Feuille de TD 5

Exercice 1. *Pour A, B, C un triangle sphérique, on note A^*, B^*, C^* son triangle podaire défini par*

$$\sin a\, \overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{z}, \quad \sin b\, \overrightarrow{OB^*} = \overrightarrow{z} \wedge \overrightarrow{x}, \quad \sin c\, \overrightarrow{OC^*} = \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y},$$

où $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{OC}$.

On pose $s(ABC) = 1$ (resp. $s(ABC) = -1$) si $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ est direct (resp. indirect).

— *Montrer que*

$$(\overrightarrow{x^*})^* = s\,\overrightarrow{x}, \quad (\overrightarrow{y^*})^* = s\,\overrightarrow{y}, \quad (\overrightarrow{z^*})^* = s\,\overrightarrow{z}.$$

— *Montrer les relations suivantes entre les 6 angles d'un triangle et ceux de son triangle polaire :*

$$\begin{cases} a + \alpha^* = \alpha + a^* = \pi \\ b + \beta^* = \beta + b^* = \pi \\ c + \gamma^* = \gamma + c^* = \pi \end{cases}$$

Exercice 2. *En utilisant l'exercice précédent, montrer la formule des cositions*

$$\begin{cases} \cos\alpha = -\cos\beta\, \cos\gamma + \sin\beta\, \sin\gamma\, \cos a \\ \cos\beta = -\cos\gamma\, \cos\alpha + \sin\gamma\, \sin\alpha\, \cos b \\ \cos\gamma = -\cos\alpha\, \cos\beta + \sin\alpha\, \sin\beta\, \cos c \end{cases}$$

Exercice 3. *Étant donné un triangle de côtés de longueurs a, b, c et d'angles α, β et γ, montrer la formule des sinus*

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} = s\frac{\det(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}{\det(\overrightarrow{x^*}, \overrightarrow{y^*}, \overrightarrow{z^*})}.$$

Exercice 4. *Un navigateur est confronté au problème de géométrie sphérique suivant :*

— *connaissant sa position $A(\theta, \phi)$ sur la surface du globe en termes de latitude θ repéré par rapport à l'équateur et longitude ϕ repéré par le méridien de Greenwich, et*

— *souhaitant se rendre en un point $B(\theta', \phi')$ repéré de même en termes de latitude et longitude,*

il voudrait connaître le cap à suivre. Expliquer comment il doit procéder.

1 (1) D'après la formule du produit, on a

$$\begin{aligned}\sin b \sin c\, \overrightarrow{y^*} \wedge \overrightarrow{z^*} &= \left(\overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{x}\right) \wedge \left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}\right)\\ &= \left((\overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{x}).\overrightarrow{y}\right)\overrightarrow{x} - \left((\overrightarrow{z} \wedge \overrightarrow{x}).\overrightarrow{x}\right)\overrightarrow{y}\\ &= \det(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})\overrightarrow{x}.\end{aligned}$$

Ainsi comme $\sin b \sin c$ est positif, $(\overrightarrow{x^*})^*$ est dans la direction de $\overrightarrow{x}$ si $s = 1$ et sinon dans la direction opposée, d'où le résultat.

(2) L'orientation de l'espace et le vecteur $\overrightarrow{x}$ fournissent une orientation du plan tangent à S en A ; ainsi $\overrightarrow{z^*}$ (resp. $\overrightarrow{y^*}$) est un vecteur directement (resp. indirectement) orthogonal à $\overrightarrow{x_y}$ (resp. $\overrightarrow{x_z}$). On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\cos a^* &= (\overrightarrow{y^*} \mid \overrightarrow{z^*})\\ &= -(\overrightarrow{x_z} \mid \overrightarrow{x_y})\\ &= -\cos\alpha\end{aligned}$$

et donc $a^* + \alpha = \pi$. Par permutation circulaire on obtient aussi $b^* + \beta = \pi$ et $c^* + \gamma = \pi$. Enfin on a $(a^*)^* = a$, $(b^*)^* = b$, $(c^*)^* = c$ et de même pour les angles α, β, γ, on en déduit que $a + \alpha^* = b + \beta^* = c + \gamma^* = \pi$.

2 Il suffit d'appliquer la formule d'Al Kashi sphérique au triangle podaire en utilisant les relations de l'exercice précédent.

3 Comme le terme le plus à droite des égalités de l'énoncé est invariant par permutations circulaires il suffit de montrer que $s\frac{\det(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}{\det(\overrightarrow{x^*}, \overrightarrow{y^*}, \overrightarrow{z^*})} = \frac{\sin a}{\sin\alpha}$. Pour cela on calcule

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{x^*}, \overrightarrow{y^*}, \overrightarrow{z^*}) &= \overrightarrow{x^*}.\left(\overrightarrow{y^*} \wedge \overrightarrow{z^*}\right)\\ &= \left(\frac{\overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{z}}{\sin a}\right).\frac{\sin a^*}{s}\overrightarrow{x}\\ &= \frac{\sin a^*}{\sin a}\frac{\overrightarrow{x}.(\overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{z})}{s}\\ &= \frac{\sin a^*}{\sin a}\frac{\det(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}{s}.\end{aligned}$$

4 Pour ce faire introduisons le pôle nord N et considérons le triangle sphérique ABN. Les coordonnées de A et B donnent les distances $d(A, N)$ et $d(B, N)$ respectivement égal à $(\frac{\pi}{2} - \theta)R$ et $(\frac{\pi}{2} - \theta')R$ où R est le rayon de la Terre à peu près égal à 6373 kilomètres. Par ailleurs l'angle $\widehat{ANB}$ est égal à $\phi - \phi'$ de sorte que l'analogue de la formule d'Al-Kashi

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$

permet de calculer la distance $d(A, B)$. La loi des sinus $\frac{\sin\widehat{NAB}}{\sin d(N,B)} = \frac{\widehat{ANB}}{\sin d(A,B)}$ donne donc l'angle $\widehat{NAB}$, i.e. le cap à suivre.