Un théorème de Rolle pour les fonctions polynomiales à coefficients complexes

---

Dans ce problème on se propose de prouver l'analogue complexe suivant du théorème de Rolle :

Théorème 1 *Soient a et b des nombres complexes distincts et $P(Z) \in \mathbf{C}[Z]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que $P(a) = P(b)$. Le polynôme dérivé $P'(Z)$ de P possède alors au moins un zéro dans le disque*

$$D_{a,b;n} = \left\{ z \in \mathbf{C};\ |z - \frac{a+b}{2}| \leqslant R_{a,b;n} \right\},$$

où

$$R_{a,b;n} = \frac{|a-b|}{2} \ \frac{\cos(\frac{\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}.$$

Excepté à la première question, les fonctions étudiées sont des fonctions polynomiales associées à des polynômes de $\mathbf{C}[X]$; dans tout le texte on identifie un polynôme avec sa fonction polynomiale.

Notations :

– pour $k \geqslant 0$ et $P(Z) = \sum_{i=0}^{N} u_i Z^i \in \mathbf{C}[Z]$, $P^{(k)}(Z)$ désigne le k-ième polynôme dérivé de $P(Z)$,

$$P^{(k)}(Z) = \sum_{i=0}^{N-k} u_{k+i}(k+i)(k+i-1)\cdots(i+1)Z^i.$$

– pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial $\frac{n!}{(n-k)!\ k!}$.

A. Exemples de fonctions complexes

1) On considère une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ à coefficients complexes de rayon de convergence infini. Prouver que pour chaque $z \in \mathbf{C}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_{n+1}(n+1)z^n$ converge. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$, prouver qu'il existe une fonction $\varepsilon_{z_0} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ telle que $\lim_{h\to 0,\, h\in\mathbf{C}} \varepsilon_{z_0}(h) = 0$ et telle que :

$$\forall h \in \mathbf{C},\ \sum_{n\geqslant 0} a_n(z_0+h)^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n + \Big(\sum_{n\geqslant 0} a_{n+1}(n+1)z^n\Big)h + h\varepsilon_{z_0}(h).$$

Ceci justifie de définir la dérivée (au sens complexe) de la somme de la série entière (de rayon de convergence infini) $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ par la formule : $f'(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_{n+1}(n+1)z^n$.

2) Montrer qu'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = f(z)$ à coefficients complexes de rayon de convergence infini telle que $f(1) = f(-1)$ et telle que $\forall z \in \mathbf{C}$, $f'(z) \neq 0$.

Indication : on pensera à utiliser une fonction "classique".

3) Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on considère le polynôme

$$P_n(z) = \left(z - i\mathrm{cotg}\frac{\pi}{n}\right)^n,$$

où on a posé $\mathrm{cotg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
Calculer $P(1)$ et $P(-1)$ et montrer, en utilisant P_n, que si le théorème 1 est vrai alors nécessairement :

$$\lim_{n\to+\infty} R_{1,-1,n} = +\infty.$$

B. Définition de $A_\xi P(Z)$

On désignera par $\overline{\mathbf{C}}$ l'ensemble obtenu en rajoutant le point ∞ à $\mathbf{C}$:

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}.$$

On note $\mathbf{C}_n[Z]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n ; on écrit un élément $P \in \mathbf{C}_n[Z]$ sous la forme

$$P(Z) = a_0 + \binom{n}{1} a_1 Z + \binom{n}{2} a_2 Z^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a_{n-1} Z^{n-1} + a_n Z^n.$$

On rappelle que, pour $z \in \mathbf{C}$ tel que $P(z) = 0$, la multiplicité $\mu_z(P)$ de z dans P est définie par

$$P(z) = P'(z) = \cdots = P^{(\mu_z(P)-1)}(z) = 0 \text{ et } P^{(\mu_z(P))}(z) \neq 0;$$

si $P(z) \neq 0$, on pose $\mu_z(P) = 0$.
Si $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k+1} = 0$ et $a_{n-k} \neq 0$, on dit que ∞ est un zéro (en un sens généralisé) de P de multiplicité k. Ainsi tout élément $P \in \mathbf{C}_n[Z]$ (même de degré $< n$) possède exactement n zéros dans $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, comptés avec multiplicité.
Soit $P \in \mathbf{C}_n[Z]$ et $\xi \in \mathbf{C}$. On définit le polynôme $A_\xi P \in \mathbf{C}_{n-1}[Z]$ par la formule

$$A_\xi P(Z) = (\xi - Z)P'(Z) + nP(Z).$$

Pour $\xi = \infty \in \overline{\mathbf{C}}$, on pose $A_\infty(Z) = P'(Z)$.

4) Soit $P \in \mathbf{C}_n[Z]$ et $\xi \in \overline{\mathbf{C}}$. Montrer, en traitant séparément les cas $\xi \in \mathbf{C}$ et $\xi = \infty$, que

$$A_\xi P(Z) = b_0 + \binom{n-1}{1} b_1 Z + \cdots + \binom{n-1}{n-2} b_{n-2} Z^{n-2} + b_{n-1} Z^{n-1} \in \mathbf{C}_{n-1}[Z]$$

où pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$\frac{1}{n} b_i = \begin{cases} a_i + \xi a_{i+1} & \text{si } \xi \in \mathbf{C} \\ a_{i+1} & \text{pour } \xi = \infty \end{cases}$$

5) Montrer que :

a) pour tout $\xi \in \overline{\mathbf{C}}$, $A_\xi(c_1 P_1 + c_2 P_2)(Z) = c_1 A_\xi P_1(Z) + c_2 A_\xi P_2(Z)$, pour tout $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$ et $P_1, P_2 \in \mathbf{C}_n[Z]$;

b) pour tout $\xi \in \overline{\mathbf{C}}$, $A_\xi(PQ)(Z) = P(Z) A_\xi Q(Z) + Q(Z) A_\xi P(Z)$, pour tout $P, Q \in \mathbf{C}_n[Z]$;

c) pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \overline{\mathbf{C}}$, $A_{\xi_1}\Big(A_{\xi_2} P\Big)(Z) = A_{\xi_2}\Big(A_{\xi_1} P\Big)(Z)$, pour tout $P \in \mathbf{C}_n[Z]$.

6) Pour $\xi \in \overline{\mathbf{C}}$, trouver les $P \in \mathbf{C}_n[Z]$ tels que $A_\xi P(Z)$ est le polynôme nul.

C. Centre de gravité relativement à un point

Pour $\xi \in \mathbf{C}$, on note

$$\begin{array}{rcl} f_\xi : \overline{\mathbf{C}} & \longrightarrow & \overline{\mathbf{C}} \\ z (\neq \xi) & \mapsto & \frac{1}{z-\xi} \\ \xi & \mapsto & \infty \\ \infty & \mapsto & 0 \end{array}$$

On rappelle que dans le plan complexe $\mathbf{C} = \{(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ les coordonnées polaires $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ sont définies par

$$x = \rho \cos\theta, \ y = \rho \sin\theta.$$

7) Dans le plan complexe, donner une équation en coordonnées polaires d'un cercle (quelconque) passant par l'origine $O = (0,0)$. Puis donner une équation en coordonnées polaires d'une droite (quelconque) ne passant pas par O.

8) Montrer que l'image par f_ξ

a) d'un cercle passant par le point d'affixe ξ est une droite ne passant pas par le point d'affixe ξ ;

b) d'une droite ne passant pas par le point d'affixe ξ est un cercle passant par le point d'affixe ξ.

Indication : on pourra commencer par traiter le cas $\xi = 0$.

9) Soient $z_1, \cdots, z_n \in \mathbf{C}$; on note $\delta_\infty = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i$. Pour $\xi \in \mathbf{C} - \{z_1, \cdots, z_n\}$, on considère le nombre complexe δ_ξ défini par

$$\frac{1}{\delta_\xi - \xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i - \xi}.$$

On dit que δ_ξ est le centre de gravité de $\{z_1, \cdots, z_n\}$ relativement à ξ. On généralise la définition précédente au cas où certains des z_i sont égaux à $\infty \in \overline{\mathbf{C}}$ en convenant que $\frac{1}{\infty - \xi} = 0$ et que $\infty + z = \infty$ pour tout $z \in \overline{\mathbf{C}}$.

Montrer l'égalité

$$\delta'_\infty = f_\xi(\delta_\xi)$$

où $\delta'_\infty = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_\xi(z_i)$.

Soit une droite $D = \{x + iy \in \mathbf{C} :\ ux + vy + w = 0\}$ pour $u, v, w \in \mathbf{R}$ avec $(u, v) \neq (0, 0)$. On note dans la suite

$$H^{++} = \Big\{x + iy \in \mathbf{C};\ ux + vy + w > 0\Big\}$$
$$\text{et } H^{--} = \Big\{x + iy \in \mathbf{C} :\ ux + vy + w < 0\Big\}.$$

10) On suppose que $\delta_\infty = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i$ appartient à D. Montrer que
- ou bien $z_i \in D$ pour tout $i = 1, \cdots, n$;
- ou bien il existe $i_+, i_- \in \{1, \cdots, n\}$, $i_+ \neq i_-$ tels que $z_{i_+} \in H^{++}$ et $z_{i_-} \in H^{--}$.

Dans la suite on désignera par $\mathcal{C}_{R,z_0}$ le cercle de centre $z_0 \in \mathbf{C}$ et de rayon R. On notera aussi :

$$\mathcal{D}^{--}_{R,z_0} = \Big\{z \in \mathbf{C} :\ |z - z_0| < R\Big\}$$
$$\text{et } \mathcal{D}^{++}_{R,z_0} = \Big\{z \in \mathbf{C} :\ |z - z_0| > R\Big\}.$$

11) Supposons que ξ et δ_ξ appartiennent au cercle $\mathcal{C}_{R,z_0}$. Montrer que
- ou bien $z_i \in \mathcal{C}_{R,z_0}$ pour tout $i = 1, \cdots, n$;
- ou bien il existe $i_+, i_- \in \{1, \cdots, n\}$, $i_+ \neq i_-$ tels que $z_{i_+} \in \mathcal{D}^{++}_{R,z_0}$ et $z_{i_-} \in \mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$.

12) Soit $\mathcal{C}_{R,z_0}$ un cercle tel que $\{z_1, \cdots, z_n\} \subset \mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$. Montrer que si $\xi \in \mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$ (resp. $\xi \in \mathcal{D}^{++}_{R,z_0}$) alors $\delta_\xi \in \mathcal{D}^{++}_{R,z_0}$ (resp. $\delta_\xi \in: \mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$).
On admettra que si a et b sont des points distincts de $\mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$ (resp. de $\mathcal{D}^{++}_{R,z_0}$) alors il existe un cercle passant par a et b et ne rencontrant pas $\mathcal{C}_{R,z_0}$.

D. Polynômes apolaires

13) Soit $P(Z) = \lambda \prod_{i=1}^n (Z - z_i)$ un polynôme de degré n et $\xi \in \mathbf{C} - \{z_1, \cdots, z_n\}$. Pour chaque $z \in \mathbf{C} - \{z_1, \cdots, z_n\}$, exprimer $\frac{P'(z)}{P(z)}$ en fonction des $\frac{1}{z - z_i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$. En déduire que

$$\delta_\xi(P) = \xi - n\frac{P(\xi)}{P'(\xi)}$$

où $\delta_\xi(P)$ est le centre de gravité de $\{z_1, \cdots, z_n\}$ relativement à ξ.

14) Soit $P(Z) = \prod_{i=1}^n (Z - z_i) \in \mathbf{C}[Z]$ de degré n ; montrer que les zéros $z \in \overline{\mathbf{C}}$ de $A_\xi P(Z)$ sont :
- les $z_i \in \mathbf{C}$ pour $i = 1, \cdots, n$ tels que $\mu_{z_i}(P) \geqslant 2$;
- les $z \in \mathbf{C} - \{z_1, \cdots, z_n\}$ tels que le centre de gravité de $\{z_1, \cdots, z_n\}$ relativement à z est égal à ξ ;
- $z = \infty \in \overline{\mathbf{C}}$ si $\xi = \delta_\infty(P)$ le centre de gravité usuel de $\{z_1, \cdots, z_n\}$.

15) Le système dérivé de $\{z_1, \cdots, z_n\}$ par rapport à ξ est l'ensemble

$$\{z'_1, \cdots, z'_{n-1}\}$$

des $n-1$ zéros de $A_\xi P(Z) \in \mathbf{C}_{n-1}[Z]$, où $P(Z) = \prod_{i=1}^n (Z - z_i)$. Montrer que si un cercle $\mathcal{C}_{R,z_0}$ est tel que $\{z_1, \cdots, z_n\} \subset \mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$ et $\xi \notin \mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$ alors $\{z'_1, \cdots, z'_n\} \subset \mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$.

16) Deux polynômes $P(Z) = \lambda \prod_{i=1}^n (Z - z_i)$ et $Q(Z) = \mu \prod_{i=1}^n (Z - z'_i)$ sont dits apolaires si $A_{z_1} A_{z_2} \cdots A_{z_n} Q(Z)$ est le polynôme nul. On admet (calcul élémentaire) que cette condition est équivalente à

$$a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n b_0 = 0$$

de sorte que cette condition est aussi équivalente à $A_{z'_1} \cdots A_{z'_n} P(Z) = 0$.

Montrer que si P et Q sont apolaires et si $\mathcal{C}_{R,z_0}$ est un cercle tel que $\{z_1, \cdots, z_n\} \subset \mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$ alors il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $z'_i \in \mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer k tel que $A_{\xi_1} \cdots A_{\xi_{k+1}} P$ est le polynôme nul et $A_{\xi_1} \cdots A_{\xi_k} P \neq 0$. Utiliser alors les questions 6) et 15).

17) Soient a, b deux points distincts de $\mathbf{C}$. Montrer qu'il existe $b_0, \cdots, b_{n-1} \in \mathbf{C}$ tels que pour tout $P(Z) = a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 Z + \cdots + \binom{n-1}{n-2} a_{n-2} Z^{n-2} + a_{n-1} Z^{n-1} \in \mathbf{C}_{n-1}[Z]$, on ait

$$\int_a^b P(z)dz = a_0 b_{n-1} - \binom{n-1}{1} a_1 b_{n-2} + \binom{n-1}{2} a_2 b_{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} b_0,$$

où on a posé $\int_a^b P(z)dz = \int_0^1 P(a + t(b-a))dt$.

18) Avec les notations de la question précédente on pose

$$\Delta_{a,b;n}(Z) = b_0 + \binom{n-1}{1} b_1 Z + \cdots + b_{n-1} Z^{n-1}.$$

Montrer que $\Delta_{a,b;n}(Z) = \frac{(Z-a)^n - (Z-b)^n}{n}$.
Indication : on pourra appliquer la question précédente avec un polynôme P bien choisi.

19) Soit $P(Z) \in \mathbf{C}_n[Z]$ tel que $P(a) = P(b)$, où a et b sont deux nombres complexes distincts. Montrer alors que $P'(Z)$ et $\Delta_{a,b;n}(Z)$ sont apolaires et prouver le théorème 1.

Fin du problème

Proposition de corrigé

1) Pour le rayon de convergence appliquer par exemple le critère de d'Alembert.

On écrit $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z_0+h)^n$ sous la forme $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n + \left(\sum_{n\geqslant 0} a_{n+1}(n+1)z^n\right)h + h\varepsilon_{z_0}(h)$, en développant chacun des produits ce qui définit $\varepsilon_{z_0}(h)$ comme une série en h de rayon de convergence infini et de premier terme nul ; d'où le résultat.

2) Prendre $f(z) = e^{i\pi z} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(i\pi)^n}{n!} z^n$ dont le rayon de convergence est infini. On a $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$. Pour $z = x+iy$ on a $f(z) = e^{-\pi y}(cos(\pi x) + i\sin(\pi_x))$ qui ne s'annule donc jamais ainsi que sa dérivée (complexe) égale à $i\pi f(z)$.
Remarque : le théorème de Rolle ne peut pas être correct pour n'importe quelle fonction holomorphe. Pour s'assurer de l'existence de points critiques, le plus simple est de considérer des fonctions polynomiales.

3) On a $P(1) = \left(\frac{-i(\cos(\pi/n)+isin(\pi/n))}{\sin(\pi/n)}\right)^n = (-i)^n e^{i\pi}(\sin\pi/n)^{-n}$ et $P(-1) = \left(\frac{-i(\cos(\pi/n)-isin(\pi/n))}{\sin(\pi/n)}\right)^n = (-i)^n e^{-i\pi}(\sin\pi/n)^{-n}$ et donc $P(1) = P(-1)$. Par ailleurs P' possède un unique zéro, à savoir $i\text{cotg}\pi/n$ qui tend vers $+\infty$ avec n. En particulier on voit que l'énoncé du début du problème est optimal.

4) Pour ξ fini et $0 \leqslant k \leqslant n-1$, le terme en Z^k du membre de droite est

$$na_k\binom{n}{k} - a_k k\binom{n}{k} + \xi a_{k+1}(k+1)\binom{n}{k+1} = n(a_k + \xi a_{k+1})\binom{n-1}{k},$$

en utilisant $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$. Par ailleurs le terme en Z^n est $-n+n=0$.

Pour $\xi = \infty$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$, le terme en Z^k est $(k+1)\binom{n}{k+1}a_{k+1} = na_{k+1}\binom{n-1}{k}$.

5) L'application A_ξ est clairement linéaire ce qui prouve a).
Pour b), le résultat est connu pour $\xi = \infty$; pour ξ fini on a

$$\begin{aligned} Q(Z)\Big[(\xi - Z)P'(Z) + nP(Z)\Big] + P(Z)\Big[(\xi - Z)Q'(Z) + mQ(Z)\Big] \\ = (\xi - Z)\Big(P(Z)Q(Z)\Big)' + (m+n)P(Z)Q(Z). \end{aligned}$$

Pour c) le résultat est bien connu pour $\xi_1 = \xi_2 = \infty$. Pour ξ_1 et ξ_2 finis, on a

$$\begin{aligned} (\xi_1 - Z)\Big[(\xi_2 - Z)P'(Z) + nP(Z)\Big]' + (n-1)\Big[(\xi_2 - Z)P' + nP(Z)\Big] = \\ (\xi_1 - Z)(\xi_2 - Z)P^{(2)}(Z) + (n-1)(\xi_1 + \xi_2 - 2Z)P'(Z) + n(n-1)P(Z) \end{aligned}$$

qui est symétrique en ξ_1 et ξ_2.
Finalement si $\xi_1 = \xi$ est fini et $\xi_2 = \infty$, on a

$$\Big[(\xi - Z)P'(Z) + nP(Z)\Big]' = (\xi - Z)P^{(2)}(Z) + (n-1)P(Z)$$

d'où le résultat.

6) Pour $\xi = \infty$, on a $P'(z) = 0$ et donc P est un polynôme constant et les n zéros de P sont égaux à ∞. Pour ξ fini, on obtient l'équation différentielle linéaire $(\xi - z)P'(z) + nP(z) = 0$ ce qui fournit $P(z) = \lambda(z - \xi)^n$.

7) Notons $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ l'affixe du centre Ω du cercle passant par O ; on note D le point d'affixe $2z_0$. Pour tout M du cercle considéré, le triangle AMD est rectangle en M de sorte que si $z = \rho e^{i\theta}$ est l'affixe de M, on a

$$2\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) = \rho.$$

Réciproquement tout point d'affixe $z = \rho e^{i\theta}$ vérifiant cette équation appartient au cercle considéré.

De la même façon, notons A d'affixe $\rho_0 e^{i\theta_0}$, le projeté orthogonal de O sur la droite $\mathcal{D}$ considéré. On a alors

$$\rho \cos(\theta - \theta_0) = \rho_0,$$

et réciproquement tout point d'affixe $\rho e^{i\theta}$ vérifiant cette équation appartient à la droite considérée.

8) Quitte à translater l'origine du repère, on se ramène à $\xi = 0$; on remarque qu'un point M d'affixe $\rho e^{i\theta}$ du cercle $\mathcal{C}(\rho_0, \theta_0)$ de centre $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ et passant par O, vérifie $2\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) = \rho$ et s'envoie sur M' d'affixe $\rho' e^{i\theta'}$ avec $\rho' = \rho^{-1}$ et $\theta' = -\theta$ de sorte que

$$\rho' \cos(\theta' + \theta_0) = (2\rho_0)^{-1}$$

et M' décrit une droite ne passant pas par O. Par ailleurs comme $f_{1,0;0}$ est involutive on en déduit aussi que l'image d'une droite ne passant pas par O est un cercle passant par O.

9) Pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a $z'_i = \frac{a}{z_i - \xi} + b$ de sorte que

$$\delta'_\infty = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{z_i - \delta} + b,$$

avec $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i - \delta} = \frac{1}{\delta_\xi - \xi}$ et donc $\delta' = \frac{a}{\delta_\xi - \xi} + b$.

10) Supposons qu'il existe i tel que $z_i \in H^{++}$ de sorte que si pour tout $k \neq i$ on avait $z_k \in D \cup H^{++}$, on aurait $\sum_{k \neq i}(ax_i + by_i + c) \geqslant 0$ et comme $ax_k + by_k + c > 0$, pour $\delta_\infty = x_\infty + iy_\infty$ on aurait alors $0 = ax_\infty + by_\infty + c > 0$. Le cas où il existe i tel que $z_i \in H^{--}$ se traite de manière similaire.

11) Supposons que $O \in H^{++}$ et appliquons f_ξ ; comme l'image de $\mathcal{D}^{++}_{R,z_0}$ (resp. $\mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$) est H^{++} (resp. H^{--}) et réciproquement car f_ξ est involutive, le résultat se déduit directement de la question précédente.

12) Si ξ et δ_ξ sont dans $\mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$ (resp. $\mathcal{D}^{++}_{R,z_0}$) alors, en utilisant le résultat admis de l'énoncé, le résultat découle directement de la question précédente où le cercle passant par ξ et δ_ξ ne sépare pas les z_i.

Montrons rapidement comment prouver le résultat admis de l'énoncé en restant dans l'esprit du problème. Supposons par exemple que ξ et δ_ξ sont dans $\mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$ et appliquons f_ξ à la situation ; $f_\xi(\mathcal{C}_{R,z_0})$ est un cercle $\mathcal{C}_{R',z'_0}$ contenant ξ (obtenu à partir de $\mathcal{C}_{R,z_0}$ en appliquant une homothétie de centre ξ) et ne contentant pas $f_\xi(\delta_\xi)$. On considère alors une droite passant par $f_\xi(\delta_\xi)$ et ne rencontrant pas $\mathcal{C}_{R',z'_0}$ (prendre la perpendiculaire passant par $f(\delta_\xi)$ à la droite passant par $f(\delta_\xi)$ et z'_0) et ne passant donc pas par ξ. L'image de cette droite par f_ξ est alors un cercle qui convient. Le cas ξ et δ_ξ dans $\mathcal{D}^{++}_{R,z_0}$ se traite de la même manière.

13) On a $\lambda^{-1}P'(Z) = \sum_{i=1}^n \prod_{k \neq i}(Z - z_k)$ et donc

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z - z_i}.$$

Ainsi $\delta_\xi = \xi - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi - z_i}}$ et donc $\delta_\xi = \xi - n\frac{P(\xi)}{P'(\xi)}$.

14) Si z est un zéro multiple de $P(Z)$ alors il est clairement un zéro de $A_\xi P(Z)$ de multiplicité un de moins.

Si $z \in \mathbf{C}$ est un zéro de $A_\xi P(Z)$ on a alors $\xi = z - \frac{nP(z)}{P'(z)} = \delta_z(P)$ d'après 12).

Enfin ∞ est un zéro de $A_\xi P$ si et seulement si $\deg A_\xi P < n - 1$ soit d'après 3) si $\xi = -a_{n-1}/a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i$ avec ici $a_n = 1$.

15) Comme $\delta_\infty(P) \in \mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$ d'après l'inégalité triangulaire, on déduit de la question précédente que ∞ n'est pas un zéro de $A_\xi P$. Les zéros multiples appartiennent clairement à $\mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$ et en ce qui concerne les autres zéros d'après la question précédente on a $\delta_z(P) = \xi \notin \mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$ de sorte que d'après 12) $z \in \mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$ d'où le résultat.

16) Supposons que $z'_1, \cdots, z'_k$ appartiennent à $\mathcal{D}^{++}_{R,z_0}$ et $A_{z'_1} \cdots A_{z'_{k+1}} P$ est le polynôme nul alors que $A_{z'_1} \cdots A_{z'_k} P$ n'est pas le polynôme nul ; d'après la question précédente les zéros de de $A_{z'_1} \cdots A_{z'_k} P$ appartiennent à $\mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$ et d'après 6) ils sont tous égaux à z'_{k+1} et donc $z'_{k+1} \in \mathcal{D}^{--}_{R,z_0}$.

17) L'application qui à $(a_0, \cdots, a_n)$ associe $\int_a^b (a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}) dz$ est une forme linéaire, d'où l'existence des b_i.

18) Pour obtenir l'expression de $\Delta_{a,b;n}(x)$ il suffit de prendre $a_k = (-1)^k x^{n-1-k}$, c'est à dire $P(z) = (x-z)^{n-1}$ ce qui donne

$$\Delta_{a,b;n}(x) = \int_a^b (x-z)^{n-1} dz = \frac{(x-a)^n - (x-b)^n}{n}.$$

19) Comme $\int_a^b P'(z) dz = P(b) - P(a) = 0$, d'après la question précédente les polynômes P' et $\Delta_{a,b;n}$ sont apolaires. Or les zéros de $\Delta_{a,b;n}$ sont $\xi_k = \frac{a+b}{2} + i \frac{a-b}{2} \cot \frac{k\pi}{n}$ et le résultat découle de la question 16).