# Notations

— Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on notera $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial où $n! = n(n-1)\cdots 2.1$.

— On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ les fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On dit que $a$ est un zéro d'ordre $m > 0$ de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ si

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Dans la suite du texte quand on liste les zéros d'un polynôme on répètera chaque racine autant de fois que sa multiplicité : ainsi les racines de $X^3(X-1)^2$ sont $0, 0, 0, 1, 1$.

— On note $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ l'opérateur de dérivation, i.e. $D(f) = f'$. Pour $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$, on note $Q(D)$ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} Q(D) \,:\, \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \\ f &\longmapsto \sum_{k=0}^n a_k D^k(f), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$Q(D)f(x) = \sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(x)$$

où $f^{(k)}$ est la fonction dérivée $k$-ème.

# Log-concavité des suites

Soit $(a_0, \cdots, a_n)$ une suite à valeurs réelles. On dira qu'elle est

— *unimodulaire* s'il existe $0 \leqslant j \leqslant n$ tel que $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_j \geqslant a_{j+1} \geqslant \cdots \geqslant a_n$ ;

— *log-concave* si pour tout $1 \leqslant j \leqslant n-1$, on a $a_j^2 \geqslant a_{j-1}a_{j+1}$ ;

— *ultra log-concave* si $(\frac{a_k}{\binom{n}{k}})_{k=0,\cdots,n}$ est log-concave.

**1** ▷ Montrer que la suite binomiale $(\binom{n}{k})_{k=0,\cdots,n}$ est log-concave.

On calcule simplement

$$\frac{\binom{n}{k})^2}{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}} = \frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} > 1.$$

**2** ▷ Montrer que si $(a_k)_{k=0,\cdots,n}$ est ultra log-concave, alors elle est log-concave.

Le produit d'une suite log-concave par une suite positive log-concave est clairement log-concave : on utilise alors la suite binomiale qui est log-concave d'après ce qui précède.

**3** ▷ Montrer que si $(a_k)_{k=0,\cdots,n}$ est strictement positive et log-concave, alors elle est unimodulaire.

Soit $j$ tel que $a_j$ est maximal. L'inégalité $a_{j-1}^2 \geqslant a_{j-2}a_j$ (resp. $a_{j+1} \geqslant a_j a_{j+2}$) implique alors $a_{j-2} \leqslant a_{j-1}$ (resp. $a_{j+2} \leqslant a_{j+1}$). On raisonne alors de proche en proche par récurrence...

# Polynômes réels à racines toutes réelles

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbf{R}[X]$ avec $a_n \neq 0$. Il est dit à racines toutes réelles si toutes ses racines complexes sont en fait réelles, i.e. $P(z) = 0$ implique $z \in \mathbf{R}$. On suppose dans cette question que $P$ est à racines toutes réelles.

**4** ▷ Montrer que $P'$ est à racines toutes réelles.
*Indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle en veillant aux multiplicités des racines.*

On écrit $P(X) = a\prod_{i=1}^{s}(X - a_i)^{n_i}$ avec $a_1 < \cdots < a_s$ et $n_1, \cdots, n_s > 0$. D'après le cours, $b_1, \cdots, b_s$ sont racines de $P$ avec multiplicité $b_i - 1$. De plus en appliquant le théorème de Rolle à la fonction $P(x)$ sur chacun des intervalles $]b_i, b_{i+1}[$, on obtient une racine supplémentaire à $P'$. On a ainsi trouvé $\sum_{i=1}^{s}(n_i - 1) + s - 1 = deg(P')$ racines pour $P'$ qui est donc scindé à racines toutes réelles.

**5** ▷ Montrer que $Q(X) = X^n P(1/X)$ est un polynôme à racines toutes réelles.
*Indication : on commencera par préciser le degré de $Q(X)$.*

On note $x_i$ les racines non nulles de $P(X) = \lambda X^r \prod_i (X - x_i)$. On a alors $Q(X) = \lambda \prod_i (1 - x_i X)$ avec pour racines les $1/x_i$ pour $x_i \neq 0$ : noter que le degré de $Q$ est celui de $P$ moins la multiplicité de la racine $0$ dans $P$.

**6** ▷ Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on considère $Q_1(X) = P^{(k-1)}(X)$ puis $Q_2(X) = X^{n-k+1}Q_1(X^{-1})$ et enfin $Q(X) = Q_2^{(n-k-1)}(X)$. Montrer que $Q(X)$ est un polynôme de degré au plus $2$ à racines toutes réelles et en déduire que $(a_k)_{k=0,\cdots,n}$ est ultra log-concave.

On calcule

$$Q_1(X) = (k-1)!a_{k-1} + k!a_k X + \frac{(k+1)!}{2}a_{k+1}X^2 + \cdots$$

puis

$$Q_2(X) = (k-1)!a_{k-1}X^{n-k+1} + k!a_k X^{n-k} + \frac{(k+1)!}{2}a_{k+1}X^{n-k-1} + \cdots$$

et enfin

$$Q(X)=\frac{(n-k+1)!(k-1)!a_{k-1}}{2}X^2+(n-k)!k!a_kX+\frac{(n-k-1)!(k+1)!a_{k+1}}{2}.$$

D'après ce qui précède, il est à racines toutes réelles de sorte que son discriminant doit être positif, ce qui donne (en divisant par $(n!)^2$,

$$\left(\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right)^2 \geqslant \frac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}}\frac{a_{k-1}}{\binom{n}{k-1}}.$$

On considère comme précédemment un polynôme $P\in\mathbf{R}[X]$ de degré $n$ à racines toutes réelles.

**7** ▷ Soit $\alpha\in\mathbf{R}$. Montrer que $e^{\alpha x}D(e^{-\alpha x}P(x))$ est un polynôme à racines toutes réelles. *Indication : on pourra à nouveau utiliser le théorème de Rolle en considérant en outre le comportement en $\pm\infty$.*

Pour $\alpha=0$, on l'a déjà vu (théorème de Rolle classique). Pour $\alpha\neq 0$, on note que $f(x):=e^{\alpha x}D(e^{-\alpha x}P(x))=P'(x)-\alpha P(x)$ est un polynôme de degré $n$. On écrit comme précédemment $P(X)=a\prod_{i=1}^s(X-a_i)^{n_i}$ avec $b_1<\cdots<b_s$, de sorte que $a_i$ est une racine d'ordre $n_i-1$ de $f(x)$. On suppose par exemple que $a>0$. Par ailleurs pour $\alpha>0$ (resp.$\alpha<0$) $e^{-\alpha x}P(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ (resp. $-\infty$). On prend alors par exemple $f(b_s+1)$ (resp. $f(b_1-1)$) et il existe donc $A$ assez grand tel $0<f(A)\leqslant f(b_s+1)$ (resp. $f(b_1-1)\leqslant f(A)<0$) et le théorème de la bijection nous donne l'existence de $b_+\in[b_s,b_s+1]$ (resp. $b_-\in[b_1-1,b_1]$) tel que $f(A)=f(b_+)$ (resp. $f(A)=f(b_-)$). Alors le théorème de Rolle (dit à l'infini) nous fournit une racine supplémentaire de $f$ strictement plus grande que $b_s$ (resp. $<b_1$).

**8** ▷ Soient $P(X)=\sum_{k=0}^n a_kX^k$ et $Q(X)=\sum_{j=0}^m b_jX^j$ des polynômes réels à racines toutes réelles. Montrer que $Q(D)(P)(X)$ est un polynôme à racines toutes réelles.

On écrit $Q(X)=\lambda\prod_i(X-\alpha_i)$ de sorte que $Q(D)=\lambda(D-\alpha_1)\circ\cdots(D-\alpha_r)$ et le résultat découle de la question précédente par récurrence.

Dans la question 27 ▷ , nous utiliserons le théorème de composition de Schur suivant, que nous admettons.

**Théorème 1** *Soient $P(X)=\sum_{k=0}^n a_kX^k$ et $Q(X)=\sum_{j=0}^m b_jX^j$ des polynômes réels à racines toutes réelles. On suppose en outre que les racines de $Q$ ont toutes le même signe. Alors le polynôme*

$$P\circ Q(X):=\sum_{k=0}^{\min(n,m)}a_kb_k(k!)X^k$$

*est à racines toutes réelles.*

## Quelques exemples

Soit $A$ une matrice symétrique réelle de taille $n$.

**9** ▷ Montrer que son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est à racines toutes réelles.

On applique le théorème du cours : une matrice symétrique réelle a toutes ses valeurs propres réelles.

**10** ▷ On suppose que toutes les racines de $\chi_A(X)$ sont positives. Montrer l'existence d'une matrice symétrique $C$ telle que $A = C^2$.

On diagonalise en base orthonormée $A = PDP^{-1}$ avec $D = D_1^2$ où les coefficients diagonaux de $D_1$ sont des racines carrées de ceux de $D$. On pose alors $C = PD_1P^{-1}$ de sorte que $C^2 = A$.

**11** ▷ Soit $B$ une matrice symétrique et on suppose comme dans la question précédente que les racines de $\chi_A(X)$ sont positives. Montrer que les valeurs propres de $AB$ sont toutes réelles.

On écrit $\det(AB - XI_n) = \det(C^2B - XI_n) = \det(CBC - XI_n)$. Or $CBC$ est symétrique réelle, le résultat découle alors de la question précédente.

On considère

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx. \end{array} \right.$$

**12** ▷ Montrer que $\varphi$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

Tout d'abord il n'y a pas de problème de convergence en $+\infty$. La bilinéarité est la symétrie sont ensuite évidentes. Pour l'aspect défini positif, on utilise la continuité (une fonction positive continue d'intégrale nulle est nulle).

**13** ▷ Justifier (on ne demande pas de les calculer) qu'il existe une famille $(L_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant les propriétés suivantes :

— les $L_i$ sont de degré $i$ ;

— pour tout $0 \leqslant i, j \leqslant n$, $\varphi(L_i, L_j) = \delta_{i,j}$ i.e. nul si $i \neq j$ et égal à 1 pour $i = j$.

Cela découle du procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt (cours)

**14** ▷ Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, le polynôme $L_n$ est à racines toutes réelles.

On va même montrer que les racines sont simples. On écrit $L_n(X) = \prod_i (X - x_i).P_n(X)$ où $P_n$ n'a que de racines d'ordre pair ou des racines complexes. En particulier $P_n$ ne change pas de signe (TVI). On a alors $\varphi(L_n, \prod_i (X - x_i)) > 0$ et ce qui impose que $\prod_i (X - x_i)$ ne peut pas appartenir à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ car sinon on aurait le produit scalaire serait nul (par construction $L_n$ est orthogonal à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$).

Soit $\Big(B_i\Big)_{i=1,\cdots,n}$ une suite de variables aléatoires de Bernouilli $\mathcal{B}(b_i)$ indépendantes de paramètres respectifs $b_i$, i.e. $\mathbf{P}(B_i = 1) = b_i$ et $\mathbf{P}(B_i = 0) = 1 - b_i$. Soit alors $B = \sum_{i=1}^n B_i$ et soit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$$

où $p_k = \mathbf{P}(B = k)$.

**15** ▷ Montrer que $P(X)$ est à racines toutes réelles.

Les variables étant indépendantes, on a $P(X) = \prod_i (b_i X + (1 - b_i))$ dont les racines sont les $\frac{b_i - 1}{b_i} \in \mathbf{R}$.

**16** ▷ Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n p_k X^k \in \mathbf{R}[X]$ à coefficients positifs, i.e. $p_k \geqslant 0$ pour tout $k = 0, \cdots, n$. On suppose en outre que $P$ est à racines toutes réelles et que $P(1) = 1$. Montrer alors qu'il existe des variables de Bernouilli indépendantes $B_i$ telles que pour tout $k = 0, \cdots, n$, on a $p_k = \mathbf{P}(\sum_{i=1}^n B_i = k)$.

On écrit

$$P(X) = \lambda \prod_i \frac{(X + x_i)}{1 + x_i} = \prod_i \Big( \frac{X}{1 + x_i} + (1 - \frac{x_i}{1 + x_i}) \Big),$$

où comme $P$ est à coefficients positifs tous les $x_i$ sont positifs (pas de racine positive). Par ailleurs comme $P(1) = 1$ on a $\lambda = 1$. Ainsi les $\frac{1}{1+x_i}$ appartiennent à $[0, 1]$ ce qui donne une probabilité pour une variable de Bernouilli $B_i(\frac{1}{1+x_i})$.

## Théorème de Hermite-Sylvester

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré $n$. On note $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ les racines réelles distinctes de $P$ et $\beta_1, \overline{\beta}_1 \cdots, \beta_s, \overline{\beta}_s$ ses racines complexes non réelles, où $\overline{\beta}_i$ désigne le conjugué de $\beta_i$. On note $m_i$ la multiplicité de $\alpha_i$ et $n_j$ celle de $\beta_j$ et $\overline{\beta}_j$.
Pour tout $k \geqslant 0$, on introduit

$$s_k = \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i^k + \sum_{j=1}^{s} n_j (\beta_j^k + \overline{\beta}_j^k).$$

On introduit les applications linéaires $\varphi_k : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ définies par

$$\varphi_k(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_k^{i-1}$$

ainsi que

$$\psi_k(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_k^{i-1}.$$

On notera aussi $\overline{\psi}_k(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{\beta}_k^{i-1}$.

**17** ▷ Montrer que $(\varphi_1, \cdots, \varphi_r, \psi_1, \overline{\psi}_1, \cdots, \psi_s, \overline{\psi}_s)$ est une famille libre.
*Indication : on pourra utiliser les matrices de Vandermonde.*

Notons $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, avec $n = r+2s$. Alors la matrice $M \in \mathbb{M}(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont

$$m_{i,j} = \begin{cases} \varphi_j(e_i) = \alpha_j^{i-1} & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant r, \\ \psi_{j-r}(e_i) = \beta_{j-r}^{i-1} & \text{si } r+1 \leqslant j \leqslant r+s, \\ \overline{\psi}_{j-r-s}(e_i) = \overline{\beta}_{j-r-s}^{i-1} & \text{si } r+s+1 \leqslant j \leqslant n. \end{cases}$$

est la matrice de Vandermonde associée aux nopmbres $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s, \overline{\beta}_1, \cdots, \overline{\beta}_s$, lesquels sont distincts deux à deux de sorte que $M$ est inversible. Ainsi s'il existait une relation linéaire entre les formes linéaires $(\varphi_1, \cdots, \varphi_r, \psi_1, \overline{\psi}_1, \cdots, \psi_s, \overline{\psi}_r)$, produirait une relation sur le colonnes de $M$ : une telle relation est donc nécessairement triviale.

**18** ▷ Montrer que

$$q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{r} m_k \varphi_k(x_1, \cdots, x_n)^2 + \sum_{k=1}^{s} n_k \Big(\psi_k(x_1, \cdots, x_n)^2 + \overline{\psi}_k(x_1, \cdots, x_n)^2\Big),$$

s'écrit sous la forme $q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} s_{i+j-2} x_i x_j$.

On développe simplement

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{r} m_k \varphi_k(x_1, \cdots, x_n) &= \sum_{k=1}^{r} m_k (\sum_{i=1}^{n} \alpha_k^{i-1} x_i)^2 \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j \sum_{k=1}^{r} m_k \alpha_k^{i+j-2} \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j \Big(\sum_{k=1}^{r} m_k \alpha_k^{i+j-2}\Big). \end{aligned}$$

On montre de même que

$$\sum_{k=1}^{s} n_k \psi_k(x_1, \cdots, x_n)^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j \Big(\sum_{k=1}^{s} n_k \beta_k^{i+j-2}\Big),$$

et

$$\sum_{k=1}^{s} n_k \overline{\psi}_k(x_1, \cdots, x_n)^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j \Big(\sum_{k=1}^{s} n_k \overline{\beta}_k^{i+j-2}\Big).$$

En sommant ces trois égalités on obtient alors la formule proposée.

**19** ▷ Montrer que si $P$ est à racines toutes réelles, alors $q : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} s_{i+j-2} x_i x_j$, est à valeurs positives.

Si $P$ est à racines toutes réelles alors $q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{r} m_k \varphi(x_1, \cdots, x_n)^2$ est alors clairement à valeurs toutes positives.

On suppose à présent $r < n$ et on écrit pour tout $i = 1, \cdots, s$

$$\psi_i^2 + \overline{\psi}_i^2 = 2\,\mathrm{Re}(\psi_i)^2 - 2\,\mathrm{Im}(\psi_i)^2.$$

**20** ▷ Montrer que les applications linéaires $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ suivantes sont $\mathbf{R}$-linéairement indépendantes :

$$\varphi_1, \cdots, \varphi_r, \mathrm{Re}(\psi_1), \mathrm{Im}(\psi_1), \cdots, \mathrm{Re}(\psi_s), \mathrm{Im}(\psi_s).$$

On considère une relation

$$\sum_{i=1}^{r} a_i\varphi_i + \sum_{j=1}^{s}\Big(b_j \,\mathrm{Re}(\psi_j) + c_j \,\mathrm{Im}(\psi_j)\Big) = 0.$$

On réécrit alors cette relation en utilisant $b_j \,\mathrm{Re}(\psi_j)+c_j \,\mathrm{Im}(\psi_j) = (\frac{b_j}{2}+\frac{c_j}{2i})\psi_j+(\frac{b_j}{2}-\frac{c_j}{2i})\overline{\psi}_k$, ce qui fournit une relation linéaire comme dans la question 17), laquelle est donc triviale. On obtient ainsi $a_i = 0$ puis $b_j + ic_j = b_j - ic_j = 0$ soit $b_j = c_j = 0$.

**21** ▷ Conclure que $P$ est à racines toutes réelles si et seulement si $q$ est à valeurs positives sur $\mathbf{R}^n$.
*Indication : on pourra utiliser, sans justification, l'existence d'un vecteur $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ qui annule toutes les formes linéaires de la question précédente sauf une au choix.*

L'implication directe est donnée par la question 19). Pour la réciproque supposons donc $s \geqslant 1$ et considérons un vecteur $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant r : \varphi_i(X) = 0, \quad \mathrm{Re}(\psi_1)(X) = 0, \quad \forall 2 \leqslant j \leqslant s,\ \mathrm{Re}(\psi_j)(X) = \mathrm{Im}(\psi_j)(X) = 0,$$

et tel que $\mathrm{Im}(\psi_1)(X) \neq 0$. On a alors $q(X) = -2n_1 \,\mathrm{Im}(\psi_1)(X)^2 < 0$ et donc $q$ n'est pas à valeur positives.

# Suite multiplicative de Polya-Schur

Étant donnée une suite réelle $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on considère l'opérateur $\Gamma : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}[X]$ défini par la formule

$$\Gamma(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k\gamma_k X^k.$$

Une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite multiplicative au sens de Polya-Schur si l'opérateur $\Gamma$ préserve l'ensemble des polynômes à racines toutes réelles, i.e. si $P$ a toutes ses racines réelles alors $\Gamma(P)$ aussi.

**22** ▷ Montrer que la suite définie par $\gamma_n = n$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

On utilise simplement que la dérivation stabilise l'ensemble des polynômes à racines toutes réelles. En effet si $P$ a toutes ses racines réelles alors $P'(X)$ aussi et donc aussi $XP'(X)$.

**23** ▷ Montrer que si $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur alors pour tout $k \geqslant 0$, la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant k} = (\gamma_k, \gamma_{k+1}, \cdots)$ l'est aussi.

Soit $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ une suite multiplicative au sens de Polya-Schur et $k \in \mathbf{N}$. Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{s} a_i X^i$ à racines toutes réelles. Le polynôme $X^k P(X) = \sum_{i=k}^{s+k} a_{i-k} X^i$ est à racine toutes réelles et donc

$$\Gamma(X^k P) = \sum_{i=k}^{s+k} \gamma_i a_{i-k} X^i = \sum_{i=0}^{s} a_i \gamma_{i+k} X^{i+k} = X^k (\sum_{i=0}^{s} a_i \gamma_{i+k} X^i)$$

aussi et donc $(\gamma_n)_{n\geqslant k}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$. On suppose que $P$ a toutes ses racines réelles : on les note $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$. On rappelle que $-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{k=1}^{n} x_k$ et on admet que $\frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$ de sorte que

$$a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2} = a_n^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

**24** ▷ Soit $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ une suite non nulle, multiplicative au sens de Polya-Schur et on suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $\gamma_k = 0$ avec $\gamma_{k-1} \neq 0$. Montrer que $\gamma_{k+1} = 0$ puis que $\gamma_m = 0$ pour tout $m \geqslant k$.
*Indication : on pourra utiliser les expressions de* $\Gamma((1+X)^{k+1})$ *et* $\Gamma(X^{k+1} - X^{k-1})$*, puis, pour* $m \geqslant k+2$*, raisonner sur les racines de* $\Gamma((1+X)^m)$*.*

Comme suggéré regardons

$$\Gamma((X+1)^{k+1}) = \gamma_0 + \cdots + (k+1)\gamma_k X^k + \gamma_{k+1} X^{k+1}$$

qui par hypothèse est donc à racines toutes réelles. On suppose par l'absurde que $\gamma_{k+1}$ est non nul. D'après la question 6) la suite des coefficients est ultra-log-convave et donc log concave de sorte qu'en particulier $\gamma_{k+1}\gamma_{k-1} \leqslant 0$ et donc $< 0$ puisque par hypothèse $\gamma_{k+1}\gamma_{k-1} \neq 0$. Par ailleurs

$$\Gamma(X^{k+1} - X^{k-1}) = (\gamma_{k+1} X^2 - \gamma_{k-1}) X^{k-1}$$

doit aussi être à racines toutes réelles et donc $\gamma_{k+1}\gamma_{k-1} \geqslant 0$, ce qui contredit l'inégalité stricte précédente.

Pour $m \geqslant k+2$, le polynôme $(1+X)^m$ a toutes ses racines réelles et donc aussi

$$\Gamma((1+X)^m) = \gamma_m X^m + \sum_{s=0}^{k-1} \gamma_s \binom{m}{s} X^s.$$

Supposons par l'absurde que $\gamma_m \neq 0$ et notons $x_1, \cdots, x_m$ les racines de $\Gamma((1+X)^m)$. On a

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 0 \text{ et } \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} x_i x_j = 0,$$

de sorte que

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + 0$$

et donc $x_1 = \cdots = x_m = 0$ soit $\Gamma((1+X)^m) = \gamma_m X^m$ avec donc $\gamma_{k-1} = 0$ ce qui n'est pas.

**25** $\triangleright$ On suppose que la suite multiplicative $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ ne s'annule jamais. Montrer alors qu'elle est soit de signe constant, soit alternée.
*Indication : on pourra utiliser encore l'expression de* $\Gamma(X^{k+1}-X^{k-1})$.

Dans la preuve précédente, l'examen de $\Gamma(X^{k+1}-X^{k-1})=(\gamma_{k+1}X^2-\gamma_{k-1})X^{k-1}$ nous a conduit à noter que $\gamma_{k+1}$ et $\gamma_{k-1}$ doivent être de même signe.

## Théorème de Polya-Schur

On considère à présent une suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ strictement positive, i.e. $\gamma_n>0$ pour tout $n\geqslant 0$.

On suppose que $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

**26** $\triangleright$ Montrer que $Q_n(X)=\sum_{k=0}^n \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ a toutes ses racines réelles et négatives.

Il s'agit simplement de $\Gamma((X+1)^n)$ qui a donc toutes ses racines réelles. Comme en outre ses coefficients sont tous positifs, ses racines ne peuvent pas être positives.

Réciproquement supposons que $Q_n(X)=\sum_{k=0}^n \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ a toutes ses racines réelles négatives. On fait le changement de variable $x=z/n$, de sorte que

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma_k}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})z^k,$$

a toutes ses racines réelles et négatives.

**27** $\triangleright$ En utilisant le théorème 1, montrer que $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

Soit $P(X)=a_0+\cdots+a_mX^m$ un polynôme à racines toutes réelles. D'après le théorème de composition de Schur de la question 8),

$$\sum_{k=1}^{m} a_k k!(\frac{\gamma_k}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}))X^k$$

est aussi à racines toutes réelles, quel que soit $n$. On passe alors à la limite sur $n$ et donc $\sum_{k=1}^m a_k\gamma_k X^k$ est à racines toutes réelles.

On suppose que $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

**28** $\triangleright$ Montrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est log-concave, i.e. $\gamma_k^2\geqslant\gamma_{k+1}\gamma_{k-1}$ pour tout $k\geqslant 1$.

On a vu que $\sum_{k=0}^n \gamma_k\binom{n}{k}X^k$ a ses racines toutes réelles de sorte que $\gamma_k\binom{n}{k}$ est ultra-log-concave, i.e. $\gamma_k$ est log-concave.

**29** ▷ En déduire que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \gamma_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif.

Par log-concavité, $\gamma_n/\gamma_{n-1}$ est décroissante minorée par $0$, elle converge donc vers une limite finie $1/R$ où $R$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \gamma_n x^n$.

**30** ▷ En déduire que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini et peut s'obtenir comme la limite uniforme sur tout intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$, de polynômes à racines toutes réelles et négatives.

Par d'Alembert, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ a donc un rayon de convergence infini. Par convergence dominée la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge alors uniformément vers $S(x)$ sur tout compact.

**31** ▷ Réciproquement montrer que si $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini et peut s'obtenir comme la limite uniforme, sur tout intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$, de polynômes à racines toutes réelles et négatives, alors $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.
*Indication* : pour cette question plus difficile, le jury considérera avec bienveillance toute tentative même partielle ou purement qualitative.

Soit $P_m(X) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\gamma_{k,m}}{k!} X^k$ une suite de polynômes à racines toutes réelles et négatives qui converge uniformément vers $S(X)$ sur tout compact de $\mathbf{R}$. Soit $P(X) = a_0 + \cdots + a_n X^n$ un polynômes à racines toutes réelles. D'après le théorème de composition de Schur, $\sum_{k=1}^{n} a_k \gamma_{k,m} X^k$ est à racines toutes réelles. On passe à la limite sur $m$ de sorte que $\sum_{k=1}^{n} a_k \gamma_k X^k$ est aussi à racines toutes réelles (car $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ est fermé) et donc $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est multiplicative. (il faudrait justifier que chacune des suites $\gamma_{k,m}$ converge vers $\gamma_k$ ...)

# Rapport

Le sujet tourne autour d'un théorème de Polya sur les polynômes réels à racines toutes réelles. On dispose pour les polynômes [1] de deux écritures, l'une additive sous la forme $\sum_k a_k X^k$ et l'autre multiplicative $\prod_k (X - a_k)$ et alors que les relations coefficients-racines permettent de passer de l'écriture multiplicative à l'additive, on sait depuis Galois que le passage dans l'autre sens n'est en général pas possible.

— Partant de l'observation aisée découlant d'une application directe du théorème de Rolle, que le polynôme dérivé d'un polynôme à racines toutes réelles est encore à racines toutes réelles,

— et de la linéarité de la dérivation la rendant transparente dans l'écriture additive des polynômes puisqu'il suffit, à décalage près, de multiplier la suite des coefficients par les éléments de la suite $(1, 2, 3, \cdots)$,

suivant Polya, on s'intéresse alors aux suites réelles $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la propriété suivante : à chaque fois qu'on dispose d'un polynôme réel à racines toutes réelles, écrit sous sa forme additive $\sum_k a_k X^k$, alors le polynôme $\sum_k \gamma_k a_k X^k$ est aussi à racines toutes réelles.

Afin de ne pas rallonger encore un sujet déjà très long, le théorème de Schur est admis et le lecteur curieux pourra en trouver une preuve, reposant notamment sur le résultat de la question 8, dans le livre de B. Levin *Distribution of Zeros of Entire Functions*, au chapitre VIII section 2.

Avant d'attaquer le coeur de la démonstration, on parcourt une partie du programme de PC où l'on peut trouver des polynômes réels à racines toutes réelles :

— en algèbre linéaire avec les polynômes caractéristiques des matrices symétriques,

— les polynômes orthogonaux,

— les séries génératrices de certaines variables aléatoires,

— les formes quadratiques.

On définit enfin les suites multiplicatives au sens de Polya-Schur et on commence par en étudier les premières propriétés notamment en utilisant le théorème de Rolle : annulation et changements de signe. La dernière partie, nettement plus difficile, s'intéresse alors au théorème de Polya-Schur, i.e. à donner une caractérisation des suites multiplicatives au sens de Polya-Schur. Dans le détail des questions :

**1** ▷ Log-concavité de la suite binomiale : la question a été généralement bien traitée, il faut cependant éviter de donner à lire au correcteur des inégalités forcément justes puisque l'énoncé le propose, sans que la justification ne saute aux yeux !

**2** ▷ Question plutôt bien traitée par l'ensemble des candidats mais il faut veiller aux signes lorsqu'on multiplie une inégalité.

1. Pensez à l'analogie entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ avec l'écriture en base 10 et la factorisation en facteurs premiers.

**3** ▷ L'unimodularité mentionne un $j$ qu'il s'agit, à priori, de caractériser, visiblement il s'agit ici de l'indice où la suite est maximale. On trouve de nombreuses copies qui raisonnent sur tous les indices à la fois sans savoir où aller. Ainsi une solution naturelle consiste à partir de $a_j$ pris maximal parmi les éléments de la suite, ou alors d'utiliser la monotonie de $a_{j+1}/a_j$ et de regarder l'indice où on franchit $1$.

**4** ▷ Les multiplicités n'ont été étudiées que dans la moitié des copies, les autres se contentant de construire les racines données par le théorème de Rolle.

**5** ▷ Le jury a été désagréablement surpris par les réponses à cette question pourtant très simple. Par négligence le degré a souvent été donné comme étant égal à $n$, quand il n'était pas nul ! Il s'agissait dans un premier temps de remarquer que $0$ ne pouvait pas être racine, puis de remarquer que $Q(z) = 0$ si et seulement si $P(1/z) = 0$ et que donc toutes les racines de $Q$ devaient être réelles.

**6** ▷ Quelques copies ont réussi à mener les calculs jusqu'au bout, les autres se sont contentées de suggérer de prendre le discriminant d'un polynôme de degré $2$ qu'ils ont renoncé à calculer, c'est bien dommage.

**7** ▷ La stratégie de la question 4 menait à donner toutes les racines sauf une, qu'on pouvait alors obtenir soit par le théorème de Rolle dit infini, ou simplement en disant que les racines complexes non réelles viennent en couple avec leur conjugué complexe.

**8** ▷ La question a été abordée via l'écriture additive de $P$ ce qui ne pouvait pas donner le résultat.

**9** ▷ Le jury conseille aux candidats de ne pas perdre inutilement du temps à redémontrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles, mais simplement d'invoquer le théorème du cours. Le jury signale par ailleurs que, conformément au théorème de Galois, des manipulations sur les lignes et colonnes ne peuvent pas, en général, permettre de calculer les valeurs propres.

**10** ▷ Il s'agissait essentiellement de bien rappeler que la matrice de passage pour obtenir une matrice diagonale, peut être prise orthogonale.

**11** ▷ La question était plus difficile. On pouvait utiliser que les polynômes caractéristiques de $AB$ et $BA$ étaient identiques (connaissance hors programme), éventuellement se limiter au cas où $A$ est inversible, ou alors reprendre la preuve classique du fait qu'une matrice symétrique a toutes ses valeurs propres réelles.

**12** ▷ Il fallait veiller à utiliser la continuité pour prouver la séparation et invoquer le fait qu'un polynôme nul sur une partie infinie était nécessairement nul.

**13** ▷ Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est connu mais il faut bien préciser la base de départ pour que la construction vérifie les conditions demandées. Par ailleurs une proportion notable des candidats ont mentionné les polynômes de Lagrange, certainement en désespoir de cause !

**14** ▷ Seules quelques rares copies sont parvenues à résoudre cette question qui visiblement n'est plus si classique, sur les racines des polynômes orthogonaux.

**15** ▷ La question a été très mal traitée, certains candidats ont pensé qu'on avait des variables de Bernouilli de même paramètre. Souvent le jury a observé des formules mentionnant un indice $i$ non défini ce qui ne pouvait pas avoir de sens.

**16** ▷ Cette question délicate a été très rarement abordée correctement.

**17** ▷ La matrice de Vandermonde est souvent apparue mais il fallait soit écrire un système d'équations qui y était associé, soit préciser quelle base était utilisée pour écrire la famille considérée (la notion de base duale est hors programme à priori). Il s'agissait par ailleurs de bien remarquer que la matrice n'était pas nécessairement carrée.

**18** ▷ Il s'agissait essentiellement de savoir développer correctement le carré d'une somme, puis de rassembler les différents termes.

**19** ▷ Il fallait bien préciser que le carré d'un nombre *réel* est positif.

**20** ▷ Question assez mal traitée, il fallait partir d'une relation linéaire entre les applications données pour se ramener, en suivant l'indication, à la question 17.

**21** ▷ Quelques candidats ont su exploiter l'indication qui suggérait d'annuler tous les termes d'une somme sauf un à valeur négative.

**22** ▷ Question souvent bien traitée sauf par des copies qui s'essayaient à raisonner sur les coefficients sans penser à utiliser la question 4.

**23** ▷ Il fallait considérer $\Gamma(X^k P)$ puis factoriser par $X^k$, argument qui n'a été repéré que par de trop rares candidats.

**24** ▷ Question pas très difficile mais nécessitant des calculs assez longs qui ont découragé les étudiants plutôt à la recherche de points vite gagnés à ce stade de la copie.

**25** ▷ Question bien traitée par les rares copies qui s'y sont essayé.

**26** ▷ Il s'agissait de reconnaitre $\Gamma((X+1)^n)$ et de remarquer qu'une somme de termes positifs non tous nuls ne pouvait pas être nulle. Une proportion non négligeable des copies a su repérer ces points faciles à gagner.

**27** ▷ Question plus difficile et pas abordée : il s'agissait d'appliquer le théorème de Schur à $P(X) = a_0 + \cdots + a_m X^m$ et au polynôme $P_n$ de la question précédente, puis de donner un argument justifiant que la limite d'une suite de polynômes de degré fixe dont toutes les racines sont réelles, ne possédait que des racines réelles.

**28** ▷ Il fallait simplement remarquer que $\sum_k \gamma_k \binom{n}{k} X^k$ était à racines toutes réelles de sorte que d'après la question 6, $(\gamma_k \binom{n}{k})_k$ est ultra log-concave et donc $(\gamma_k)_k$ est concave. La question n'a pas été abordée (le sujet étant relativement long, ce n'est pas étonnant).

**29** ▷ De rares étudiants ont su détecter une question vite résolue et ont pu gagner un point facilement.

**30** ▷ Le calcul du rayon de convergence a été bien vu par quelques rares copies. La convergence de la suite $(P_n)_n$ vers $\sum_n \gamma_n x^n$ n'a pas été traitée.

**31** ▷ Il s'agissait de montrer la réciproque dans le théorème de Polya via des arguments de convergence dont le jury ne s'attendait pas vraiment à lire une rédaction correcte vue la longueur du sujet.

Plus généralement,

— le jury note que les questions d'existence (en particulier, les questions 3, 10 et 13) posent des difficultés notamment parce que beaucoup de candidats ne commencent pas par construire l'objet dont on impose les contraintes et se contentent de phrases répétant plus ou moins l'énoncé. Dans ce genre de situation, un raisonnement de type Analyse-Synthèse se révèle souvent efficace.

— Enfin le jury tient à signaler la proportion bien trop importante de copies où de manière répétée dans les questions dites fermées, où la réponse est indiquée, sont donnés à lire des arguments longs et vides de sens où la formule demandée finit par apparaitre. Cette stratégie non seulement n'apporte aucun point mais dessert au final le candidat qui sera ensuite plus sévèrement jugé lors de chacune des questions suivantes. L'honnêteté intellectuelle, notamment d'un scientifique, est une qualité grandement appréciée, et pas seulement des correcteurs.