Feuille de TD 2

Exercice 1. *Déterminer la nature des applications affines dont l'application linéaire associée s'écrit dans une base orthonormée*

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. — *Etudier l'isométrie plane dont la forme complexe est* $z \mapsto i\bar{z} + 2$.
— *Ecrire en complexe la symétrie glissée d'axe d'équation* $x+y=2$ *et de vecteur* $(3,3)$.

Exercice 3. *Dans l'espace euclidien* $\mathbb{R}^3$ *muni d'une base orthormée, reconnaitre les applications affines* $f : M(x,y,z) \mapsto f(M)(x',y',z')$ *dans les cas suivants :*

$$(a)\begin{cases} x' = -z+1 \\ y' = -x \\ z' = y-2 \end{cases}, \quad (b)\begin{cases} x' = \frac{1}{9}(x-8y-4z+1) \\ y' = \frac{1}{9}(-8x+y-4z+2) \\ z' = \frac{1}{9}(-4x-4y+7z+3) \end{cases}, \quad (c = \begin{cases} x' = -z+1 \\ y' = x \\ z' = y-2 \end{cases}$$

Exercice 4. *Dans* $\mathbb{R}^3$ *euclidien muni d'une base orthonormée, soient* D, D' *les droites d'équations respectives* $x = z-1 = 0$, *et* $y = z = 0$. *On note* s_D *la symétrie par rapport à* $D^\perp$ *et* r_θ *la rotation d'axe* D' *et d'angle* θ *(choisissez une orientation de* D'*). Etudier* $\phi = s_D \circ r_\theta$.

Exercice 5. *Mettre les quaternions suivants sous forme polaire* $\rho e^{\theta x}$ *avec* $\rho > 0$, x *quaternion pur de norme* 1 *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *:*

$$1+i, \quad \frac{\sqrt{2}+i+j}{2}, \quad 1+i+j+k, \quad \frac{1+2i-j+\sqrt{3}k}{3}.$$

Exercice 6. *Déterminer l'axe et l'angle de la rotation* $R_{\theta,\overrightarrow{u}} \circ R_{\theta',\overrightarrow{u}'}$ *avec* $\theta' = 2\pi/3$, $\theta = \pi/2$, $\overrightarrow{u} = (0,0,1)$ *et* $\overrightarrow{u}' = (1,1,1)$. *Utiliser une méthode matricielle, puis les quaternions.*

Exercice 7. *Soit* ABC *un triangle équilatéral du plan affine euclidien. Décrire le sous-groupe des isométries affines qui stabilise* $\{A,B,C\}$.
Même en question en dimension 3 *avec un tétraèdre régulier* $ABCD$, *puis en dimension* n *quelconque.*

Exercice 8. *Soit* $A_1A_2\cdots A_n$ *un polygone régulier du plan affine euclidien. Décrire le sous-groupe du groupe des isométries affines qui le stabilise globalement.*
Donner la liste de tous les sous-groupe finis du groupe des isométries affines en dimension 2.

Exercice 9. *Déterminer le sous-groupe des isométries affines de l'espace euclidien, qui stabilise un cube.*
De combien de façons peut on colorier un cube à l'aide de 5 *couleurs ?*