Wronskien et problème de Waring

Dans tout le texte, la lettre $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbf{C}$ celui des nombres complexes. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on notera $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}$ le coefficient binomial.

A. Quelques propriétés élémentaires du Wronskien

1) Soient $d_1, \cdots, d_n$ des nombres réels. On note

$$V(d_1, \cdots, d_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1^{n-1} & d_2^{n-1} & \cdots & d_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

le déterminant de Vandermonde de $(d_1, \cdots, d_n)$. Rappeler la formule de ce déterminant.

2) Pour tout $d \in \mathbf{R}$ et $k \geqslant 1$, on note

$$(d)_k = d(d-1)\cdots(d-k+1),$$

et on introduit le déterminant

$$D(d_1, \cdots, d_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (d_1)_1 & (d_2)_1 & \cdots & (d_n)_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (d_1)_{n-1} & (d_2)_{n-1} & \cdots & (d_n)_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer que $D(d_1, \cdots, d_n) = V(d_1, \cdots, d_n)$.

3) On fixe à présent un intervalle $I =]a, b[$ de $\mathbf{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Soient $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions d'une variable réelle t, dérivables $n-1$ fois sur I ; leur *Wronskien* $W(f_1, \cdots, f_n)$ est la fonction

$$W(f_1, \cdots, f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Montrer que le Wronskien des fonctions monômiales $a_1 x^{d_1}, \cdots, a_n x^{d_n}$ est égal à

$$V(d_1, \cdots, d_n) x^{d_1 + \cdots + d_n - \binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

4) Soit g une fonction dérivable $(n-1)$-fois, montrer que

$$W(f_1 g, f_2 g, \cdots, f_n g) = g^n W(f_1, \cdots, f_n).$$

5) Pour f_1 non nulle, montrer que

$$W(f_1, \cdots, f_n) = f_1^n W\Big((\frac{f_2}{f_1})', (\frac{f_3}{f_1})', \cdots, (\frac{f_n}{f_1})'\Big)$$

B. Annulation du wronskien

6) Montrez que si $f_1, \cdots, f_n$ sont linéairement dépendantes sur I alors $W(f_1, \cdots, f_n)$ est identiquement nulle sur cet intervalle.

7) On suppose que $W(f_1, f_2) = 0$ sur I et que $f_1 f_2$ ne s'annule pas sur I. Montrer alors que f_1 et f_2 sont linéairement dépendantes.

8) Donner un exemple de fonctions f_1, f_2 linéairement indépendantes sur I telles que $W(f_1, f_2) = 0$.

9) En utilisant la question 5) montrer que si $W(f_1, \cdots, f_n)$ est la fonction nulle sur I, alors il existe un sous-intervalle $J = [b, c] \subset I$ avec $b < c$, sur lequel $f_1, \cdots, f_n$ sont linéairement dépendantes.

10) On suppose maintenant que les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont développables en séries entières au voisinage de $0 \in I$ et qu'elles sont linéairement indépendantes. On définit l'*ordre* d'une série entière non nulle $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ comme le plus petit entier naturel d tel que $a_d \neq 0$.
Démontrer qu'il existe une matrice inversible $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$(f_1, \ldots, f_n)\mathrm{A} = (g_1, \ldots, g_n),$$

où les $g_1, \ldots, g_n$ sont des fonctions développables en série entière non nulles dont les ordres $d_1, \ldots, d_n$ sont deux à deux distincts.

11) On souhaite démontrer qu'il existe un réel $C \neq 0$ tel que

$$W(g_1, \ldots, g_n)(x) = C x^{d_1 + \ldots + d_n - \binom{n}{2}}(1 + o(1))$$

au voisinage de l'origine.

(a) Traiter le cas où pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a $d_i \geqslant n-1$.

(b) On choisit un entier a tel que pour tout $i = 1, \cdots, n$, on ait $d_i + a \geqslant n-1$. En utilisant la question 4) avec $g(x) = x^a$, montrer le résultat annoncé.

12) Déduire des deux questions précédentes que $W(f_1, \cdots, f_n)$ est la fonction nulle sur I si et seulement si $f_1, \cdots, f_n$ sont linéairement dépendantes.

C. Problème de Waring sur $\mathbf{C}[X]$

Pour n fixé, on se propose d'étudier les équations

$$X = f_1(X)^n + \cdots + f_k(X)^n,$$

en les inconnues $f_1(X), \cdots, f_k(X) \in \mathbf{C}[X]$ et plus particulièrement le plus petit entier k pour lequel cette équation possède des solutions. On notera ce plus petit entier $k(n)$.

13) On note $\Delta f(X) = f(X+1) - f(X)$ et $\Delta^p f = \Delta\Big(\Delta^{p-1} f\Big)$. Montrer que $\Delta^{n-1}(X^n)$ est de la forme $aX + b$ avec $a \neq 0$, et en déduire que $k(n) \leqslant n$.
On notera en particulier que $k(n)$ est fini.

14) Montrer que tout $g \in \mathbf{C}[X]$ peut s'écrire sous la forme

$$g(X) = g_1(X)^n + \cdots + g_{k(n)}(X)^n.$$

15) Montrer que $k(2) = 2$.

16) Dans cette question nous allons montrer que $n < k^2(n) - k(n)$.

(a) Soit $X = f_1^n(X) + \cdots + f_{k(n)}^n(X)$ avec $f_i \in \mathbf{C}[X]$. On considère les Wronskiens

$$W_1 = W(f_1^n, \cdots, f_{k(n)}^n) \quad \text{et} \quad W_2 = W(X, f_2^n, \cdots, f_{k(n)}^n).$$

Montrer que $W_1 = W_2$ puis que W_1 n'est pas le polynôme nul.

(b) Montrer que W_1 est divisible par $\prod_{i=1}^{k(n)} f_i^{n-k(n)+1}$.

(c) Montrer que

$$\deg W_2 \leqslant 1 + n\Big(\sum_{i=2}^{k(n)} \deg f_i\Big) - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2}.$$

(d) Déduire de (b) et (c) que

$$n \deg f_1 \leqslant (k(n)-1) \sum_{i=1}^{k(n)} \deg f_i - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2} + 1.$$

(e) Montrer que $n < k(n)^2(n) - k(n)$.

Fin du problème

Proposition de corrigé

1) Le déterminant de Vandermonde est égal à $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(d_j-d_i)$.

2) Par opération simples sur les colonnes de la matrice associée à $D(d_1,\cdots,d_n)$, en utilisant que $(d)_k$ est un polynôme unitaire de degré k en d, on la transforme aisément en la matrice de Vandermonde associée à $(d_1,\cdots,d_n)$.

3) Par définition il s'agit de calculer le déterminant de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} a_1x^{d_1} & a_2x^{d_2} & \cdots & a_nx^{d_n} \\ a_1d_1x^{d_1-1} & a_2d_2x^{d_2-1} & \cdots & a_nd_nx^{d_n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1(d_1)_{n-1}x^{d_1-(n-1)} & a_2(d_2)_{n-1}x^{d_2-(n-1)} & \cdots & a_n(d_n)_{n-1}x^{d_n-(n-1)} \end{pmatrix}$$

Ce déterminant est alors égal à $\prod_{i=1}^n a_ix^{d_1+\cdots+d_n-\binom{n}{2}}$ fois le déterminant $D(d_1,\cdots,d_n)$ d'où le résultat d'après la question précédente.

4) On a

$$W(f_1g,\cdots,f_ng)=\begin{vmatrix} f_1g & f_2g & \cdots & f_ng \\ f_1'g+f_1g' & f_2'g+f_2g' & \cdots & f_n'g+f_ng' \\ f_1''g+2f_1'g'+f_1g'' & \cdots & & \\ \vdots & & & \end{vmatrix}.$$

On factorise g dans la première ligne puis on soustrait à la deuxième ligne g' fois la première ce qui donne

$$W(f_1g,\cdots,f_ng)=g\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1'g & f_2'g & \cdots & f_n'g \\ f_1''g+2f_1'g'+f_1g'' & \cdots & & \\ \vdots & & & \end{vmatrix}.$$

On factorise g sur la deuxième ligne puis on soustrait à la troisième ligne g'' fois la première et $2g'$ fois la seconde. En continuant ce procédé on arrive au résultat.

5) D'après la question précédente si f_1 est non nul alors on a

$$W(f_1,\cdots,f_n)=f_1^nW(1,\frac{f_2}{f_1},\cdots,\frac{f_n}{f_1})$$

ce qui en développant $W(1,\frac{f_2}{f_1},\cdots,\frac{f_n}{f_1})$ selon la première colonne donne le résultat.

6) Si $f_1, \cdots, f_n$ sont linéairement dépendantes alors les vecteurs colonnes de la matrice dont $W(f_1, \cdots, f_n)$ est le déterminant sont clairement liées quel que soit t de sorte que $W(f_1, \cdots, f_n) \equiv 0$.

7) L'égalité $f_1 f_2' = f_2 f_1'$ s'écrit puisque f_1 et f_2 ne s'annulent pas, $\frac{f_1'}{f_1} = \frac{f_2'}{f_2}$ ce qui s'intègre en $f_1 = K f_2$, i.e. f_1, f_2 sont linéairement dépendantes.

8) Soient $f_1(t) = t^2$ et $f_2(t) = t|t|$. On vérifie aisément que $W(f_1, f_2) = 0$ alors que f_1 et f_2 ne sont pas linéairement dépendantes sur $\mathbf{R}$.

9) On raisonne par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ étant trivial supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$ et $W(f_1, \cdots, f_n) \equiv 0$ sur un intervalle d'intérieur non vide. Si $f_1 \equiv 0$ sur cet intervalle, le résultat est clair, sinon il existe un sous-intervalle d'intérieur non vide sur lequel f_1 ne s'annule pas. D'après la question 5) on a $W\Big((\frac{f_2}{f_1})', (\frac{f_3}{f_1})', \cdots, (\frac{f_n}{f_1})'\Big) \equiv 0$ sur cet intervalle de sorte que d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un sous-intervalle d'intérieur non vide ainsi que des nombres réels $c_2, \cdots, c_n$ non tous nuls tels que

$$c_2(\frac{f_2}{f_1})' + c_3(\frac{f_3}{f_1})' + \cdots + c_n(\frac{f_n}{f_1})' \equiv 0$$

i.e. $\left(\frac{c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n}{f_1}\right)' \equiv 0$ de sorte qu'il existe une constante c_1 tel que $c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = c_1 f_1$ d'où le résultat.

10) Soit m_1 le minimum des ordres de $f_1, \ldots, f_n$ à l'origine ; quitte à renuméroter, supposons que f_1 soit d'ordre m_1. En retranchant des multiples convenables de f_1 à $f_2, \ldots, f_n$, on obtient des séries entières $f_{1,1} = f_1, f_{2,1}, \ldots, f_{n,1}$ linéairement indépendantes et telles que $f_{i,1}$ soit d'ordre $> m_1$ pour tout $i \geqslant 2$. En itérant ce procédé, on aboutit à des séries entières $g_1, \ldots, g_n$ linéairement indépendantes (donc en particulier non nulles) dont les ordres sont deux à deux distincts. L'écriture matricielle se justifie en observant que les g_i sont des combinaisons linéaires des f_i et que les deux familles sont libres.

11) a) Il existe par hypothèse des entiers $d_1, \ldots, d_n$ tous distincts tels que $g_i(x) = x^{d_i} h_i(x)$, où h_i est une fonction développable en série entière au voisinage de 0 telle que $h_i(0) = 1$.

Par hypothèse on a $d_i \geqslant n-1$ pour tout i et écrivons $g_i(x) = a_i x^{d_i}(1+o(1))$ au voisinage de 0. On a alors $g_i^{(k)}(x) = a_i (d_i)_k x^{d_i - k}(1 + o(1))$ pour $k \in$

$\{0, \ldots, n-1\}$. On en déduit

$$\begin{aligned} W(g_1(x), \ldots, g_n(x)) &= \begin{vmatrix} a_1 x^{d_1}(1+o(1)) & \ldots & a_n x^{d_n}(1+o(1)) \\ a_1 d_1 x^{d_1-1}(1+o(1)) & \ldots & a_n d_n x^{d_n}(1+o(1)) \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 (d_1)_{n-1} x^{d_1-(n-1)}(1+o(1)) & \ldots & a_n (d_n)_{n-1} x^{d_n-(n-1)}(1+o(1)) \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{d} a_i \cdot x^{d_1+\ldots+d_n-\frac{n(n-1)}{2}} D(x) \end{aligned}$$

(factoriser $x^{d_j-(n-1)}$ à la j-ème colonne puis x^{n-i} à la i-ème ligne) avec

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1+o(1) & \ldots & 1+o(1) \\ d_1(1+o(1)) & \ldots & d_n(1+o(1)) \\ \vdots & & \vdots \\ (d_1)_{n-1}(1+o(1)) & \ldots & (d_n)_{n-1}(1+o(1)) \end{vmatrix}.$$

avec $D(0) = D(d_1, \cdots, d_n) = V(d_1, \cdots, V_n) \neq 0$.

b) D'après la question 4), on a

$$X^{na} W(g_1, \ldots, g_n) = W(X^a g_1, \ldots, X^a g_n) = C X^{na+d_1+\ldots+d_n-\binom{n}{2}}(1+o(1))$$

et la conclusion découle de l'unicité du développement en série entière.

12) D'après la question 10), on a

$$W(f_1, \ldots, f_n) = (\det(A))^{-1} W(g_1, \ldots, g_n),$$

et d'après la question 11), $W(g_1, \cdots, g_n)$ n'est pas la fonction nulle d'où le résultat.

13) Notons que $\deg(\Delta f) = \deg f - 1$ de sorte que pour $f(X) = X^n$, on a

$$\Delta^{n-1}(X^n) = (X+n-1)^n + c_1(X+n-2)^n + \cdots + c_{n-1} X^n = aX + b,$$

avec $a \neq 0$ puisque $\deg \Delta^{n-1}(X^n) = 1$. On effectue alors le changement de variable $Y = aX + b$, on obtient $Y = f_1^n(Y) + \cdots + f_n^n(Y)$ et donc $k(n) \leqslant n$.

14) Par définition de $k(n) \leqslant n$, d'après la question précédente, il existe $X = f_1(X)^n + \cdots + f_{k(n)}(X)^n$ alors pour $g \in \mathbf{C}[X]$, on a $g(X) = f_1^n(g(X)) + \cdots + f_{k(n)}^n((g(X))$.

15) Comme $f^2(X)$ est de degré pair, $k(2) > 1$. L'inégalité $k(2) \leqslant 2$ résulte simplement de l'identité $(X + \frac{1}{4})^2 - (X - \frac{1}{4})^2 = X$.

16) (a) De l'égalité $X = f_1^n(X) + \cdots + f_{k(n)}^n(x)$, on en déduit que la première colonne de W_2 s'obtient à partir de la première colonne de W_1 en ajoutant une combinaison linéaire des autres colonnes de W_1 de sorte que $W_1 = W_2$.

Si W_2 s'annule sur un intervalle d'intérieur non vide, d'après la question 9), il existe un sous-intervalle d'intérieur non vide tel que $x, f_2^n, \cdots, f_{k(n)}^n$ sont linéairement dépendants ; une telle égalité sur un ensemble infini implique l'égalité des polynômes. Par minimalité de $k(n)$, ce ne peut pas être et donc W_1 n'est pas le polynôme nul.

(b) La dérivée r-ème de f_i^n est divisible par f_i^{n-r} ; ainsi la i-ème colonne de W_1 est divisible par $f_i^{n-k(n)+1}$ et donc W_1 est divisible par $\prod_{i=1}^{k(n)} f_i^{n-k(n)+1}$.

(c) En multipliant la j-ème ligne de W_2 par X^{j-1}, les termes non nuls de la i-ème colonne sont de degré $n \deg f_i$ de sorte que

$$\deg W_2 \leqslant 1 + n \sum_{i=2}^{k(n)} \deg f_i - 1 - 2 - \cdots - (k(n)-1) = n \sum_{i=2}^{k(n)} \deg f_i - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2} + 1.$$

Remarque : la formule du déterminant via le groupe symétrique n'étant plus au programme, on peut le faire par récurrence en utilisant le développement du déterminant par rapport à une ligne (ou une colonne).

(d) On en déduit donc que

$$(n - k(n) + 1) \sum_{i=1}^{kn)} \deg f_i \leqslant \deg W_1 = \deg W_2 \leqslant n \sum_{i=2}^{k(n)} \deg f_i - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2} + 1$$

soit $n \deg f_1 \leqslant (k(n)-1) \sum_{i=1}^{k(n)} \deg f_i - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2} + 1$.

(e) Si on suppose que f_1 est le polynôme de degré maximal alors

$$n \deg f_1 \leqslant k(n)(k(n)-1) \deg f_1 - \frac{k(n)(k(n)-1)}{2} + 1 \leqslant k(n)(k(n)-1) \deg f_1$$

car pour $k \geqslant 3$, on a $-k(k-1) < 0$. Après division par $\deg f_1$, on obtient $n < k(n)(k(n)-1)$ d'où le résultat.