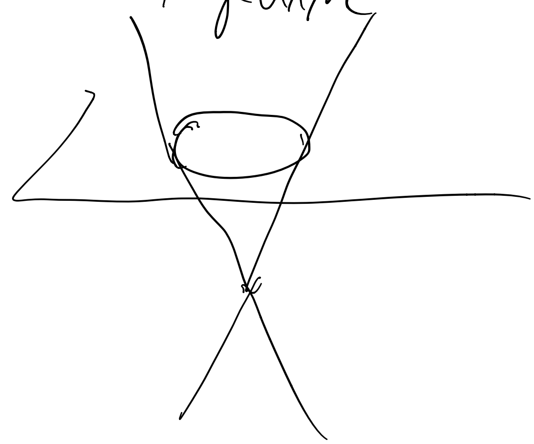
$\boxed{\text{TD géo proj 2}}$

<u>$n=2$</u> $(n=1)$

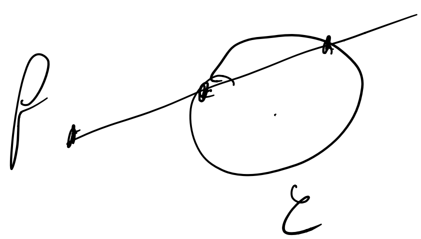
$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ $\mathcal{E}$ = cercle (conique projective)

$\|$

$\mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$



$\mathbb{R}^2$

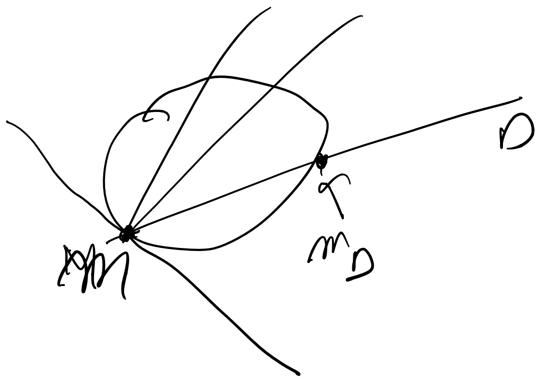


$\boxed{i_{P,\mathcal{E}} = \text{l'inversion de centre } P \text{ qui laisse } \mathcal{E} \text{ globalement invariant}}$

<u>rem.</u>: 1 conique proj de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$\|$

une droite projective $\hookrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$



$M^* \longrightarrow \mathcal{E}$

$D \longmapsto D \cap \mathcal{E} = \{M, m_D\}$

droite passant par M

$D \longmapsto m_D \in \mathcal{E}$

bijection: $M^* \longrightarrow \mathcal{E}$

droite projective

$$\boxed{\mathcal{E} \leftrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$$

$i_{f,\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ $\rightsquigarrow$ matrice de $PGL_2(\mathbb{R})$

$\cap$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sphère de Riemann

le complexifié

$\mathcal{E}, f \rightsquigarrow \boxed{h_{f,\mathcal{E}} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$

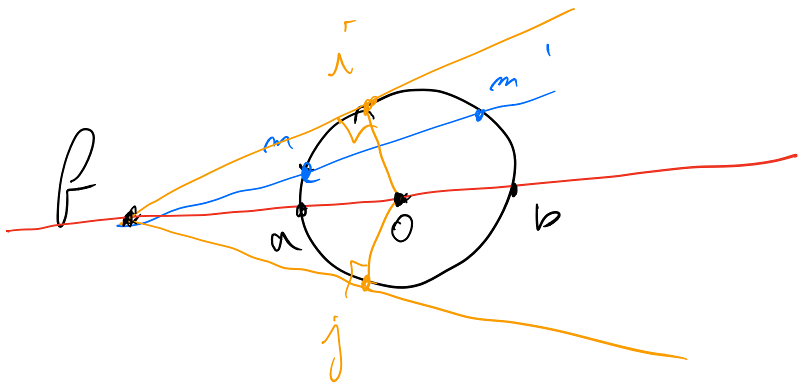
$\rightsquigarrow i_{f,\mathcal{E}}$ = inversion

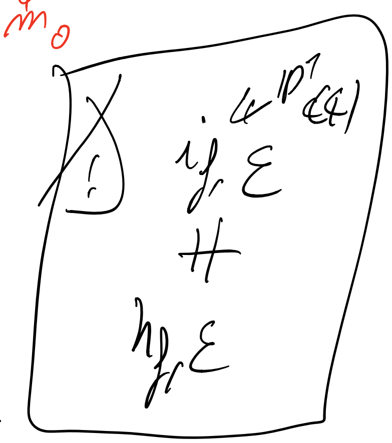
homographie $\boxed{PGL_2(\mathbb{C})}$

Def : $h_{f,\mathcal{E}}$ = $\dfrac{\text{l'involution de Frégier}}{\text{de centre } f}$

(Cf + loin pour le cas où $\mathcal{E}$ = coniq

$\underline{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$ = sphère de Riemann $= \mathbb{R}^2 \amalg \{\infty\}$





$\underline{\text{Exo}}$: $f \longleftrightarrow O$ centre de $\mathcal{E}$

$\underline{\text{dem}}$: $h_{f,\mathcal{E}}$ homographie de S^2

$\Rightarrow$ | • conserve les cercles/droites
| • conserve les angles non orientés

$\cancel{A}(fo) \xmapsto{h_{f,\mathcal{E}}}$ cercle/droite $\qquad \mathcal{E}$

$a \underset{h_{f,\mathcal{E}}}{\longleftrightarrow} b \qquad (fo) \perp \mathcal{E} \rightsquigarrow h_{f,\mathcal{E}}(fo) \perp \overset{\shortparallel}{h_{f,\mathcal{E}}(\mathcal{E})}$

$$\Rightarrow \boxed{(\ell O) \xmapsto{h_{\ell,\varepsilon}} (\ell O)}$$

$* \quad i \xmapsto[h_{\ell,\varepsilon}]{} i \qquad j \xmapsto[h_{\ell,\varepsilon}]{} j$

$\Rightarrow \underline{[i, j, \ell, h_{\ell,\varepsilon}(\ell)] = -1} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\boxed{i, j, \ell, h_{\ell,\varepsilon}(\ell) \text{ sont cocycliques}}$

le cercle circonscrit à i, j, ℓ

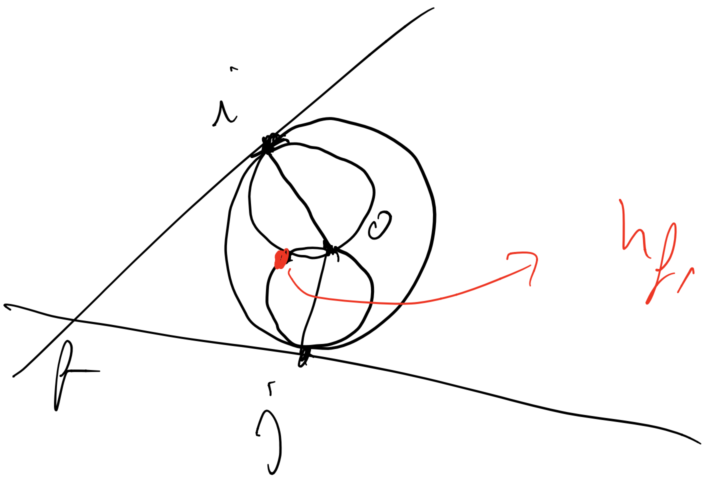
$\shortparallel$

cercle de diamètre $[\ell O]$

$h_{\ell,\varepsilon}(\ell) \in \begin{cases} \cdot \text{ cercle de diamètre } [\ell O] \\ \cdot \ (\ell O) \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{h_{\ell,\varepsilon}(\ell) = O}$$

<u>exo</u> : $\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \xmapsto{h_{f,\mathcal{E}}}$ le $2^{\text{ème}}$ point d'intersection
des cercles de diamètre
$[oi]$ et $[oj]$



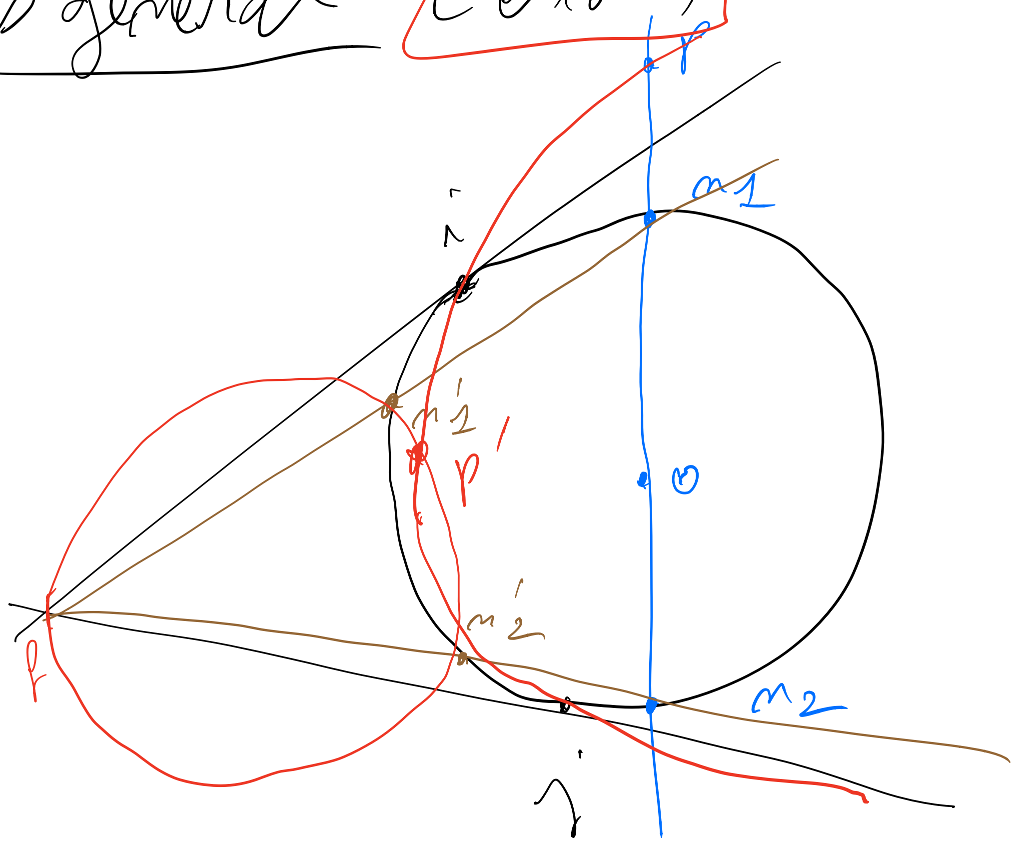
$h_{f,\mathcal{E}}(\infty)$

<u>Indication</u> $(fi) \xmapsto{h_{f,\mathcal{E}}}$ cercle passant
par o et i
tangent à $\mathcal{E}$
" cercle de diamètre
$[oi]$

$(fj) \longmapsto$ <u>idem</u>

. — — —.

Cas général [exo]



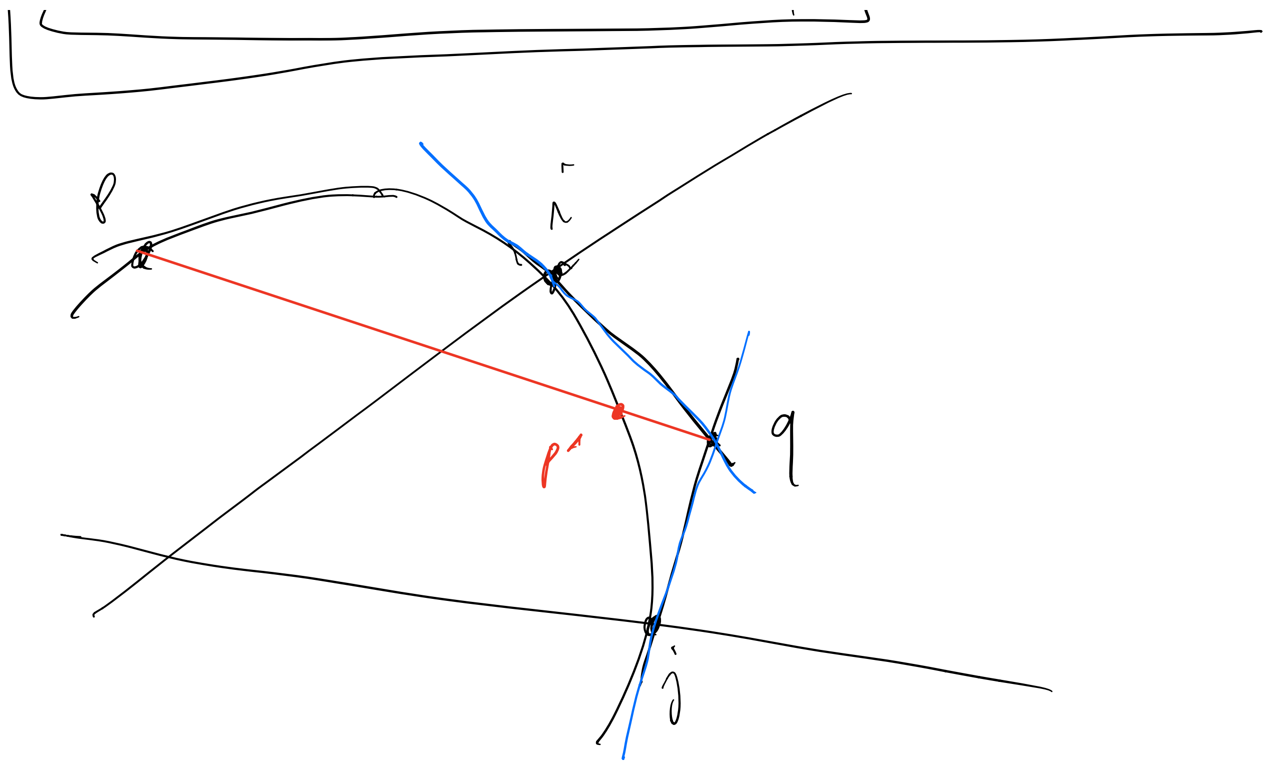
$\mathcal{E}_p$

Mq : p' appartient au cercle circonscrit à i, j, p

au cercle circonscrit à $p\, m'_1 m'_2$

q = l'intersection des tangentes à $\mathcal{E}_p$ en i et j

$\mathcal{E}_p \cap (pq) = \{p, p'\}$



Indication: $\mathcal{E}_0$ cercle passant par i et j

$$\Big\downarrow h_{j,\mathcal{E}}$$

$\mathcal{E}_0' =$ cercle / droite

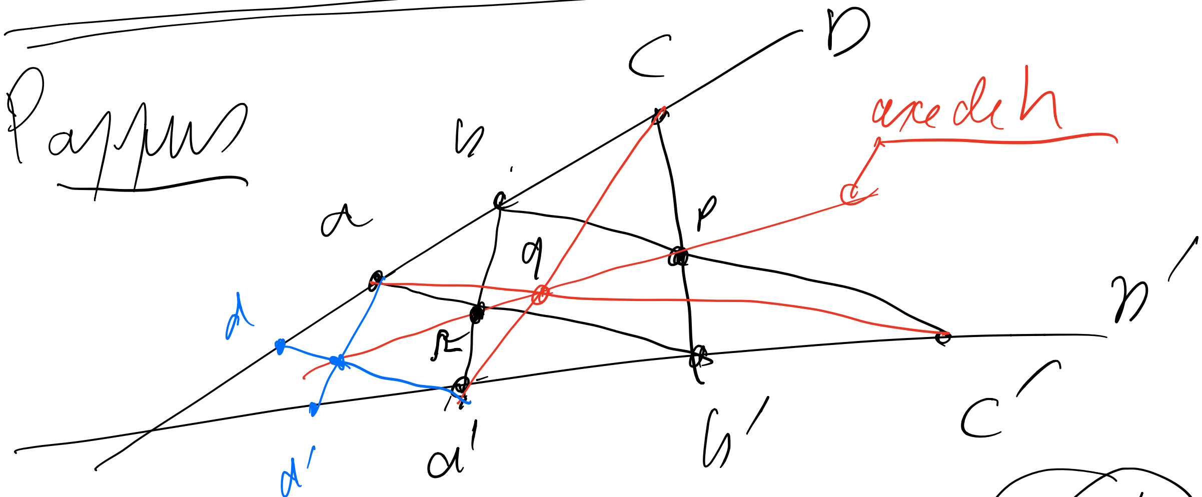
- $i, j \in \mathcal{E}_0'$
- l'angle entre $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}$ en i (j)

  $\parallel$

  celui entre $\mathcal{E}_0'$ et $\mathcal{E} = h_{j,\mathcal{E}}(\mathcal{E})$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}'_0 = \mathcal{E}_0}$$

Pappus

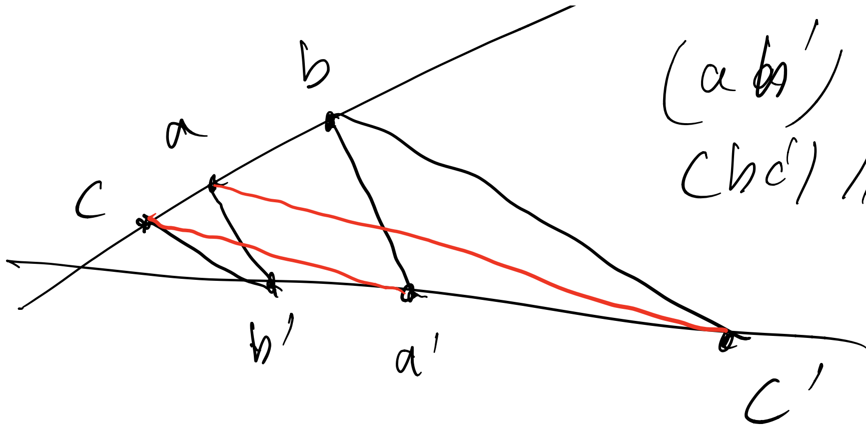


[dem affine (calcul barycentrique)] purement affine

[dem : $D \xrightarrow{\text{homographie}} D'$ D, D' cp[?]tes
(a, b, c) (a', b', c')

$\Rightarrow$ $\exists$ axe de l'homographie qui est celui de la figure] purement proj

[dem : on envoie (pq) à l'infini chgt de gle



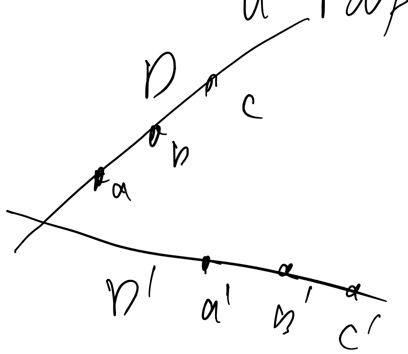
$(ab') \,/\!/\, (a'b)$
$(bc') \,/\!/\, (b'c)$

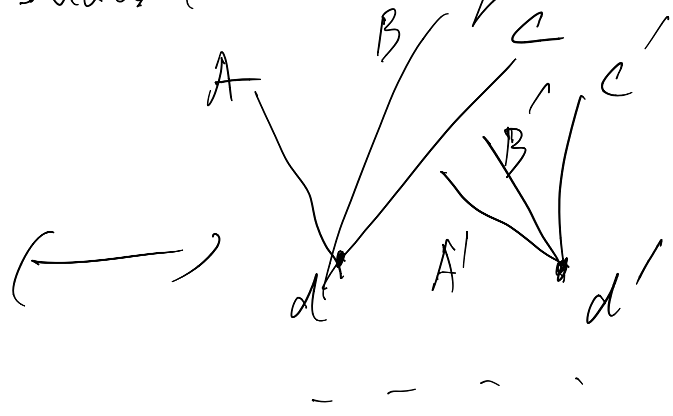
Pappus affine (Thalès ou homothéties)
$\Rightarrow (ac') \,/\!/\, (a'c)$

$\Uparrow$

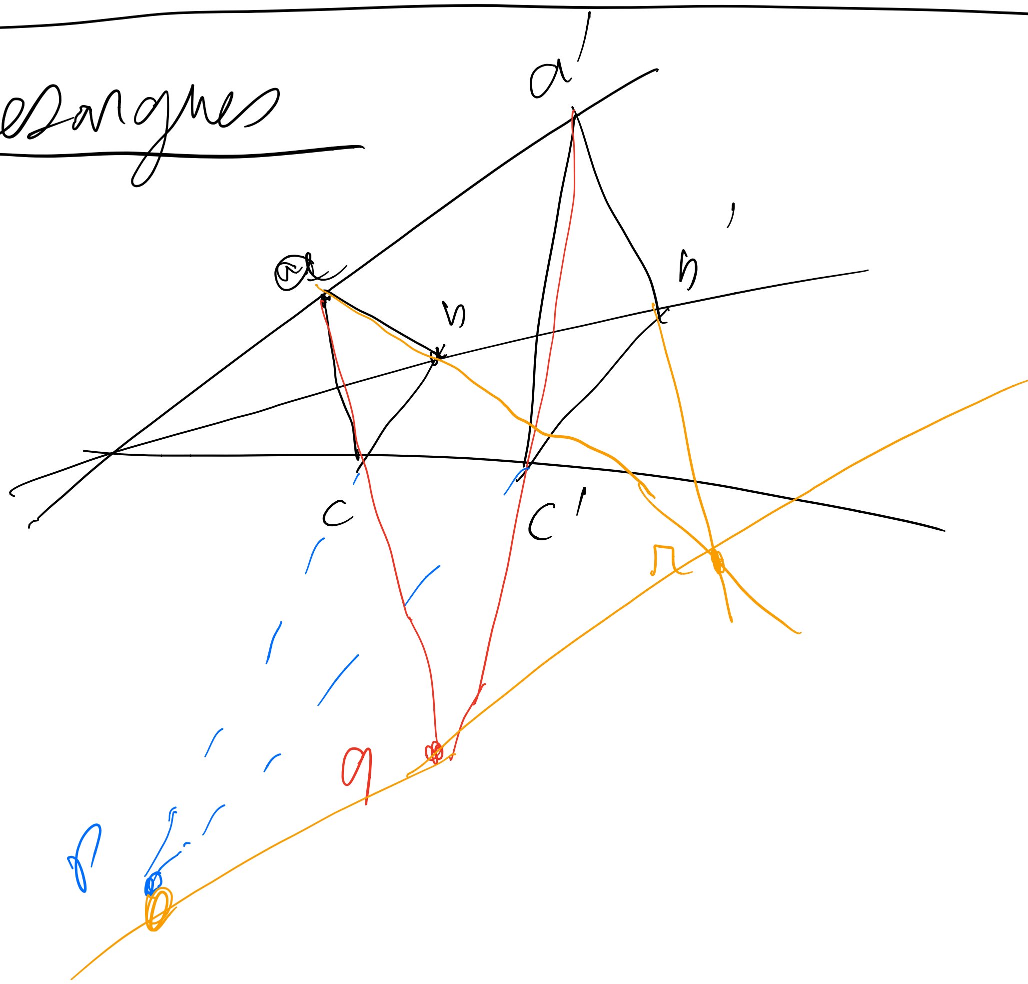
$\boxed{q \in (pr)}$ dans l'ancienne carte

exo : Trouver le théorème corrélatif à Pappus



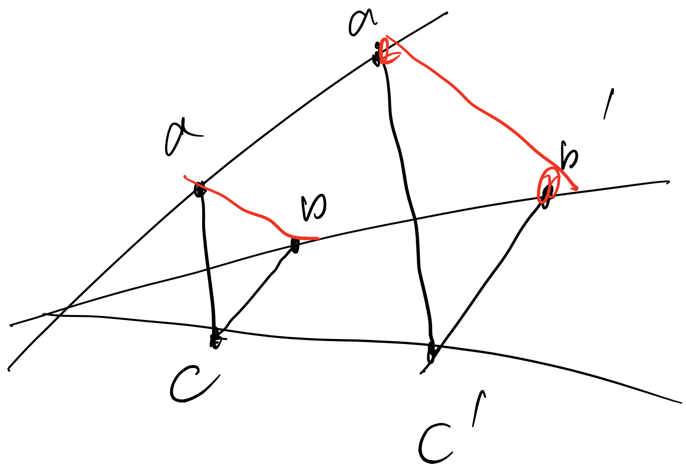


Desargues



dem purement affine (calcul barycentrique)

dem (chgt de géométrie)
on envoie (pq) à l'infini
⇝ Desargues affine



$(ac) \parallel (a'c')$

$(bc) \parallel (b'c')$

homothétie // Thalès

$(ab) \parallel (a'b')$

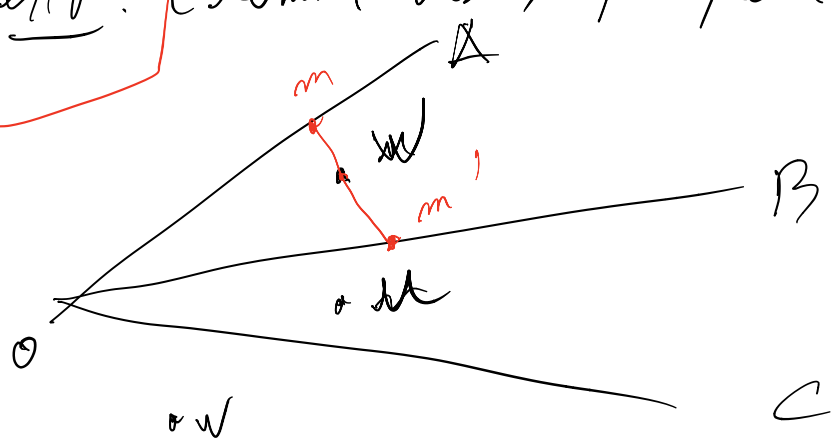
$\Downarrow$

dans la figure précédente

$r \in (pq)$

Dem purement projective

Exo : (lemme des 3 perspectives)



$P_w : A \longrightarrow B$

$P_M : B \longrightarrow C$

$P_r : C \longrightarrow A$

Hyp : $p_r \circ p_n \circ p_a : A \to A$ "identité"

Conclusion : u, v, a sont alignés

application : $p_r : A \longrightarrow B$

$a \longmapsto b$

$a' \longmapsto b'$

$p_p : B \longrightarrow C$

$b \longmapsto c$

$b' \longmapsto c'$

$p_q : C \longrightarrow A$

$c \longmapsto a$

$c' \longmapsto a'$

$p_q \circ p_p \circ p_r$:

$a \longmapsto a$

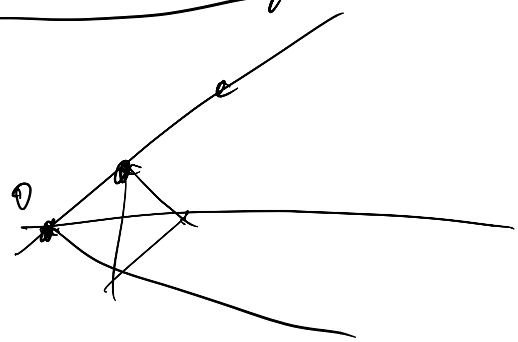
$b \longmapsto b$

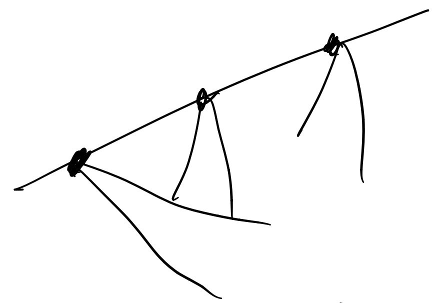
$c \longmapsto c$

(a, b, c) repère de $A \Rightarrow p_q \circ p_p \circ p_r = Id_A$

$\Rightarrow$ p, q, r sont alignés

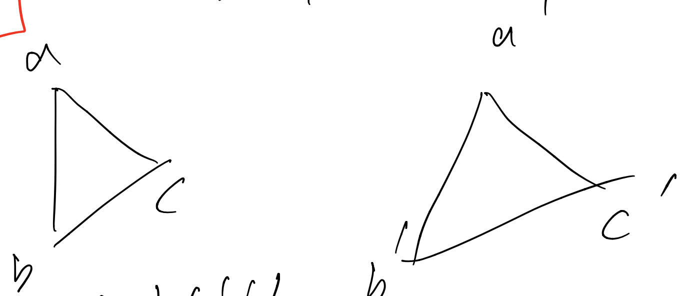
<u>énoncé corrélatif :</u>





<u>m̂ énoncé</u>

Exo : Réciproque de Desargues



$(ac)\cap(a'c')$

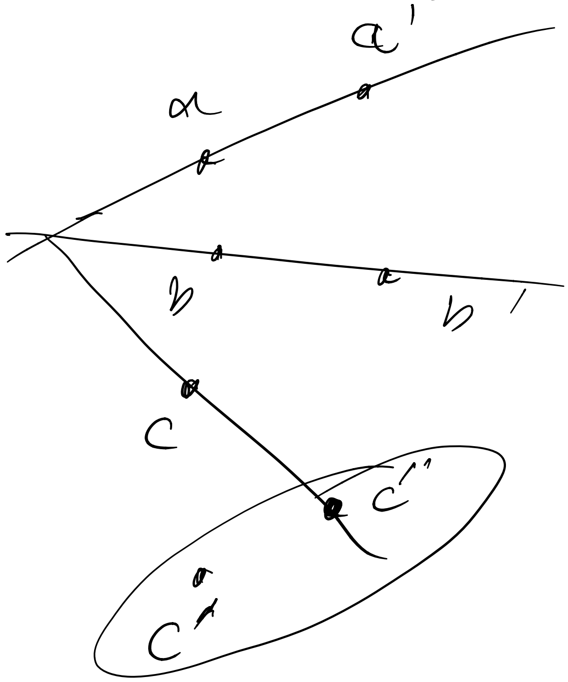
$\Rightarrow$ p, q, r

$(bc)\cap(b'c')$ $(ab)\cap(a'b')$

<u>Hyp</u> : p, q, r alignés

<u>Conclusion</u> (aa'), (bb'), (cc') sont concourantes

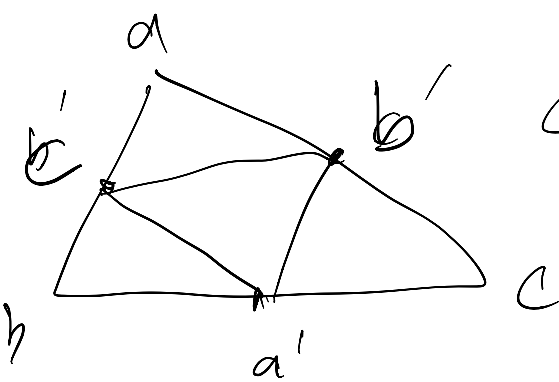
Indic : utiliser le sens direct



---

application : les médianes d'un triangle sont concourantes

dem :



$\subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Thalès

$(ab) \parallel (a'b')$
$(ac) \parallel (a'c')$ $\Rightarrow$ p, q, r sont alignés sur la

$(bc) \parallel (b'c')$ droite de l'infini

réciproque $\Longrightarrow$ Desargues (aa'), (bb'), (cc') sont concourantes

---

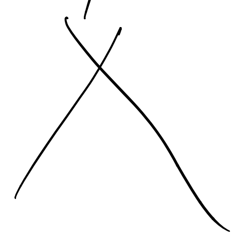
cf cours (+Sard)

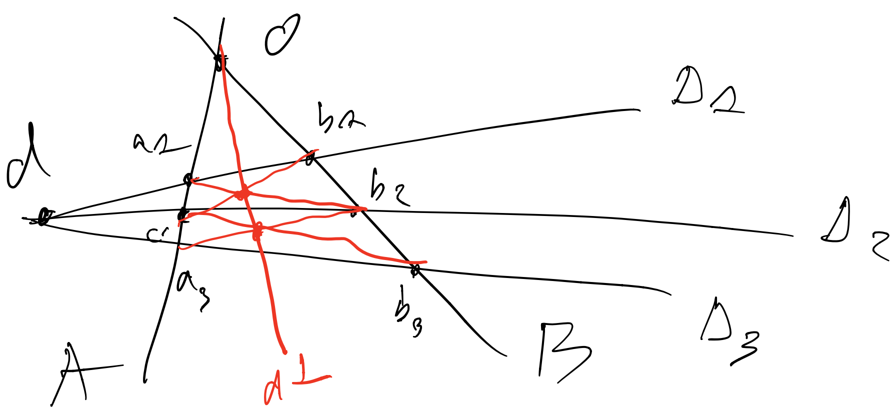
$\mathcal{E}$ = conique

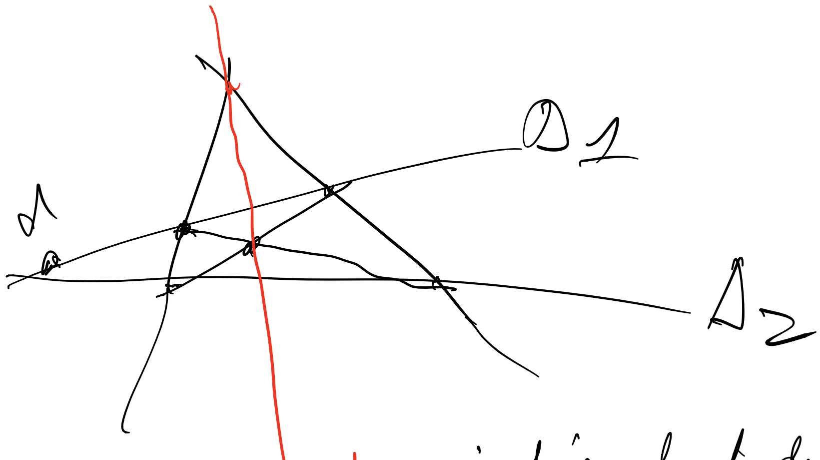
$p \longmapsto$ droite $p^\perp$ = polaire de p / $\mathcal{E}$

<u>cas particulier</u> : $\mathcal{E}$ = conique dégénérée

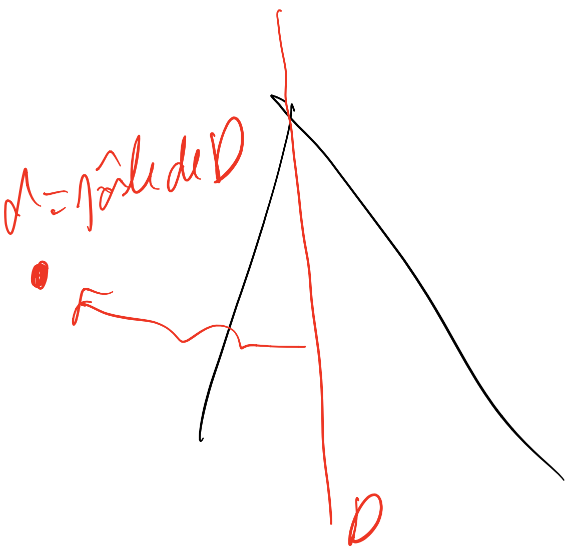
=



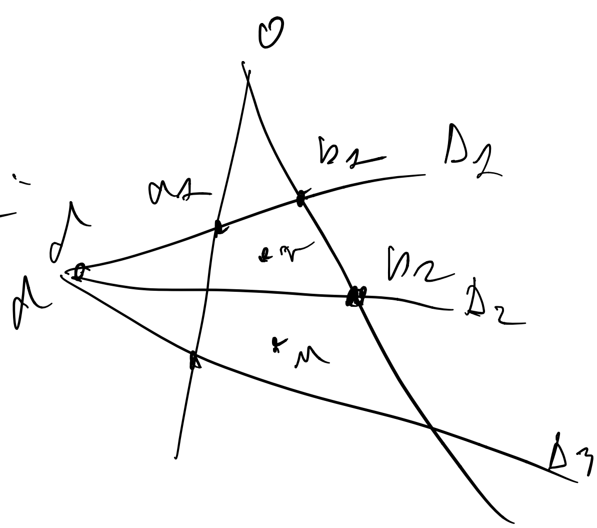




$A^\perp$ = indépendant du choix de Δ_1, Δ_2



dem:



$P_a : \Delta_1 \to \Delta_2$

$P_m : \Delta_2 \to \Delta_3$

$P_O : \Delta_3 \to \Delta_1$

$\rho_O \circ \rho_u \circ \rho_v$: $a_1 \xmapsto{\rho_v} b_2 \xmapsto{\rho_u} a_3 \xmapsto{\rho_O} a_1$

$b_1 \longmapsto a_2 \longmapsto b_3 \longmapsto b_1$

$d \longmapsto d \longmapsto d \longmapsto d$

(a_1, b_1, d) repère de Δ_1

$\Downarrow$

$\rho_O \circ \rho_u \circ \rho_v = Id$ sur Δ_1

$\Longrightarrow$ O, u, v sont alignés

Lemme des 3 perspectives