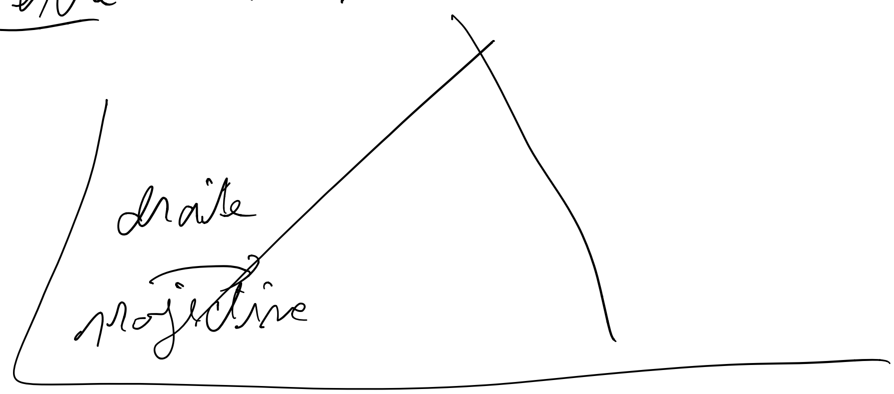
# TD$_5$ géométrie projective

Contexte : $n=2$ $\qquad \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \sqcup \underbrace{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}_{\mathbb{R}\sqcup\{\infty\}}$




⇝ on se concentre sur les droites projectives

rem : $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\sqcup\{\infty\} = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$

$$\neq \qquad\qquad \neq$$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \sqcup (\mathbb{R}\sqcup\{\infty\})$$

idée faire des changements de géométrie

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ = le complexifié de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

$$\boxed{n=1 \quad \mathbb{P}^1(\mathbb{R}),\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$$

homographie

$[\lambda x : \lambda y]$
$\parallel$
$m = [x : y]$


repère : $a, b, c$

$y = 0 \to [1, 0] \leftrightarrow \infty$

$y \neq 0 \quad [x : y] = [\frac{x}{y} : 1] = [t : 1]$

$\searrow \mathbb{R}$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) / \{\lambda I_2 : \lambda \in \mathbb{R}^\times\}$$

$$m = [x, y] \longmapsto M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(M)(m) = [ax+by : cx+dy]$$

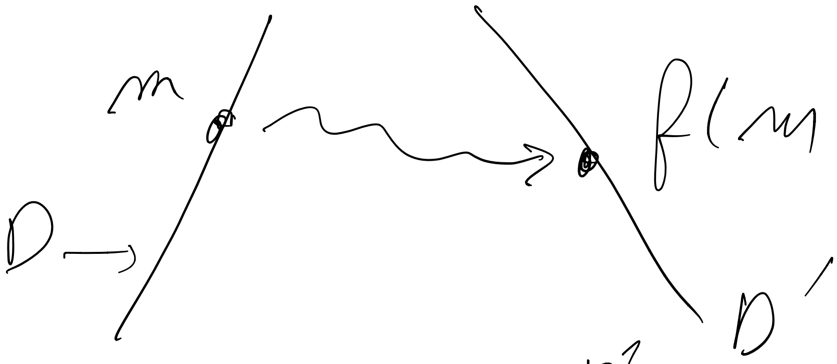
$y \neq 0, \quad m \leftrightarrow [t : 1]$

$t$

$$\mathbb{P}(M)(m) = \begin{cases} \left[\frac{at+b}{ct+d} : 1\right] & ct+d \neq 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\infty \longmapsto \frac{a}{c}$$

ex :




$$f : \begin{array}{c} \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ \wr\!\wr \\ D \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ \wr\!\wr \\ D' \end{array}$$

Mq $f$ est une homographie

2 stratégies : (1) on prend des repères et on calcule et on montre

$$f : t \longmapsto \frac{at+b}{ct+d}$$

(2) On montre formellement

$$f : t \longmapsto \frac{P(t)}{Q(t)} \qquad P, Q \in \mathbb{R}[X]$$

Lemme : $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Hyp
- c'est une fraction rationnelle
  $m = (x, y) = \begin{cases} (t : 1) \\ \infty \end{cases} \to \begin{cases} P(t)/Q(t) \\ \dots \end{cases}$
- bijective $g = f^{(-1)}$ application réciproque

est rationnelle

Alors $f$ est une homographie

dem :

① $F(t) = \dfrac{P(t)}{Q(t)}$ $\quad P \wedge Q = 1$
non constante

alors $\mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[F] = \{A(F)\}_{A \in \mathbb{R}[X]}$
bijective

dem : soit $A \in \mathbb{R}[t]$ tq $A(F) = 0$

$$A(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

$$A(F) = a_0 + a_1 \frac{P}{Q} + \cdots + a_n \frac{P^n}{Q^n}$$

$$= \frac{a_0 Q^n + a_1 \left[P Q^{n-1} + \cdots + a_n P^n\right]}{Q^n} = 0$$

$P \mid a_0 Q^n \longleftarrow P$ divise

$\Downarrow$

$P \wedge Q \neq 1$ contradiction

② $P(X) - F\,Q(X) \in \mathbb{R}(F)[X]$

est irréductible

[dem : $P(X) - F\,Q(X) \in \mathbb{R}[F, X]$

$= (\mathbb{R}[X])[F]$

de degré 1 (⚠ $\mathbb{Z}[X]$ : $2X + 2 = 2(X+1)$)

$P \wedge Q = 1 \Longrightarrow$ irréductible

(cf le contenu + thm de Gauss)

③ $\mathbb{R}(G) / \mathbb{R}(F)$ $(\mathbb{R}(F) \subset \mathbb{R}(G))$

$\mathbb{R}(G) = \mathbb{R}(F)$-espace vectoriel

dim finie $=$ deg $F$ $=$ max(deg $P$, deg $Q$)

[ <u>dem</u>: $P(G) - F\,Q(G) = 0$

<u>deg $P$ > deg $Q$</u> $\quad G^{\deg P} + (\dots) = 0$

$$\boxed{1, G, \dots, G^{\deg P - 1} \text{ base}}$$

<u>ex</u>: $P(G) = G^3 + 1 \qquad Q(G) = G + 2$

$$G^3 + 1 - FG - 2F = 0$$

<u>base</u>: $1, G, G^2$

$$G^3 = F.G + (2F - 1)$$

$$G^4 = FG^2 + (2F-1)G$$

$$G^5 = FG^3 + (2F-1)G^2 = F^2G + F(2F-1) + (2F-1)G^2$$

Application: $\cancel{f} \circ g(t) = t$

$\shortparallel$

$g \circ f(t) = t$

$$\overbrace{k(t) \supset k(f)}^{\text{dim} = \deg(g \circ f)} \supset k(g \circ f)$$

(3) ev de dim $\deg f$ (pour $k(t) \supset k(f)$)

(3) ev de dim $\deg g$ (pour $k(f) \supset k(g \circ f)$)

$$\Rightarrow \boxed{\deg(g \circ f) = \deg f \cdot \deg g}$$

$$1 \Rightarrow \boxed{\deg f = 1}$$

$\deg f = \max(\deg P, \deg Q)$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{at+b}{ct+d} \quad \text{homographie}$$

---

Rappel sur le birapport

$n = 2$

$|\mathbb{P}^1(\mathbb{R})|$

repère : $a, b, c \xrightarrow[\exists\, PGL]{} \overline{a', b', c'}$

$$\left|\begin{array}{l} a \longmapsto a' \\ b \longmapsto b' \\ c \longmapsto c' \end{array}\right.$$

$$(a,b,c,d) \xrightarrow{\exists !\, \mathbb{P}(u)} \begin{array}{c} a',\ b',\ c',\ \mathbb{P}(u)(d) \\ \shortparallel \quad \shortparallel \quad \shortparallel \\ \infty,\ 0,\ 1,\ [a,b,c,d] \\ \in \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \end{array}$$

$[a,b,c,d]$ = birapport

$$[a,b,c,d] = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

$d = a \Leftrightarrow \infty$
$d = b \Leftrightarrow 0$
$d = c \Leftrightarrow 1$

exo :
- $[b,a,c,d] = [a,b,d,c] = \dfrac{1}{[a,b,c,d]}$
- $[a,c,b,d] = 1 - r$

2 preuves
- on calcule
- on utilise une homographie

## homographies involutives ($h$ / $h \circ h = Id$)

Exo : $f$ homographie de $P^1(\mathbb{R})$

$\# \{m / f(m) = m\} \leq 2$

[dem : repère $[t, 1]$

$f(t) = \frac{at+b}{ct+d} = t$

$at+b = ct^2 + dt$

au + 2 solutions

]

Exo : Soit $f$ homographie de $P^1(\mathbb{R})$

Hyp : $f$ a 1 unique pt fixe

Conclusion : $\exists$ homographie $g$ tq

$g f g^{-1} : t \longmapsto t + \lambda$

(translation)

Indication : se ramener à ∞ c unique point fixe

Exo : idem avec 2 points fixes ≠

Conclusion : $\exists g \dots$ tq $gfg^{-1} : t \mapsto \lambda t$

$\lambda \neq 0, 1$

$\lambda = [a, b, m, f(m)] \quad \forall m \neq a, b$

$a, b$ = points fixes

Indication : se ramener aux pts fixes ∞ et 0

---

Exo : $h$ homographie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ :

(a) $h$ est une involution

(b) $h = \mathbb{P}(M) \quad M \in GL_2(\mathbb{R}) \quad \mathrm{Tr}(M) = 0$

(c) $\exists\, m$ tq $h(m) \neq m$
$h^2(m) = m$

Indication : $h = \mathbb{P}(u)$ $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$t' = h(t) = \dfrac{at+b}{ct+d}$

$$(c\,t\,t') + (d\,t' - a\,t) - b = 0 \quad (*)$$

$h$ involutive $\Longleftrightarrow$ $(*)$ est symétrique en $t$ et $t'$

**Application** $f \neq Id$ homographie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

alors
- $f$ est involutive
- $f = i \circ j$ $i, j$ involutions

dem : • $f$ a au + 2 pts fixes
$a, b$ non fixes

• $c \notin \{a, b\}$

• $a, b, c \xrightarrow{f} a', b', c'$

* $\boxed{\begin{matrix} a' = b \\ b' = a \end{matrix}}$ $\quad a \longmapsto a' = b \longmapsto b' = a$

$\Rightarrow$ $f$ est une involution
(cf © dans exo précédent)

* $\boxed{a \neq b'}$ $\exists\, i : a, b, b' \longmapsto b', a', a$

$a \overset{i}{\longmapsto} b' \overset{i}{\longmapsto} a$

$i$ = involution

$c'' = i(c) \notin \{a', b'\}$

$c \notin \{a, b\}$

$j : b', a', c'' \longmapsto a', b', c'$

$b' \overset{j}{\longmapsto} a' \overset{j}{\longmapsto} b'$ $j$ involution

$\underline{j\circ i}$ : $a \overset{i}{\longmapsto} b' \overset{j}{\longmapsto} a'$

et $b \overset{i}{\longmapsto} a' \overset{j}{\longmapsto} b'$

$\underline{f}$ $c \overset{i}{\longmapsto} c'' \overset{j}{\longmapsto} c'$

$\Rightarrow \boxed{f = j\circ i}$

Exo : $h$ homographie involutive

$h$ est uniquement déterminée par la donnée de 2 couples $(p \overset{h}{\leftrightarrow} p')$

$p \neq p'$ $(q \overset{h}{\leftrightarrow} q')$

$q \neq q'$

Exo $h$ homo de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

$$a, b, c \longmapsto a', b', c'$$

Supp. : $a \neq a'$

Alors $h$ involution

$$\Updownarrow$$

$$[a, b, c, a'] = [a', b', c', a]$$

---

## Division harmonique $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Def : $a, b, c, d$ forment une division harmonique $\Longleftrightarrow$ $[a, b, c, d] = -1$

rem : $\Rightarrow \begin{cases} [b, a, c, d] = -1 \\ [a, b, d, c] = -1 \\ [c, d, a, b] = -1 \end{cases}$

$\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ sont en division harmonique ex : $a = \infty$ $\quad [\infty, b, c, d] = \dfrac{d-b}{c-b} = -1$

$\Updownarrow$

$c + d = 2b \iff b$ milieu de $[cd]$

$\star\ [a, -a, c, d] = -1 \iff cd = a^2$

exo $f$ homographie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

hyp : $\exists$ 2 points fixes $a \neq b$

alors : ① si $f$ est une involution alors $\forall m \notin \{a, b\}$

$$[a, b, m, f(m)] = -1$$

② si $\exists\, m \neq a, b$ tq $[a, b, m, f(m)] = -1$ alors $f$ est une involution

Indication

① $[a, b, m, f(m)]$

$$\Big\Downarrow f$$

$$[f(a), f(b), f(m), f^2(m)]$$

$$\|$$

$$[a,b,m,f(m)] = [a, b, f(m), m] = \frac{1}{[a,b,m,f(m)]}$$

$$\Rightarrow [a,b,m,f(m)] = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(m) = m$$

non car $m \notin \{a,b\}$

② $[a,b,m,f(m)] = -1$

$$\Big\Downarrow f$$

$$[a,b,f(m),f^2(m)] = -1$$

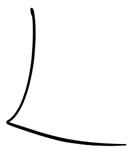
$$\Downarrow$$

$$[a,b,f^2(m),f(m)] = -1$$

$$\|$$

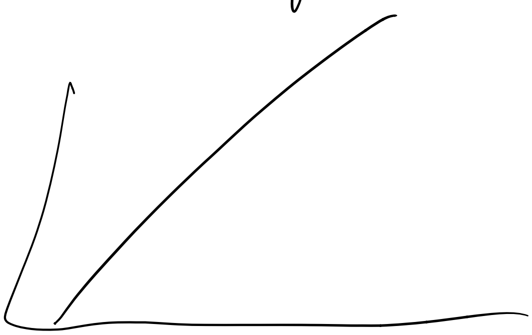
$$[a,b,m,f(m)] \Longleftrightarrow \underline{f^2(m) = m}$$

$\Rightarrow f$ involution



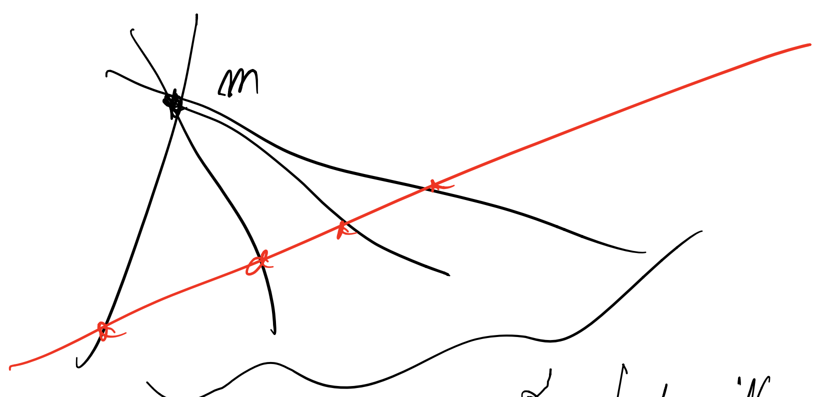
(car $f(m) \neq m$)

Rem : cf le cours

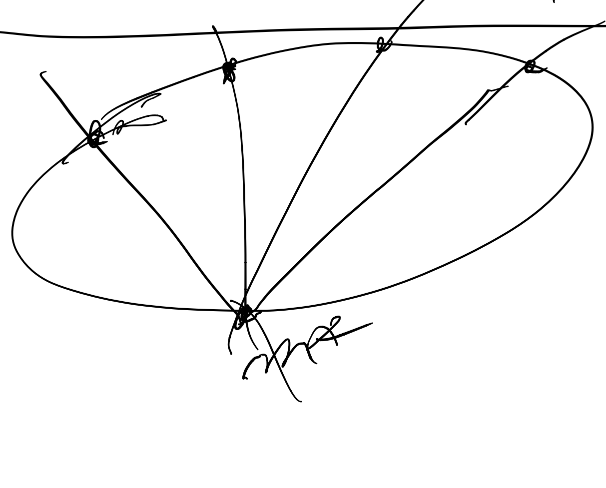


$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$




$m^* = \{$ droite $D \ni m \}$




conique $\ni m$

$\updownarrow$ bijection

$m^*$