Sur quelques sous-groupes de GL_n

Devoir à rendre pour le 30/10/2022

(1) Soit G un sous-groupe fini abélien de $GL_n(\mathbb{C})$.

(i) Montrer que les éléments de G sont simultanément diagonalisables et en déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/\sharp G\mathbb{Z})^n$ puis que G est isomorphe à un produit de k groupes cycliques avec $k \leq n$.

(ii) En déduire que si $GL_n(\mathbb{C}) \simeq GL_m(\mathbb{C})$ alors $n = m$.

(2) On suppose maintenant que G est d'exposant fini m, i.e. $g^m = 1$ pour tout $g \in G$.

(i) Montrer que l'ensemble T des traces des éléments de G est fini.

(ii) Soit $g_1, \cdots, g_d$ une famille génératrice de l'espace vectoriel engendré par G dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'application $t : G \longrightarrow T^d$ définie par $t(g) = (\mathrm{tr}(gg_1), \cdots, \mathrm{tr}(gg_d))$, est injective.

(iii) En déduire que G est fini.

(3) Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$.

(i) En considérant la forme quadratique $q_G(x) = \sum_{g\in G} q(gx)$ où q est la forme quadratique euclidienne, en déduire que G est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$.

(ii) Traiter le cas $n = 2$.

(iii) Pour $n = 3$, on note S_2 la sphère unité et on considère

$$Y = \{(g, x) \in (G \setminus \{1\}) \times S_2 \text{ tels que } gx = x\}.$$

Montrer que

$$\sharp Y = 2(\sharp G - 1) = \sum_{x\in X/G} (\nu_x - 1)\sharp G/\nu_x,$$

où X est l'ensemble des éléments de S_2 fixés par un élément de G et ν_x est le cardinal du stabilisateur de x dans G.

(iv) En déduire alors, pour $n = 3$, que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_n, $\mathcal{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$ ou $\mathcal{A}_5$.

(4) Montrer que tout sous groupe fini peut être vu comme un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{Z})$. On fixe un nombre premier $p \geq 3$.

(i) Montrer qu'une écriture $P_n(X) = p^n Q_n(\frac{X-1}{p})$ avec P_n, Q_n unitaires de degré n, les racines de P_n étant de module 1 et Q_n à coefficients entiers, impose $P_n(X) = (X - 1)^n$.

(ii) En déduire que la restriction du morphisme $GL_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ à tout groupe fini G, est nécessairement injective.

(iii) En déduire que le cardinal d'un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$ est majoré par $(3^n - 1)(3^n - 3)\cdots(3^n - 3^{n-1})$.

(5) On cherche à montrer le théorème de Jordan-Schur : si G est un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ alors il possède un sous-groupe abélien distingué d'indice $\leq (\sqrt{8n}+1)^{2n^2} - (\sqrt{8n}-1)^{2n^2}$.

(i) Montrer que $|A| = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^*)}$ définit une norme sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ qui est invariante par multiplication à droite et à gauche par des matrices unitaires. Quelle est la norme d'une matrice unitaire ?

(ii) Soient A et B unitaires avec $|Id - B| < 2$. Montrer que si A commute avec $[A,B] = ABA^{-1}B^{-1}$ alors A et B commutent.
Indication : on pourra commencer à montrer que A et BAB^{-1} commutent, puis qu'il existe une matrice de permutation P telle que $PAP^{-1} = BAB^{-1}$. On montrera alors, en utilisant $|Id - B| < 2$, que P est une matrice diagonale par blocs de matrices de permutations.

(iii) Soient A et B unitaires. Montrer que

$$|Id - [A,B]| \leq \sqrt{2}|Id - A|.|Id - B|.$$

(iv) Soient $A, B \in G$. Montrer que si $|Id - A| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $|Id - B| < 2$, alors A et B commutent.
Indication : on pourra introduire la suite $B_0 = B$ et $B_{i+1} = [A, B_i]$ dont on montrera qu'elle est stationnaire pour i assez grand.

(v) Soit H le sous-groupe engendré par $\{A \in G, |Id - A| < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Montrer que H est un sous-groupe abélien distingué dans G.

(vi) Soit $G/H = \{R_1, \cdots, R_m\}$ et on note B_i la boule de centre R_i et de rayon $1/2\sqrt{2}$. Montrer que ces boules sont disjointes et en déduire le résultat.