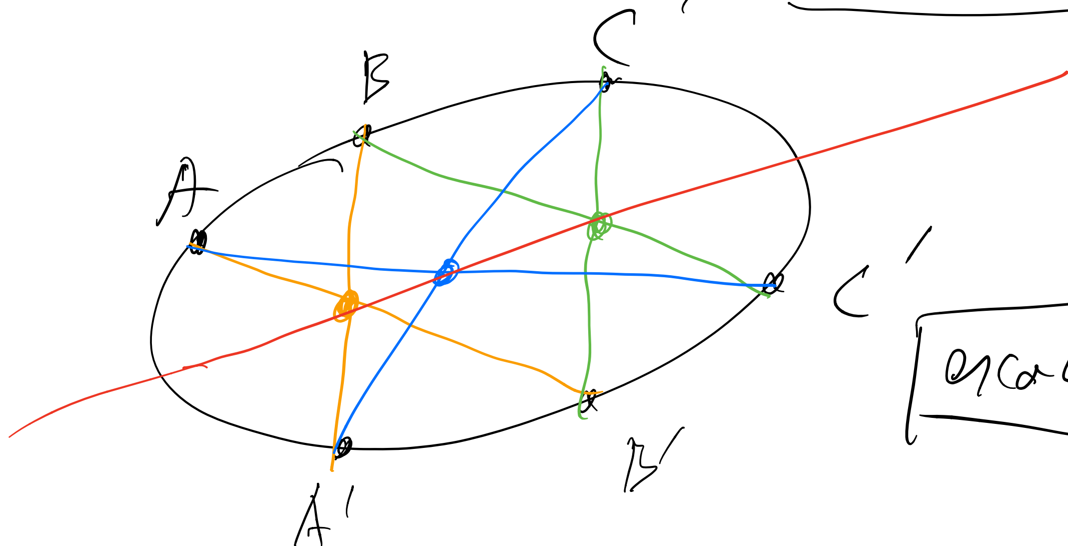
on peut mener 2 tangentes à Γ issues de a

$\boxed{\text{exo : 3}}$



déjà fait si $\Gamma = D_1 \cup D_2$ (dégénérée $rg = 2$)

↪ <u>Pappus</u> $\Longrightarrow$ <u>Thm de Pascal</u>

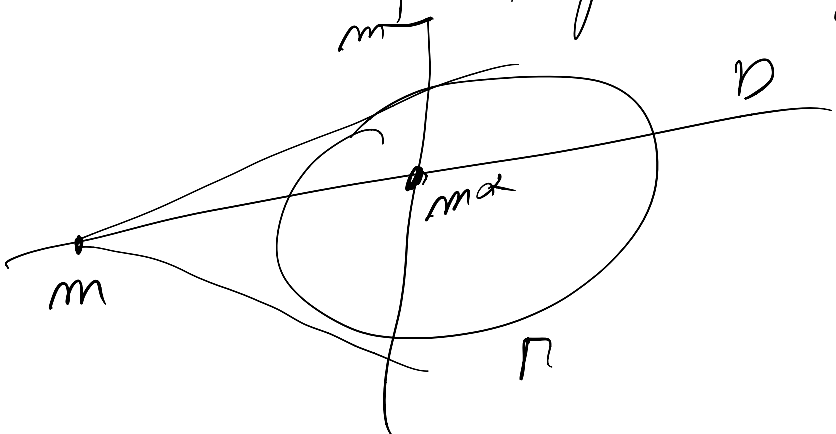


$\boxed{\text{exo 4}}$

<u>Def</u> : q conique propre $\rightsquigarrow \Gamma = V(q)$

D = droite proj

Hyp : D n'est pas tangente à Γ



$$D \longrightarrow D$$

$$m \longmapsto m^* = \text{conjugué de } m \,/\, \Gamma$$

(cf exo 2)

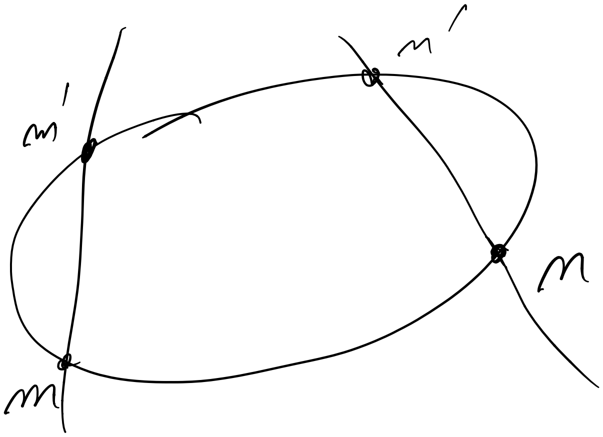
Prop : $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$, $m \longmapsto m^{\times}$ c'est une homographie involutive

dem :

$$\underset{P(E)}{\mathcal{D}} \xrightarrow{\text{homographie}} P(E^{*}) \xrightarrow{\text{incidence = homographie}} \mathcal{D}$$

$$m \longmapsto m^{\perp} \longrightarrow m^{\times} = \mathcal{D} \cap m^{\perp}$$

Conique propre = droite projective



droite proj

$$\overset{\shortparallel}{m^{*}} \xrightarrow{\Pi_m} \Gamma$$

$$D \longmapsto \underset{m'}{D \cap \Gamma} = \{m, m'\}$$

$\Rightarrow$ Γ est muni d'une structure de droite proj

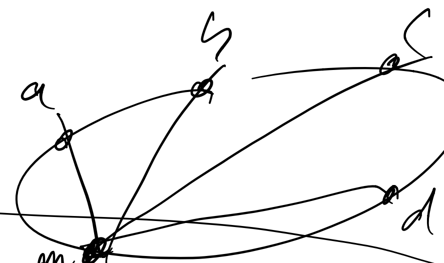
$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\pi_{m'}^{-1}"] & m'^{\perp} \\ m^{\perp} \arrow[u, "\pi_m"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\pi_{m'}^{-1} \circ \pi_m$ = homographie

$\boxed{\text{exo}}$ (faire le calcul)

<u>conclusion</u> : la structure de droite projective sur Γ ne dépend pas du point $m \in \Gamma$

$\Longrightarrow$ $a, b, c, d \in \Gamma$



$$[a,b,c,d] = [(ma),(mb),(mc),(md)]$$
$$= [(m'a),(m'b),(m'c),(m'd)]$$

Thm (Frégier)

Γ $\quad p \in \Gamma$

définit une homographie involutive de Γ

réciproquement toute homographie involutive est de cette forme

dém : $\boxed{\text{exo}}$

Jeu Dobble

carte : 8 symboles dessinés

2 cartes $\Rightarrow$ $\exists$ exactement 1 symbole commun

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_7)$ $\qquad$ $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$\shortparallel$

$\underbrace{\mathbb{F}_7^2 \amalg \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_7)}_{49+8=57 \text{ points}}$ $\qquad$ $\underbrace{\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_7) = \mathbb{F}_7 \amalg \{\infty\}}_{8 \text{ points}}$

57 droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_7)$: chaque droite contient 8 points

- 2 points $\neq$ $\rightsquigarrow$ définit une unique droite
- 2 droites $\neq$ $\rightsquigarrow$ $\exists$ unique point d'intersection

<u>Construction d'un Dobble</u>

57 symboles $\rightarrow$ 1 symbole associé à chaque point de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_7)$

Carte $\longmapsto$ droite de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_7)$
8 symboles dessinés

2 symboles $\neq$ $\Longrightarrow$ 1 unique carte qui les contient

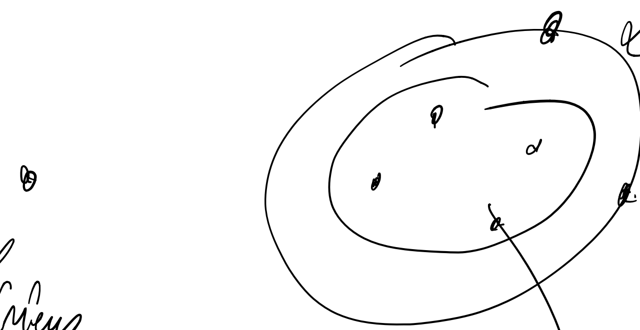
2 cartes $\neq$ $\Longrightarrow$ unique symbole en commun

$\rightsquigarrow$ cf la théorie des design en combinatoire ex: Desargues 10 points, 10 droites

- chaque droite contient 3 points
- chaque point $\in$ 3 droites $\not=$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_5) \rightsquigarrow 5^2+6=31$

Γ conique



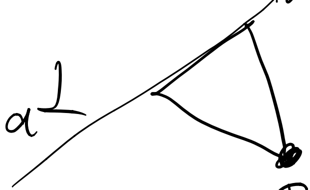
6 points

$\frac{6\times 5}{2}=15$ sécantes

15 points extérieurs

$\shortparallel$

pôles des sécantes $\to$ 15 triangles autopolaires



$a^\perp$

T^a

10 points intérieurs

configuration de Desargues

Fait : groupe des transformations de la configuration de Desargues $\cong$ S_5 = groupe des permutations des 5 triangles autopolaires $\cong$ $PGL_2(\mathbb{F}_5)$

---

rem : $\boxed{\text{géo semblable}}$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, D_∞ droite proj "à l'infini"

involution $\neq Id$

$D_\infty \ni m$ = pente d'une droite affine $\subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus D_\infty$

$m^\perp$ = pente

$\boxed{\text{"orthogonalité"}}$

exo 1 : conique

$$\cancel{a_1 X^2} + \cancel{a_2 Y^2} + a_3 Z^2 + a_4 XY + a_5 YZ + a_6 ZX = 0$$

$\overset{a}{\overset{\shortparallel}{(1:0:0)}} \in \Gamma$ $\qquad T_a =$ tgte en a

$\underset{b}{\underset{\shortparallel}{(0:1:0)}} \in \Gamma$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X}\big|(1,0,0) \\ \frac{\partial}{\partial Y}\big|(1,0,0) \\ \partial/\partial Z\,\big|(1,0,0) \end{pmatrix} \begin{matrix} = 2a_1X + a_4Y + a_6Z\big| \\ = 2a_2Y + a_4X + a_5Z\big|_{-} \\ = 2a_3Z + a_5Y + a_6X\big|_{-} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ a_4 \\ a_6 \end{pmatrix}$$

$T_b =$ tgte en b

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X}\big|(0,1,0) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4 \\ 2a_2 \\ a_5 \end{pmatrix}$$

$C = (0,0,1) = T_a \cap T_b \qquad 0 = T_a(C) = a_6$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = T_b(C) = a_5$

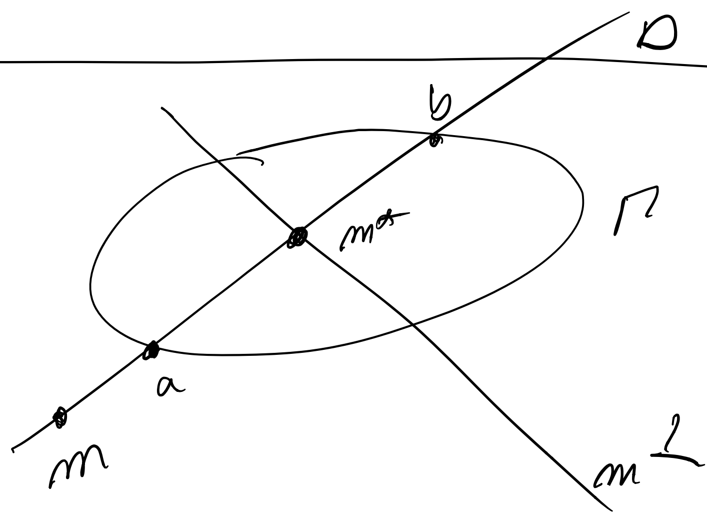
$\leadsto \quad a_3 Z^2 + a_4 XY$

$d = (1,1,1) \in \Gamma \Rightarrow a_3 + a_4 = 0$

$a_3 = -a_4 \qquad a_3 \left(\boxed{Z^2 - XY} \right) = 0$

---

exo 2



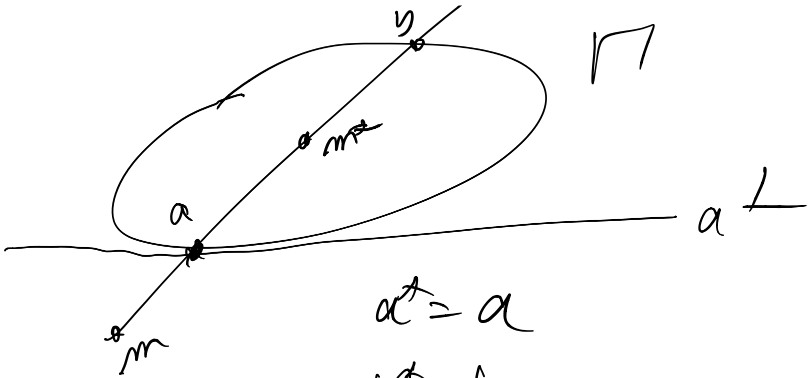
$$\begin{aligned} D &\longrightarrow D \\ m &\longmapsto m^* \end{aligned}$$

Prop : C'est une homographie

Hyp : $D \cap \Gamma = \{a, b\}$

alors $[a, b, m, n] = -1 \Leftrightarrow n = m^*$

dem : $\begin{aligned} D &\longrightarrow D \\ m &\longmapsto m^* \end{aligned}$ homographie involutive



$a^\perp = a$

$b^\perp = b$

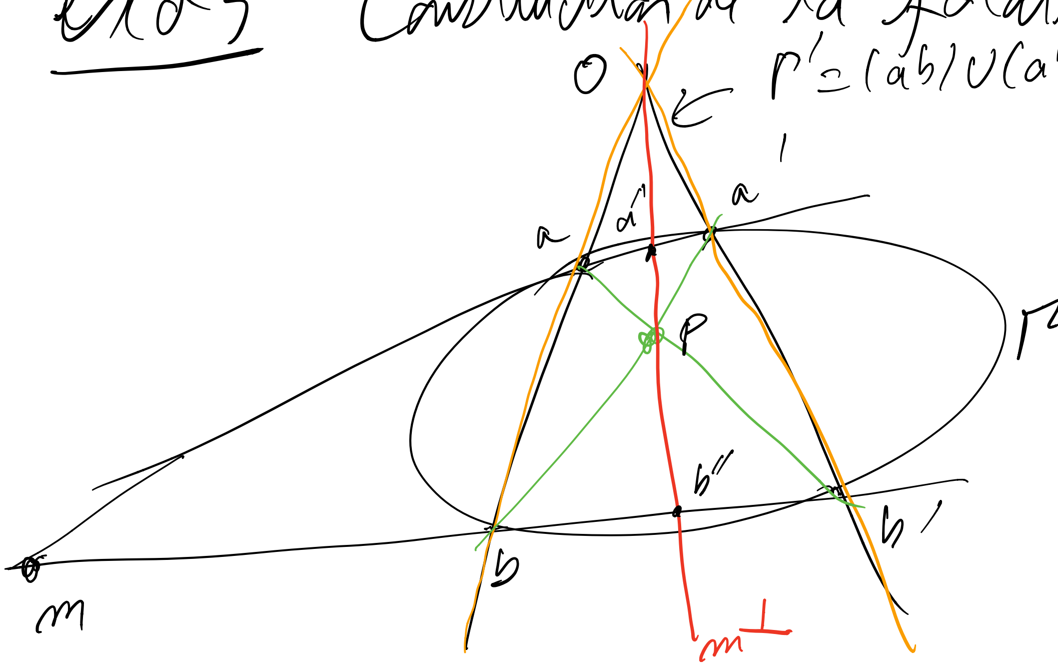
ie $\{a, b\}$ = les points fixes de l'involution $\perp$

$\Rightarrow [a, b, m, m^\perp] = -1$ (cf cours 2)

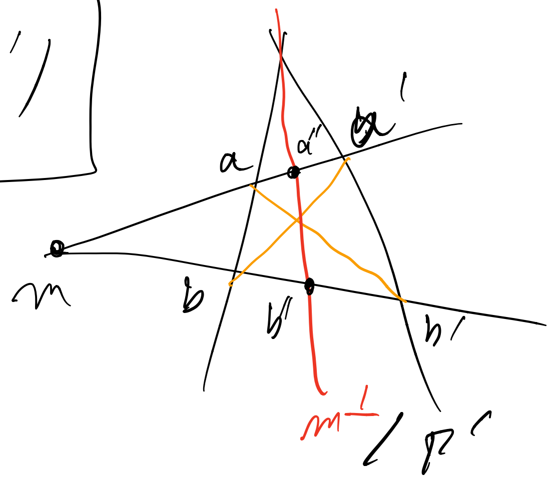
$[a, b, \overset{n}{m}, n] \iff n = m^\perp$

car (a, b, m) repère proj de D

exo 3 Construction de la polaire



$$\boxed{\Gamma' = (ab) \cup (a'b')}$$



$(aa') \longrightarrow (aa')$ homographie

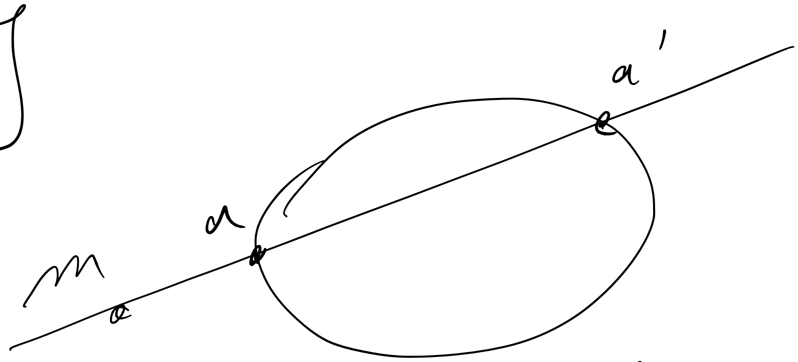
$m \longmapsto m^*/_{\Gamma'} = a''$ involutive

(cf cours 2) avec a et a' pour points fixes

$\Rightarrow [a, a', m, a''] = -1$

idem avec $(bb') \rightsquigarrow [b, b', m, b''] = -1$

$\boxed{\Gamma}$



$(ab) \longrightarrow (ab)$ homographie

$m \longmapsto m^*/\Gamma$ involutive

$\{a, b\}$ pts fixes

$\Rightarrow \quad [a, b, m, m^*/p] = -1$ $\quad \Rightarrow a'' = m^*/p$

$\quad \|$

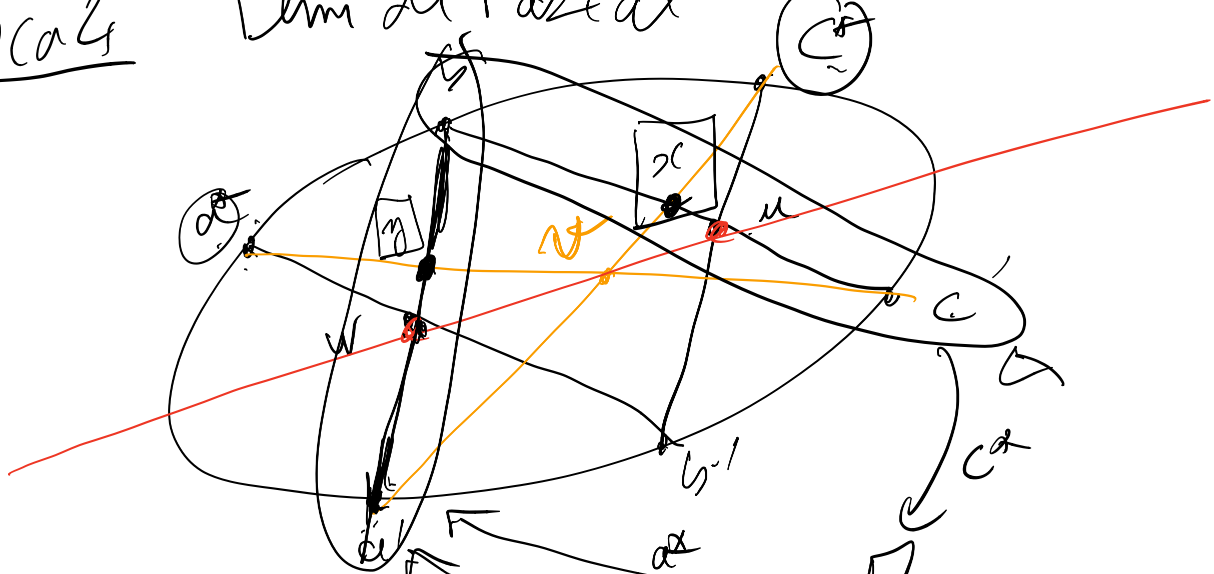
$[a, b, m, a''] = -1$

<u>idem</u> : $b'' = m^*/p$ sur (bb')

$\Rightarrow m^\perp \ni a'', b''$

$\Leftrightarrow m^\perp = (a''b'')$ $\quad \square$

<u>exo 24</u> Thm de Pascal



<u>dem</u> : $x = (a'c) \cap (bc')$

perspectives :

* P_x : $(bc') \longrightarrow (a'b)$

centre

$$\begin{array}{ccc} b & & b \\ x & \longmapsto & a' \\ c' & & y \end{array}$$

$(u \longmapsto w)$? $\Leftarrow$ $\boxed{\begin{array}{c} u, v, w \\ \text{alignés} \end{array}}$

$\Uparrow$

$[b, c', x, u] = [b, y, a', w]$

* $\boxed{[b, c', x, u]}$ = $[(cb), (cc'), (cx), (cu)]$

$\| \quad \boxed{\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1}$ via c^*

$[b, c', a', b']$

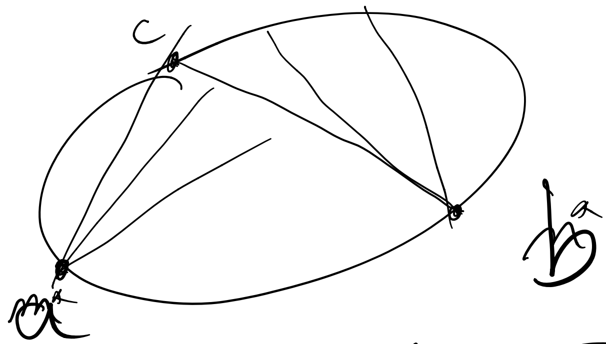
$\| \quad \boxed{a^*}$

$[(ab), (ac'), (aa'), (ab')]$

si on coupe par $(a'b)$

$= \boxed{[b, y, a', w]}$

exo 5



$$\mathfrak{a}^* \hookleftarrow \Gamma \hookleftarrow \mathfrak{b}^*$$

$\mathbb{P}^{2'}$ $\qquad$ $\mathbb{P}^2$

$\mathfrak{a}^* \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{a}}} \Gamma$

$\mathfrak{b}^* \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{b}}} \Gamma$

$$\pi_{\mathfrak{b}}^{-1} \circ \pi_{\mathfrak{a}} : \underbrace{\mathfrak{a}^* \to \Gamma \to \mathfrak{b}^*}_{d \longmapsto d'} \quad \text{homographie}$$

dem : $a = (1:0:0)$, $b = (0:1:0)$, $c = (0:0:1)$

$\in \Gamma$

$$\cancel{a_1 X^2} + \cancel{a_2 Y^2} + \cancel{a_3 Z^2} + \boxed{a_4 XY + a_5 YZ + a_6 ZX = 0}$$

$\boxed{D : \text{droite de } a^*} = \quad Y - \alpha Z = 0 \qquad \alpha \in \mathbb{P}^1(K)$

$D \cap \Gamma : \quad a_4 \alpha XZ + a_5 \alpha Z^2 + a_6 ZX$

$\underline{Z = 0 \Leftrightarrow \{a\}}$ $\quad \cancel{Z} X(a_6 + \alpha a_4) = -a_5 \alpha Z^2$

$Z \neq 0$ $\quad X = -\dfrac{a_5 \alpha}{a_6 + \alpha a_4} Z \qquad Y = \alpha Z$

$a_6 + a \cdot Y$

$\boxed{b^{\alpha}:}$ $X - \alpha' Z = 0$

$\underline{D \cap \Gamma}:$ $a_4 \alpha' YZ + a_5 YZ + a_6 \alpha' Z^2 = 0$

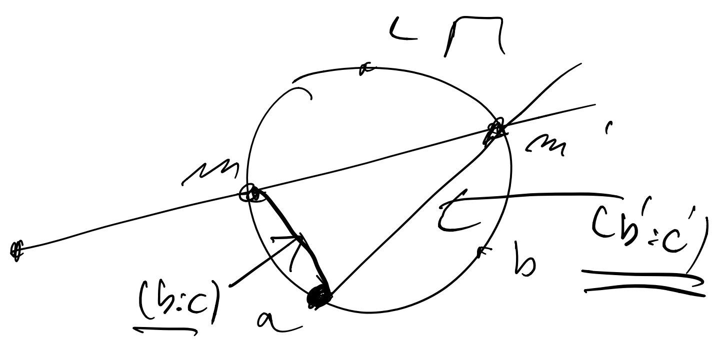
$\underline{Z = 0}$ · $Y(a_4\alpha' + a_5) = -a_6 \alpha' Z$

$$\boxed{X = \alpha' Z \qquad Y = -\frac{a_6 \alpha'}{a_4\alpha' + a_5} Z}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{Y}{Z} = -\frac{a_6 \alpha'}{a_4 \alpha' + a_5}}$$ <u>homographie</u>

<u>exo 6</u> (Frégier)

$\underline{g : m \mapsto m'}$ p



$a = a_1 = (1:0:0)$ $a_2 = (0:1:0)$ $a_3 = (0:0:1)$ $\in \Gamma$

$$\boxed{\alpha YZ + \beta ZX + \gamma XY = 0} \quad \Gamma$$

$p = (1:1:1)$

Mq $j : \Gamma \to \Gamma'$ est une homographie
$\underset{\mathbb{P}^1}{\overset{\|}{a^*}}$ $\underset{\mathbb{P}^1}{\overset{\|}{a^*}}$

$a^* = \Gamma$ $\quad D \in a^*$

$\underbrace{by + cz = 0}$ $\quad y = -\frac{c}{b} z$

$\underline{D \cap \Gamma}$: $-\alpha \frac{c}{b} z^2 + \beta z x + \gamma \frac{c}{b} z x = 0$

$z = 0$ $\quad x\left(\beta - \frac{\gamma c}{b}\right) = \alpha \frac{c}{b} z$

$x(b\beta - \gamma c) = \alpha c z$

$\underline{x = \alpha c}$ $\quad \boxed{(\alpha c b : (\gamma c - b\beta) c : (b\beta - \gamma c) b)}$

$\underset{(b:c)}{D} \in \underset{\mathbb{P}^1}{\overset{\|}{a^*}} \longrightarrow m = (\alpha b c : c(\gamma c - b\beta) : b(b\beta - \gamma c)) \in \Gamma$

$(A \leftrightarrow \underline{\gamma c - \beta b = 0})$

$m \longmapsto m' \in \Gamma' \longleftrightarrow (b' : c') \in a^*$

$(\alpha b' c' : c'(\gamma c' - b\beta') : b'(b'\beta - \gamma c'))$

P, m, m' sont alignés

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha bc & c(\gamma c - b\beta) & b(b\beta - \gamma c) \\ \alpha b'c' & c'(\gamma c' - b\beta') & b'(b'\beta - \gamma c') \end{vmatrix} = 0$$

on développe par rapport à la dernière ligne

$$\lambda c'^2 + \mu b'c' + \delta b'^2 = 0$$

λ, μ, δ = polynôme homogène de degré 2 en b et c

$$\lambda X^2 + \mu XY + \delta Y^2 = 0$$

$(X, Y) = (b, c)$ solution

$\frac{X}{Y} = T \qquad \lambda T^2 + \mu T + \delta = 0$

$t_1 = \frac{b}{c} \qquad t_2 = \frac{b'}{c'}$

$t_1 + t_2 = -\frac{b}{c}$

$\frac{b'}{c'}$ = fraction rationnelle en $\left(\frac{b}{c}\right)$

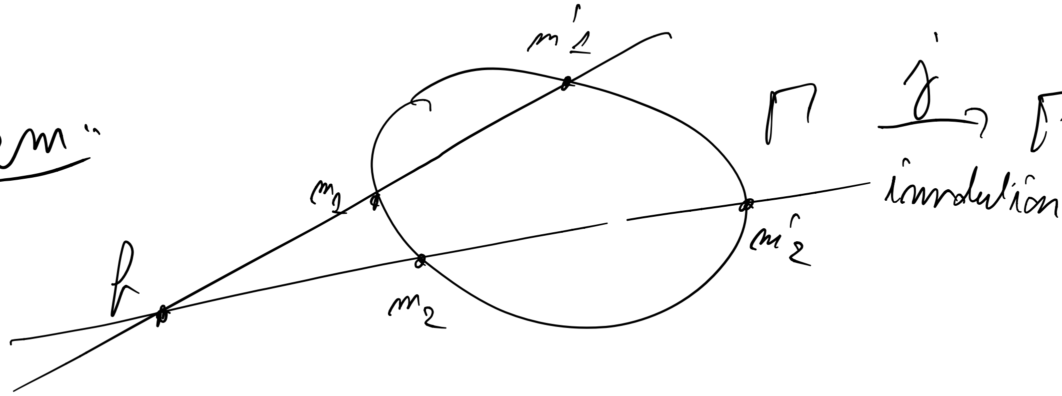
et réciproquement $\frac{b}{c}$ = fraction rat en $\left(\frac{b'}{c'}\right)$

$\Longrightarrow$ les degrés de ces fractions rat sont $= 1$

$\Longrightarrow$ ce sont des homographies

$\square$

Rem :



$j : m_1 \longmapsto m'_1$
$\quad m_2 \longmapsto m'_2$

$p = (m_1 m'_1) \cap (m_2 m'_2)$

j_p : involution de Frégier : $m_1 \to m'_1$
$m'_1 \to m_1$
$m_2 \to m'_2$

m_1, m_1', m_2 repère projectif de $\mathbb{P} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \boxed{g_f = g}$