A rendre pour le 20 octobre : minimum 3 exos par thème

Groupes finis

1. Montrer que $\mathcal{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$.
2. On note D_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$, i.e. le nombre de permutations sans point fixe. Montrer que la série génératrice $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{D_n}{n!} z^n$ est égale à $\frac{e^{-z}}{1-z}$.
3. Soit $n \geq 5$ et G un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice k avec $1 \leq k \leq n$. Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$, $\mathcal{A}_n$ ou $\mathfrak{S}_{n-1}$.
4. Trouver m minimal tel que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_m$.
5. Montrer la **formule de Burnside** suivante : étant donné un groupe fini G agissant sur un ensemble fini S alors si c désigne le nombre d'orbites et pour $g \in G$, S^g l'ensemble des éléments fixés par G, on a l'égalité
$$|G| \times c = \sum_{g\in G} |S^g|.$$
En déduire qu'il existe 76 colliers de perles différents avec quatre perles bleues, trois blanches et deux rouges.

Polynômes

1. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ et $x \in \mathbb{C}$ une racine de P de multiplicité $> \deg(P)/2$. Montrer que $x \in \mathbb{Q}$.
2. Soient a, b, c les racines complexes de $X^3 + pX + q$. Montrer que les points A, B, C d'affixes respectives a, b, c, forment un triangle rectangle isocèle si, et seulement si, $27q^2 - 50p^3 = 0$.
3. **Continuité des racines de polynômes** : pour $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme à coefficients complexes de degré n, on note $||P|| = |a_n| + \cdots + |a_0|$.
   (a) Montrer que $||\ ||$ est une norme sur $\mathbb{C}_n[X]$.
   (b) Pour $z \in \mathbb{C}$, une racine de P, montrer que $|z| \leq \frac{||P||}{|a_n|}$.
   (c) Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers P dans $\mathbb{C}_n[X]$. Soit z une racine de P de multiplicité p. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, il y a au moins p racines de P_k dans la boule de centre z et de rayon ϵ.
   (d) En déduire que l'ensemble des matrices complexe à valeurs propres distinctes, est un ouvert connexe.
4. Soit $P(X) = a_dX^d + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ avec $a_d \neq 0$. Montrer que si α est une racine de P, on a
$$|\alpha| \leq M := \sup_{0\leq i<d} (d\frac{|a_i|}{|a_d|})^{\frac{1}{d-i}}$$

5. On considère la courbe paramétrée $x(t) = t^2+t+1$, $y = \frac{t^2-1}{t^2+1}$. En donner une équation algébrique.

Algèbre linéaire

1. Montrer que $SO(3,\mathbb{R})$ est simple.
2. Soit K un corps. Montrer que $PSL(n,K)$ est simple sauf pour $n=2$ et les corps $K=\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_3$.
3. Montrer que $PGL(2,\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$.
4. Le permanent de A est défini par
$$perA = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}.$$
   (a) Montrer que c'est une forme n-linéaire symétriques des n lignes (ou colonnes).
   (b) Montrer qu'on peut développer le permanent par rapport à une ligne ou une colonne : $perA = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} perA_{i,j}$.
   (c) Montrer que $\mathrm{per}({}^tA) = \mathrm{per}(A)$ mais par contre en général $\mathrm{per}(AB) \neq \mathrm{per}(BA)$.
   (d) Montrer le **Théorème de Frobenius-König** suivant : soit A à coefficients positifs alors $perA = 0$ si, et seulement si, il existe une sous-matrice nulle de A de taille $(r, n+1-r)$.
   (e) Pour A à coefficients positifs, montrer que $perA > 0$ si, et seulement si, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $a_{\sigma(i),i} > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
5. Etant donnée une base $(e_1, \cdots, e_n)$ du K-espace vectoriel E, on fait agir le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ par permutations des vecteurs de base, i.e. $\sigma \in \mathfrak{S}_n \mapsto P_\sigma \in GL_n(E)$ tel que $P_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Montrer **le théorème de Brauer** suivant : les matrices de permutation P_σ et P_τ sont conjuguées dans $GL_n(\mathbb{R})$ si et seulement si σ et τ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$.
6. Soient $a, b \geq 2$ des réels et $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que le sous-groupe $L_{a,b}$ de $SL(2,\mathbb{R})$ engendré par A et B est libre et discret. Montrer que si a est transcendant alors $L_{a,a}$ est libre de rang 2 alors que $L_{1,1}$ ne l'est pas.
7. Montrer le **lemme d'Hadamard** suivant : si $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$ alors A est inversible. En déduire alors que les valeurs propres d'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à la réunion des disques de Gershgorin de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$.
8. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe, dense. Quel est son intérieur ? Est-il encore connexe ?