Feuille de TD 4

Exercice 1. — *Soient P et Q des points distincts du centre A d'une inversion i ; on note P', Q' les images respectives de P et Q. Montrer que*

$$\widehat{QPA} = \widehat{AQ'P'}.$$

— *Soit i une inversion de centre A ; pour des points M, N distincts de A et d'images respectives M', N' par i, montrer que les triangles AMN et $AN'M'$ sont semblables.*

— *Pour $R \in (AQ)$ d'image R' par i, montrer que*

$$\widehat{QPR} = -\widehat{Q'P'R'}.$$

— *Soit i l'inversion de centre A et de puissance ρ^2. Pour des points M, N distincts de A, d'images respectives M', N' par i, montrer que*

$$M'N' = \frac{\rho^2 MN}{AM \times AN}.$$

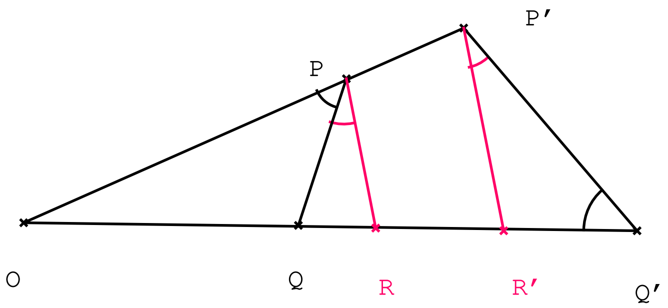

Figure 1 – Inversion et triangles semblables

Exercice 2. *Montrer le théorème de Ptolémée suivant. 'Etant donnés un triangle ABC et P un point du plan, on a*

$$CP \times AB \geq AP \times BC + AC \times BP,$$

avec égalité si, et seulement si, le point P appartient à l'arc du cercle circonscrit à ABC qui est délimité par A et B.

Exercice 3. ***Porisme de Steiner***

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles non sécants tels que $\mathcal{C}'$ soit à l'intérieur de $\mathcal{C}$. On construit alors une chaîne de cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$ tels que $\mathcal{C}_1$ est tangent à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ quelconque, puis, pour $i \geq 2$, $\mathcal{C}_i$ est tangent à $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_{i-1}$. La chaîne est alors finie si, et seulement si, l'invariant conforme c de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est de la forme

$$c = \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2RR'} = \frac{1 + \sin^2(\pi p/k)}{\cos^2(\pi p/k)},$$

où p est le nombre de tours. En particulier, cela ne dépend pas du choix du cercle $\mathcal{C}_1$ de départ.

Exercice 4. *Soit $\mathcal{C}$ un cercle et soit (AB) une droite ne coupant pas $\mathcal{C}$. Étant donné un point $P_0 \in \mathcal{C}$, on construit Q_0 le deuxième point d'intersection de (AP_0) avec $\mathcal{C}$, puis P_1 le deuxième point d'intersection de (BQ_0). On réitère ce procédé pour obtenir deux suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{C}$.*

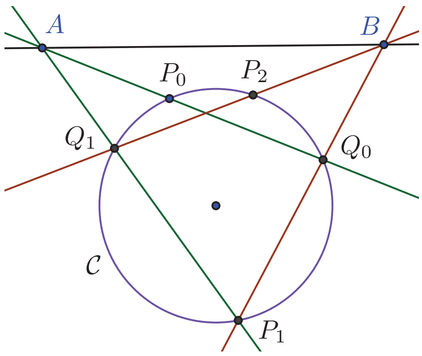

FIGURE 2 – Un énoncé de géométrie dynamique à la Poncelet

Montrer ques i la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique, alors cette propriété est indépendante du point P_0 choisi sur $\mathcal{C}$.

1 (1) Notons r^2 la puissance de l'inversion i, si bien que

$$AP \times AP' = AQ \times AQ' = r^2.$$

On en déduit alors que $\frac{AP}{AQ} = \frac{AQ'}{AP'}$ et donc que les triangles APQ et $AQ'P'$ sont semblables, d'où le résultat.

(2)

(3) On écrit $\widehat{QPR} = \widehat{QPA} - \widehat{RPA}$, qui d'après la proposition précédente est alors égal à $\widehat{AQ'P'} - \widehat{AR'P'} = \widehat{R'P'Q'}$, d'où le résultat.

(4) Les triangles AMN et $AN'M'$ étant semblables, on a

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{AN'}{AM} = \frac{\rho^2}{AN \times AM},$$

d'où le résultat.

2 Soit donc ABC un triangle et soit P un point du cercle circonscrit à ABC appartenant à l'arc délimité par A et B. Une inversion de centre P et de puissance k transforme A, B, C en trois points A', B', C' alignés dans cet ordre. D'après ce qui précère, l'égalité $A'C' = A'B' + B'C'$ se traduit par $AP \times BC + AC \times BP = CP \times AB$.

Pour P n'appartenant pas au cercle circonscrit à ABC, les points A', B', C' appartiennent à un cercle, de sorte que l'inégalité triangulaire $A'C' \leq A'B' + B'C'$ est stricte et donc que $CP \times AB \geq AP \times BC + AC \times BP$.

3 S'agissant clairement d'un énoncé de géométrie conforme, on applique une inversion qui fait de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles concentriques : la figure étant alors clairement invariante par rotation, on remarque bien que l'alternative « la chaîne est finie ou infinie » est indépendante du choix de $\mathcal{C}_1$. La chaîne sera finie si, et seulement si, l'angle $\frac{\widehat{O_1OO_2}}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

Notons $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{O_1OO_2} = \widehat{O_1OT}$, où T est le point de contact entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$: $\alpha = \pi\frac{p}{k}$. On note ρ, ρ' les rayons des deux cercles concentriques, de sorte que, d'après ce qui précède, $\frac{\rho}{\rho'} = c + \sqrt{c^2 - 1}$, avec $\sin\alpha = \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}$, et donc $\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}$, soit

$$c + \sqrt{c^2 - 1} = \frac{1 + \sin\frac{\pi p}{k}}{1 - \sin\frac{\pi p}{k}},$$

ce qui donne le résultat.

4 Introduisons l'inversion i_A (resp. i_B) de centre A (resp. B) et de puissance la puissance de A (resp. B) par rapport à $\mathcal{C}$, de sorte que $\mathcal{C}$ est globalement invariant par i_A (resp. i_B). Avec les notations précédentes, on a donc $Q_n = i_A(P_n)$ et $P_{n+1} = i_B(Q_n)$. Supposons alors que $P_N = P_0$ et posons $i = \overbrace{(i_B \circ i_A) \circ \cdots \circ (i_B \circ i_A)}^{N}$. Les points $P_0, Q_0, \ldots, P_N, Q_N$ sont alors fixes par l'homographie i, qui est donc égale à l'identité, d'où le résultat.