CX6611

Banque commune École Polytechnique - InterENS

PSI

Session 2016

Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé

Aucune calculatrice n'est autorisée

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Préambule

Dans tout le texte $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes, m colonnes et à coefficients réels ; on notera I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$. Si $A = [a_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$, on notera ${}^tA = [a_{j,i}]_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ la matrice transposée de A. On identifiera les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ avec les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On utilisera la notation $\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ pour désigner la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les λ_i. Une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite *diagonale de signes* si elle est de la forme

$$S = \operatorname{diag}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n), \quad \text{où} \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\},\ \epsilon_i \in \{-1, +1\}.$$

L'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ est muni du produit scalaire,

$$(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \mapsto \langle x|y\rangle = {}^txy \in \mathbf{R},$$

et on note $||x|| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ la norme d'un vecteur x de $\mathbf{R}^n$. On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite *orthogonale* si ${}^tAA = I_n$ ou de manière équivalente si pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$, on a $\langle Ax|Ay\rangle = \langle x|y\rangle$.

Une matrice $A = [a_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ est dite *positive* et on note $A \geqslant 0$ si tous ses coefficients $a_{i,j}$ sont positifs :

$$[a_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall i \in \{1, \cdots, n\} \text{ et } \forall j \in \{1, \cdots, m\} : \quad a_{i,j} \geqslant 0.$$

On dira aussi qu'elle est *strictement positive* et on note $A > 0$, si tous ses coefficients le sont.

Dans le texte, on utilise les notations usuelles sur les matrices par blocs et les candidats sont invités à utiliser sans justification les calculs par blocs comme par exemple

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + BY \\ CX + DY \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_m(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $X \in \mathbf{R}^m$, $Y \in \mathbf{R}^n$.

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème de Broyden suivant et ses liens avec le lemme de Farkas et le théorème de Tucker.

Théorème de Broyden : *Soit O une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Il existe alors $x > 0$ dans $\mathbf{R}^n$ et une unique matrice diagonale de signes $S = \operatorname{diag}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$, tels que*

$$Ox = Sx.$$

Préliminaire

1) Soient x, y des vecteurs *strictement positifs* de $\mathbf{R}^n$ et soient S, R deux matrices diagonales de signes.

1-a) Montrer que
$$\langle Sx|Ry\rangle \leqslant \langle x|y\rangle,$$
avec égalité si et seulement si $R = S$.

1-b) Démontrer l'unicité de S dans le théorème de Broyden.

1-c) Montrer que
$$||Sx + Ry|| \leqslant ||x + y||,$$
avec égalité si et seulement si $R = S$.

2) Soient O une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et S une matrice diagonale de signes. Montrer que l'égalité $Ox = Sx$ avec $x \in \mathbf{R}^n$ strictement positive, est équivalente à
$$(*) \quad \begin{cases} (I_n + O)x \geqslant 0, \\ (I_n - O)x \geqslant 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Les parties A, B, C et D suivantes sont indépendantes entre elles.

A- Le cas $n = 2$

Dans cette question, on suppose $n = 2$. On identifie les éléments $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ aux vecteurs $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ du plan euclidien relativement à une repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ seront ainsi identifiées aux applications linéaires de ce plan (conservant donc l'origine Ω).

3) Soit O la matrice d'une réflexion relativement à une droite passant par Ω et dirigée par un vecteur $\vec{v}_+$. Déterminer un vecteur $x \in \mathbf{R}^2$ strictement positif ainsi qu'une matrice diagonale de signes $S \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $Ox = Sx$.
Indication : on commencera par traiter le cas où $\vec{v}_+ \in \{\vec{i}, \vec{j}\}$.

4) Soit à présent O la matrice d'une rotation de centre Ω et d'angle $\theta \in]-\pi, \pi]$ non nul. *À l'aide d'un dessin*, trouver deux vecteurs x_+ et x_- tels que
$$Ox_+ = \mathrm{diag}(1, -1)x_+ \qquad \text{et} \qquad Ox_- = \mathrm{diag}(-1, 1)x_-.$$
Discuter ensuite suivant le signe de θ, lequel de x_+ et x_- est strictement positif.

B- Le théorème de Tucker

Dans cette section, nous allons prouver que le théorème de Broyden est équivalent au théorème de Tucker suivant :
Théorème de Tucker : *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique (c'est à dire ${}^tM = -M$). Il existe alors un vecteur $u \in \mathbf{R}^n$ tel que*
$$u \geqslant 0, \qquad Mu \geqslant 0, \qquad u + Mu > 0.$$

On suppose dans un premier temps que le théorème de Tucker est vrai.

5) Avec les notations du théorème de Broyden, on note $M \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbf{R})$ la matrice par blocs suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n + O \\ 0 & 0 & I_n - O \\ -(I_n + {}^tO) & -(I_n - {}^tO) & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le théorème de Tucker, montrer qu'il existe des vecteurs *positifs* $x, z_1, z_2 \in \mathbf{R}^n$ tels que

$$\begin{cases} (I_n + O)x \geqslant 0, \\ (I_n - O)x \geqslant 0, \\ -(I_n + {}^tO)z_1 - (I_n - {}^tO)z_2 \geqslant 0, \\ z_1 + (I_n + O)x > 0, \\ z_2 + (I_n - O)x > 0, \\ x - (I_n + {}^tO)z_1 - (I_n - {}^tO)z_2 > 0. \end{cases}$$

6) Montrer que $||z_1 + z_2|| = ||z_1 - z_2||$ et $-(I_n + {}^tO)z_1 - (I_n - {}^tO)z_2 = 0$.

7) En déduire alors que $x > 0$ et $x + Ox \geqslant 0$ ainsi que $x - Ox \geqslant 0$. Conclure.

On suppose à présent que le théorème de Broyden est vrai.

8) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est antisymétrique alors $I_n + M$ est une matrice inversible.

9) Montrer que pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ antisymétrique, la matrice

$$O := (I_n + M)^{-1}(I_n - M)$$

est orthogonale.

10) Déduire du théorème de Broyden qu'il existe un vecteur strictement positif x ainsi qu'une matrice diagonale de signes S tels que $Ox = Sx$ et en déduire que $u = x + Sx$ est le vecteur positif du théorème de Tucker.

C- Preuve du théorème de Broyden

Nous allons prouver le théorème de Broyden par récurrence sur la dimension. Le cas de la dimension 1 étant triviale, nous supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$ et on écrit O sous la forme d'une matrice par blocs

$$O = \begin{pmatrix} P & r \\ {}^tq & \alpha \end{pmatrix},$$

où $P \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$ et donc $r, q \in \mathbf{R}^{n-1}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.

11) Montrer que $|\alpha| \leqslant 1$ avec égalité si et seulement si $q = r = 0$.

12) Traiter le cas $|\alpha| = 1$.

On suppose à présent que $|\alpha| < 1$ et on introduit les matrices

$$Q_- = P - \frac{r\,{}^tq}{\alpha - 1}, \qquad Q_+ = P - \frac{r\,{}^tq}{\alpha + 1}.$$

13) Montrer que ${}^tPP + q\,{}^tq = I_{n-1}$, ${}^tPr + \alpha q = 0$ et ${}^trr + \alpha^2 = 1$.

14) Montrer que les matrices Q_+ et Q_- sont orthogonales.

15) Montrer que

$${}^tQ_+Q_- = I_{n-1} - \frac{2}{1-\alpha^2} q\,{}^tq,$$

et en déduire que

$$Q_- = Q_+ - \frac{2}{1-\alpha^2} Q_+q\ {}^tq.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence pour Q_+ (resp. Q_-), on note $x_+ > 0$ (resp. $x_- > 0$) un vecteur de $\mathbf{R}^{n-1}$ et S_+ (resp. S_-) la matrice diagonale de signes, tels que

$$Q_+x_+ = S_+x_+, \qquad \text{resp. } Q_-x_- = S_-x_-.$$

16) Montrer que

$$\langle S_+x_+ | S_-x_- \rangle = \langle x_+ | x_- \rangle - \frac{2}{1-\alpha^2} \langle x_+ | q \rangle \langle x_- | q \rangle.$$

17) On pose

- $\eta_+ = -\frac{\langle x_+|q\rangle}{\alpha+1}$ (resp. $\eta_- = -\frac{\langle x_-|q\rangle}{\alpha-1}$),
- $z_+ = \begin{pmatrix} x_+ \\ \eta_+ \end{pmatrix}$ (resp. $z_- = \begin{pmatrix} x_- \\ \eta_- \end{pmatrix}$)
- et $S^+ = \begin{pmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$ (resp. $S^- = \begin{pmatrix} S_- & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$).

Montrer, en utilisant la question 1-a), que dans le cas où $S_+ \neq S_-$ alors un des couples (z_+, S^+) et (z_-, S^-) vérifie le théorème de Broyden.

18) On suppose à présent $S_+ = S_-$ et on suppose $\langle x_+ | q \rangle = 0$. On note $z = \begin{pmatrix} x_+ \\ 0 \end{pmatrix}$, $R_+ = \begin{pmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $R_- = \begin{pmatrix} S_+ & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

18-a) Montrer que $Oz = R_+z = R_-z$.

18-b) On écrit à présent

$$O = \begin{pmatrix} \alpha' & {}^t q' \\ r' & P' \end{pmatrix},$$

où $P' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$. Construire alors $z' = \begin{pmatrix} \eta' \\ x' \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ avec $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$ strictement positif et $\eta' \geqslant 0$ tel qu'il existe une matrice diagonale de signes R' vérifiant $Oz' = R'z'$.

18-c) Dans le cas où $\eta' = 0$, et en utilisant la question 1-c), montrer qu'il existe une matrice diagonale de signes S telle que $O(z+z') = S(z+z')$ et conclure.

D- Lemme de Farkas

Le but de cette section est de prouver le lemme de Farkas suivant.

Lemme de Farkas : *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^n$. Alors exactement une des deux propositions suivantes est vérifiée :*

(I) il existe $z \in \mathbf{R}^m$ *positif* tel que $Az = b$;

(II) il existe $z \in \mathbf{R}^n$ tel que $-{}^t A z \geqslant 0$ et $\langle b | z \rangle > 0$.

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^n$ comme dans le lemme de Farkas, on pose

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A & -b \\ 0 & 0 & -A & b \\ -{}^t A & {}^t A & 0 & 0 \\ {}^t b & -{}^t b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit, d'après le théorème de Tucker, $y = {}^t(z_1, z_2, x, t) \geqslant 0$ tel que

$$By \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y + By > 0.$$

19) Montrer que si $t = 0$ alors pour $z = z_1 - z_2$, on a $-{}^t A z \geqslant 0$ et $\langle b | z \rangle > 0$.

20) Si $t > 0$ montrer que $Ax = tb$ et conclure.

FIN DE L'ÉPREUVE

Corrigé

Préliminaires

1-a) On a $\langle Sx|Ry\rangle = \sum_{i=1}^n \epsilon_i\epsilon'_i x_i y_i$ qui par stricte positivité de tous les x_iy_i, sera alors inférieur ou égal à $\sum_{i=1}^n x_iy_i = \langle x|y\rangle$ avec égalité si et seulement si pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a $\epsilon_i\epsilon'_i = 1$, i.e. $R = S$.

1-b) Si on avait $Ox = Sx$ et $Oy = Ry$ alors $\langle Sx|Ry\rangle = \langle Ox|Oy\rangle = \langle x|y\rangle$, par orthogonalité de O, et donc $S = R$ d'après 1-a).

1-c) Pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a $|\epsilon_i x_i + \epsilon'_i y_i| \leqslant x_i + y_i$ avec égalité si et seulement si $\epsilon_i = \epsilon'_i$. L'égalité passe au carré et en sommant sur les $i = 1, \cdots, n$, on obtient la majoration de l'énoncé avec égalité si et seulement si $R = S$.

2) Notons y_i les coordonnées de Ox. Ainsi l'égalité $Ox = Sx$ s'écrit $y_i = \epsilon_i x_i$ pour tout $i = 1, \cdots, n$.

L'inégalité $(I_n + O)x \geqslant 0$ (resp. $(I_n - O)x \geqslant 0$) s'écrit $x_i + y_i \geqslant 0$ (resp. $x_i - y_i \geqslant 0$) pour tout $i = 1, \cdots, n$. Ainsi ces deux inégalités s'écrivent $|y_i| \leqslant x_i$ pour tout $i = 1, \cdots, n$.

Ainsi l'implication, pour $x > 0$, de $Ox = Sx$ vers le système (*) est triviale.

Réciproquement supposons que pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a $|y_i| \leqslant x_i$. De l'égalité $||Ox|| = ||x||$, qui s'écrit $\sum_i y_i^2 = \sum_i x_i^2$, on en déduit que $|y_i| = x_i$ et donc $y_i = \epsilon_i x_i$, et donc $Ox = Sx$ avec $S = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$.

Partie A

3) Dans le cas d'une réflexion on a des vecteurs propres orthogonaux pour les valeurs propres ± 1, que l'on note $v_\pm$ dans le demi-plan $x \geqslant 0$. Notons tout d'abord que si $v_\pm$ sont les vecteurs de la base canonique, alors par exemple le vecteur $(1, 1)$ a pour image $(1, -1)$ ou $(-1, 1)$ qui convient avec $S = \mathrm{diag}(1, -1)$ ou $\mathrm{diag}(-1, 1)$. On suppose à présent que les vecteurs propres ne sont pas sur les axes. Comme $\langle v_+|v_-\rangle = 0 = x_+x_- + y_+y_-$, on en déduit qu'un des deux est dans le demi-plan $y > 0$, d'où le résultat.

4) Comme suggéré par l'énoncé, un dessin illustre simplement les calculs suivants.

Dans le cas d'une rotation, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, on cherche x sous la forme $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ avec $0 < \alpha < \pi/2$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Le système s'écrit

$$\begin{cases} \cos(\theta + \alpha) = -\cos\alpha & \text{ou } \cos\alpha \\ \sin(\theta + \alpha) = \sin\alpha & \text{ou } -\sin\alpha. \end{cases}$$

Ce qui donne $\theta + \alpha = \pi - \alpha$ ou $-\alpha$ soit $\alpha = (\pi - \theta)/2$ ou $-\theta/2$. Si $\theta > 0$ (resp. $\theta < 0$) alors $\alpha = (\pi - \theta)/2$ (resp. $-\theta/2$).

Partie B

5) Il suffit d'écrire le vecteur u donné par le théorème de Tucker sous la forme $u = {}^t(z_1, z_2, x)$.

6) La troisième inégalité s'écrit ${}^tO(z_2 - z_1) \geqslant z_1 + z_2$ ce qui en prenant les normes donne $||z_2 - z_1|| \geqslant ||z_1 + z_2||$. Or comme $z_1, z_2 \geqslant 0$, on a $||z_2 - z_1|| \leqslant ||z_1 + z_2||$ et donc $||z_2 - z_1|| = ||z_1 + z_2||$ ce qui, d'après 2-a), équivaut à $\langle z_1 | z_2 \rangle = 0$ et donc aussi $-(I_n + {}^tO)z_1 - (I_n - {}^tO)z_2 = 0$.

7) La dernière inégalité donne alors $x > 0$. En utilisant les deux première inégalités, le système (*) est alors vérifié et donc le théorème de Broyden d'après la question 4).

8) Soit x tel que $(I_n + M)x = 0$ soit $Mx = -x$. On a alors ${}^tx{}^tM = -{}^txM = -{}^tx$ et donc $-{}^txMx = {}^txx = -{}^txx$ soit $||x||^2 = 0$ et donc $x = 0$.

9) On écrit

$$\begin{aligned} {}^tOO &= (I_n - {}^tM)(I_n + {}^tM)^{-1}(I_n + M)^{-1}(I_n - M) \\ &= (I_n + M)(I_n - M)^{-1}(I_n + M)^{-1}(I_n - M) \\ &= I_n. \end{aligned}$$

10) D'après le théorème de Broyden, il existe $x > 0$ et une matrice diagonale de signes tel que $(I_n + M)^{-1}(I_n - M)x = Sx$ soit

$$x + Mx = Sx - MSx.$$

Pour $u = x + Sx \geqslant 0$ on a $Mu = Mx + MSx = x - Sx \geqslant 0$ et $u + Mu = 2x > 0$ d'où le résultat.

Partie C

11) La matrice étant orthogonale, ses vecteurs colonnes sont de norme 1 et donc $\alpha^2 + ||r||^2 = 1$ et donc $|\alpha| \leqslant 1$ avec égalité si et seulement si $r = 0$. Pour q, le raisonnement est le même avec ${}^tO$.

12) Dans le cas où $|\alpha| = 1$, on a $q = r = 0$ et donc P est orthogonale. On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : soit $x_1 > 0$ un vecteur de $\mathbf{R}^{n-1}$ et S_1 une matrice de signe de taille $n-1$ telle que $Px_1 = S_1x_1$. On pose alors $x = {}^t(x_1, 1) > 0$ et $S = \mathrm{diag}(S_1, \alpha)$: on a bien $Ox = Sx$.

13) L'égalité ${}^tOO = I_n$ donne les égalité ${}^tPP + {}^tqq = I_{n-1}$, ${}^tPr + \alpha q = 0$ et ${}^trr + \alpha^2 = 1$.

14) On développe l'égalité ${}^t(P - \frac{r{}^tq}{\alpha-1})(P - \frac{r{}^tq}{\alpha-1})$ ce qui donne

$${}^tPP + \frac{q({}^trr){}^tq}{(\alpha-1)^2} - \frac{1}{\alpha-1}\Big(({}^tPr){}^tq + q{}^trP\Big),$$

soit

$$I_{n-1} + q{}^tq(-1 + \frac{1-\alpha^2}{(\alpha-1)^2}) - \frac{1}{\alpha-1}\Big(-\alpha q{}^tq - \alpha q{}^tq\Big)$$

et donc

$$I_{n-1} + \frac{1}{(\alpha-1)^2} q{}^tq(-(\alpha-1)^2 + 1 - \alpha^2 + 2\alpha(\alpha-1)) = I_{n-1}.$$

Le calcul est le même pour Q_+.

15) On calcule

$$\begin{aligned} {}^tQ_+Q_- &= {}^t(P - \tfrac{r\,{}^tq}{\alpha+1})(P - \tfrac{r\,{}^tq}{\alpha-1}) \\ &= {}^tPP - q\,{}^tq - \tfrac{1}{\alpha-1}\,{}^tPr\,{}^tq - \tfrac{1}{\alpha+1}q\,{}^trP \\ &= I_{n-1} - 2q\,{}^tq(1 + \tfrac{\alpha}{\alpha-1} + \tfrac{\alpha}{\alpha+1}) \\ &= I_{n-1} - \tfrac{2}{1-\alpha^2}q\,{}^tq. \end{aligned}$$

En multipliant cette égalité à gauche par Q_+, on obtient la relation $Q_- = Q_+ - \frac{2}{1-\alpha^2}Q_+q\ {}^tq$.

16) On part de $Q_- = Q_+ - \frac{2}{1-\alpha^2}Q_+q\ {}^tq$ et donc (sans utiliser l'adjonction qui est hors programme) :

$$\begin{aligned} \langle S_+x_+|S_-x_-\rangle &= \langle Q_+x_+|Q_-x_-\rangle \\ &= \langle Q_+x_+|Q_+x_-\rangle - \tfrac{2}{1-\alpha^2}\langle Q_+x_+|Q_+q({}^tqx_-)\rangle \\ &= \langle x_+|x_-\rangle - \tfrac{2\,{}^tqx_-}{1-\alpha^2}\langle x_+|q\rangle \\ &= \langle x_+|x_-\rangle - \tfrac{2\angle q|x_-\rangle}{1-\alpha^2}\langle x_+|q\rangle \\ &= \langle x_+|x_-\rangle - \tfrac{2}{1-\alpha^2}\langle x_+|q\rangle\langle x_-|q\rangle. \end{aligned}$$

17) Dans le cas où $S_+ \neq S_-$, d'après la question 1-a), on a $\langle S_+x_+|S_-x_-\rangle < \langle x_+|x_-\rangle$ de sorte que d'après la question précédente η_+ et η_- sont non nuls et de signes distincts. Ainsi l'un des $z_\pm$ est strictement positif. Par ailleurs on a

$$\begin{pmatrix} P & r \\ {}^tq & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\pm \\ \eta_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Px_\pm + r\eta_\pm \\ {}^tqx_\pm + \alpha\eta_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_\pm x_\pm \\ {}^tqx_\pm + \alpha\eta_\pm \end{pmatrix},$$

avec ${}^tqx_\pm + \alpha\eta_\pm = \langle x_\pm|q\rangle\Big(1 - \frac{\alpha}{\alpha\pm1}\Big) = \langle x_\pm|q\rangle\frac{\pm1}{\alpha\pm1} = \mp\eta_\pm$, d'où le résultat.

18-a) D'après 1-a) avec $S_+ = S_-$, on a $\langle S_+x_+|S_-x_-\rangle = \langle x_+|x_-\rangle$ et donc $\langle x_+|q\rangle\langle x_-|q\rangle = 0$ et donc l'un des deux est nul. On suppose comme dans le texte que $\langle x_+|q\rangle = 0$. Le calcul de la question précédente donne alors $Oz = R_\pm z$.

18-b) Si on reprend ce qui précède avec l'écriture de la question (i.e. avec les primes), on construit z' et R' comme dans l'énoncé. Si η' est non nul, on a gagné ; on suppose donc $\eta' = 0$.

18-c) On a ainsi $O(z + z') = R_\pm z + R'_\pm z'$ avec $z + z' > 0$. En prenant les normes on a $||z + z'|| = ||R_\pm z + R'_\pm z'||$ de sorte que d'après la question 2-c), en utilisant $x_+, x' > 0$, on en déduit que pour $R_\pm = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n-1}, \pm1)$ et $R'_\pm = \mathrm{diag}(\pm1, \epsilon'_2, \cdots, \epsilon'_n)$, on a pour tout $i = 2, \cdots, n-1$, $\epsilon_i = \epsilon'_i$. En ajustant les signes $\pm$ pour $R_\pm$ et $rR'_\pm$, on en déduit qu'un des 4 couples $(R_\pm, R'_\pm)$ est de la forme (S, S).

Partie D

19) La troisième coordonnées par blocs de $By > 0$ s'écrit $-{}^tAz \geqslant 0$ et la quatrième de $y + By$ s'écrit $\langle b|z\rangle + t > 0$, d'où le résultat pour $t = 0$.

20) Si $t > 0$, la première (resp. la deuxième) ligne de $By \geqslant 0$ s'écrit $Ax - bt \geqslant 0$ (resp. $-Ax + bt \geqslant 0$) et donc $AX = bt$ de sorte que $\frac{x}{t}$ est une solution de $Az = b$.

Remarque : la preuve du lemme de Farkas passant par le théorème de Broyden, fonctionne pour tout corps ordonné, par exemple pour le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. Les preuves classiques du lemme de Farkas ne fonctionnent en général que pour le corps **R**, i.e. sont de natures analytiques en reposant d'une manière ou d'une autre sur le théorème des valeurs intermédiaires.