Écoles Normales Supérieures - École Polytechnique

Concours d'admission 2021

Lundi 12 avril 2021 - 8h00 - 12h00

Filière PSI

Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé

Aucune calculatrice n'est autorisée

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Préambule

On s'intéresse dans ce problème à certains sous ensembles de l'espace des fonctions à valeurs réelles et continues sur $]0, +\infty[$. On peut classiquement définir les opérateurs d'intégration J et de dérivation D de sorte qu'en particulier la composition $D \circ J$ est l'opérateur identité, où la notation $\circ$ désigne l'opérateur de composition usuel.

On cherche alors à définir pour tout réel $\alpha > 0$ des opérateurs fractionnaires d'intégration J^α et de dérivation D^α tels que $D^\alpha \circ J^\alpha$ est l'identité et tels que pour tout $\alpha, \beta > 0$ on aurait

$$J^\alpha \circ J^\beta = J^{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad D^\alpha \circ D^\beta = D^{\alpha+\beta}.$$

En particulier pour $\alpha = 1/2$, on cherche à définir une racine carrée de D, i.e. un opérateur $D^{1/2}$ tel que $D^{1/2} \circ D^{1/2} = D$.

Parmi les nombreuses approches possibles, nous allons suivre celles de Riemann-Liouville et Caputo.

- On commence par des préliminaires sur la fonction Gamma.
- On démontre ensuite une version simple du théorème de Fubini pour des fonctions continues sur un carré et qu'on s'autorisera à utiliser dans la suite du problème dans un cadre plus général, cf. la question 2).
- On introduit enfin la transformation de Laplace et on prouve son caractère injectif sur les fonctions continues.

L'intégration fractionnaire est définie dans la partie A alors que les dérivées fractionnaires le seront dans la partie B. Dans la dernière partie on s'intéressera enfin à deux équations différentielles fractionnaires simples.

Le candidat est libre d'admettre les résultats de la partie Préliminaires*, pour aborder les parties A, B et C. Pour simplifier les arguments dans les préliminaires on se restreint aux fonctions continues sur* $[0, +\infty[$ *alors qu'on aura parfois besoin de considérer des fonctions continues sur* $]0, +\infty[$ *intégrables en* 0*. Le candidat est autorisé à utiliser les résultats des préliminaires dans ce cadre plus général.*

Préliminaires

1) On considère la fonction Gamma définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

   1-a) Montrer que Γ est bien définie pour x réel strictement positif.

   1-b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.

   - On admettra pour la suite que la fonction Gamma précédente peut être prolongée en une fonction qu'on notera encore Γ définie sur $\mathbf{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$: l'écriture $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ n'est alors valable que pour $x > 0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose en outre $\Gamma(-n) := +\infty$.

   - On utilisera aussi sans justification l'égalité suivante

$$B(p,q) := \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (E_1)$$

   où p, q sont des réels strictement positifs.

2) Soit $a \in \mathbf{R}$ strictement positif et soit $f : [0,a] \times [0,a] \to \mathbf{R}$ définie et continue. Dans cette question on cherche à établir la version simple suivante du théorème de Fubini

$$\int_0^a dt \Big(\int_0^t f(t,u) du \Big) = \int_0^a du \Big(\int_u^a f(t,u) dt \Big). \qquad (E_2)$$

   que le candidat pourra utiliser dans la suite du problème pour $a = +\infty$ **lorsque** $\int_0^{+\infty} dt (\int_0^t |f(t,u)| du)$ **converge.**

   2-a) i. Pour $t \in [0,a]$ fixé, soit $h(\eta) = \int_0^t |f(t+\eta, u) - f(t,u)| du$ définie pour $\eta \in [-t, a-t]$. Montrer que h tend vers 0 lorsque η tend vers 0.

   ii. Montrer avec soin la continuité de $t \mapsto \int_0^t f(t,u) du$ sur $[0,a]$.

   iii. Calculer la dérivée de la fonction $F(x) = \int_0^x dt \big(\int_0^t f(t,u) du \big)$.

   2-b) Pour tous $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant a$, on introduit $h(\alpha, \beta) = \int_0^\alpha du \big(\int_u^\beta f(t,u) dt \big)$.

   i. Expliciter la dérivée partielle $\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, \beta)$.

ii. Expliciter $\frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha, \beta)$.

iii. Donner alors une expression de la dérivée de $G(x) = \int_0^x du\big(\int_u^x f(t,u)dt\big)$.

2-c) Déduire de ce qui précède une preuve de l'égalité (E_2).

3) Pour $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ des fonctions continues, on définit leur produit de convolution

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

3-a) Montrer que $f * g$ est continue sur $[0, +\infty[$.

3-b) Montrer que le produit de convolution est commutatif.

3-c) Montrer que le produit de convolution est associatif.

4) Une fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ continue est dite d'ordre exponentiel s'il existe des réels $M > 0$ et r tels que pour tout $t \geqslant 0$, on a $|f(t)| \leqslant Me^{rt}$. Pour une telle fonction f, on définit alors sa transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt.$$

4-a) Montrer que $\mathcal{L}(f)(s)$ est bien définie pour tout réel s assez grand.

4-b) Montrer que si f est de classe C^1 avec f et f' d'ordre exponentiel, alors pour s assez grand, $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$.

4-c) Soient f et g des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ et d'ordre exponentiel. Montrer que $f * g$ est d'ordre exponentiel.

4-d) Sous les hypothèses de la question précédente, en utilisant (E_2) pour $a = +\infty$, montrer que, pour s assez grand,

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s).$$

5) On cherche à présent à montrer que $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$ pour tout s assez grand si et seulement si $f = g$.

5-a) Justifier qu'on peut se ramener à chercher les fonctions f telles que $\mathcal{L}(f)(s) = 0$ pour tout s assez grand.

5-b) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que pour tout $n \geqslant 0$, on a $\int_a^b x^n f(x)dx = 0$. Montrer que $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ et en déduire que f est la fonction nulle.
Indication : on pourra utiliser, sans justification, le théorème d'approximation de Weierstrass qui établit l'existence pour tout $\epsilon > 0$, d'un polynome $p_\epsilon \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_\epsilon(x)| \leqslant \epsilon$.

5-c) En déduire que $\mathcal{L}$ est injective.
Indication : on pourra utiliser un changement de variable $y = e^{-t}$.

Dans la suite du problème le candidat pourra librement utiliser les résultats de ces préliminaires dans le cas où les fonctions ne sont plus nécessairement continues en 0 mais y sont seulement intégrables.

A- Intégration fractionnaire

6) Pour $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et intégrable en 0, on note $I(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ et pour tout $n \geqslant 2$ on définit par récurrence

$$I^n(f)(x) := I^{n-1}(I(f))(x).$$

Montrer que $I^2 f(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$ puis que

$$I^n(f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt.$$

7) Pour tout réel $\alpha \in \mathbf{R}$, on note $\Phi_\alpha :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

en convenant que pour $\alpha \in \mathbf{Z}$ négatif ou nul, Φ_α est la fonction nulle.

7-a) Quelle est la dérivée m-ème de Φ_α ?

7-b) Montrer, en utilisant (E_1), que pour tout α, β des réels strictement positifs, on a $\Phi_\alpha * \Phi_\beta = \Phi_{\alpha+\beta}$.

7-c) Expliciter $\mathcal{L}(\Phi_\alpha)(s)$ pour $\alpha > 0$.

8) Pour tout réel $\alpha > 0$, on définit

$$J^\alpha(f)(x) = \Phi_\alpha * f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-u)^{\alpha-1} f(u)du,$$

et on note J^0 l'opérateur identité, i.e. $J^0(f)(x) = f(x)$. D'après la question 6), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $J^n = I^n$.

8-a) Montrer que pour tous réels α, β positifs, on a $J^\alpha \circ J^\beta = J^{\alpha+\beta}$.

8-b) On suppose f d'ordre exponentiel. Pour $\alpha > 0$, montrer que $\mathcal{L}(J^\alpha f)(s)$ est bien défini pour s assez grand et égal alors à $s^{-\alpha}\mathcal{L}(f)(s)$.

8-c) Pour α et γ des réels strictement positifs, montrer que $J^\alpha \Phi_\gamma = \Phi_{\gamma+\alpha}$.

8-d) Soit f d'ordre exponentiel et soit $\alpha > 0$. Montrer que $J^\alpha f$ est la fonction nulle si et seulement si f est la fonction nulle.

B- Dérivées fractionnaires

On note D l'opération de dérivation usuel, $D(f)(x) = f'(x)$ lorsque f est dérivable. Par récurrence, lorsque cela est possible, on définit $D^n(f) = D(D^{n-1}f)$ de sorte que trivialement $D^n \circ J^n$ est l'opérateur identité.

9) Pour f dérivable n fois, montrer que $J^n \circ D^n(f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$.

10) Etant donné un réel $\alpha > 0$, on note m l'entier tel que $m-1 < \alpha \leqslant m$, et on définit $D^\alpha := D^m \circ J^{m-\alpha}$, i.e., sous réserve d'existence,

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} D^m\Big(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{\alpha+1-m}} du\Big) & m-1 < \alpha < m, \\ D^m f(t) & \alpha = m, \end{cases}$$

et on note D^0 l'opérateur identité.
Remarque : on ne demande pas au candidat de donner des conditions nécessaires pour l'existence de $D^\alpha f$.

10-a) Pour tout $\alpha > 0$, expliciter $D^\alpha \circ J^\alpha$

10-b) Pour $f = \mathbb{1}$ expliciter $D^\alpha \mathbb{1}$ et préciser pour quel α, la fonction $D^\alpha \mathbb{1}$ est la fonction nulle.

10-c) Pour $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$, montrer que $D^\alpha \Phi_\gamma = \Phi_{\gamma-\alpha}$.

10-d) Pour f d'ordre exponentiel, montrer que $D^\alpha f$ est la fonction nulle si et seulement si f s'écrit sous la forme $f(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j x^{\alpha-j}$ où $m-1 < \alpha \leqslant m$.

11) Loi des exposants.

11-a) Soit $f(t) = \Phi_{1/2}(t)$ et $\alpha = \beta = 1/2$. Calculer $(D^\alpha \circ D^\beta)f$ et $D^{\alpha+\beta}f$.

11-b) Soit $g = \Phi^{3/2}$, $\alpha = 1/2$ et $\beta = 3/2$. Calculer $(D^\alpha \circ D^\beta)g$, $(D^\beta \circ D^\alpha)g$ et $D^{\alpha+\beta}g$.

11-c) Soit $f(t) = t^\lambda \eta(t)$ où $\lambda > -1$ et $\eta(t) = \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n \frac{t^n}{n!}$ admet un rayon de convergence $R > 0$. Montrer alors que pour tout $0 \leqslant t < R$, $0 \leqslant \beta < \lambda + 1$ et $\alpha \geqslant 0$, on a $(D^\alpha \circ D^\beta)f = D^{\alpha+\beta}f$.

12) Soit un réel $\alpha > 0$ et $m-1 < \alpha \leqslant m$. On pose alors, sous réserve d'existence, $D_*^\alpha f := J^{m-\alpha} \circ D^m f$, i.e.

$$D_*^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(u)}{(t-u)^{\alpha+1-m}} du, & m-1 < \alpha < m \\ D^m f(t) & \alpha = m. \end{cases}$$

12-a) Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^m$, telle que $D_*^\alpha f$ est bien définie et égale à la fonction nulle. Montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $m-1$.

12-b) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et soit $0 < \alpha < 1$. Montrer que $(D \circ J^\alpha)f(x) = (J^\alpha \circ D)f(x) + f(0)\Phi_\alpha(x)$.

12-c) Soit $m-1 < \alpha < m$ et soit f de classe $\mathcal{C}^m([0, +\infty[, \mathbf{R})$. Sous réserve d'existence de tous les termes, montrer que

$$D^\alpha f(x) = D_*^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0).$$

12-d) En déduire que $D^\alpha \Big(f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \Big) = D_*^\alpha f(x)$.

C- Deux équations différentielles fractionnaires

13) Pour $0 < \alpha < 1$, l'équation d'Abel en g est

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{g(u)}{(t-u)^{1-\alpha}} du = f(t),$$

où f est une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ et d'ordre exponentiel.

13-a) Exprimer $g(t)$ en fonction de $f(t)$ à l'aide de l'opérateur D^α.

13-b) On suppose que g est d'ordre exponentiel. Exprimer la transformée de Laplace de g en fonction de celle de f.

14) Pour $\alpha \geqslant 0$ on introduit la série entière

$$E_\alpha(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(1+\alpha k)}.$$

14-a) Calculer $E_0(\theta)$, $E_1(\theta)$ et $E_2(-\theta^2)$.

14-b) Montrer que le rayon de convergence de $E_\alpha(\theta)$ est strictement positif.

14-c) On pose $e_\alpha(t) = E_\alpha(-(t^\alpha))$ et on admet qu'il est d'ordre exponentiel. Montrer que pour $s > 1$, on a $\mathcal{L}(e_\alpha)(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+1}$.

14-d) On pose $u_k(t) := J^k e_\alpha(t)$. Montrer que $\mathcal{L}(u_k)(s) = \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha+1}$.

15) On cherche à résoudre l'équation $D_*^\alpha u(t) = -u(t)$. Montrer qu'après application de l'opérateur J^α, cette équation devient

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{t^k}{k!} - J^\alpha u(t),$$

où on précisera les c_k.

16) On suppose que $u(t)$ est d'ordre exponentiel. Montrer que

$$\mathcal{L}(u)(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{s^{k+1}} - \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}(u)(s),$$

et en déduire que $u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k u_k(t)$.

FIN DE L'ÉPREUVE

Rapport

L'opérateur de dérivation D sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ s'itère naturellement pour définir des opérateurs D^n. L'intégration peut aussi se voir comme une dérivée d'ordre -1 et on dispose donc ainsi d'une définition de D^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$, avec des relations de composition bien compris.

Le sujet traite alors de la question de savoir définir un opérateur de dérivation fractionnaire, i.e. un D^α pour $\alpha \in \mathbf{R}$ quelconque interpolant les D^n pour $n \in \mathbf{Z}$ et avec des relations de composition raisonnables.

L'intérêt d'une telle problématique n'est pas seulement théorique mais trouve des applications en mécanique des fluides où la dérivée d'ordre $1/2$ apparait naturellement ou en viscoélasticité des gommes. Riemann, Liouville et Caputo ont proposé des approches de ce problème en partant de l'idée d'exprimer D^{-n} comme un opérateur avec un noyau. L'approche moderne utilise la transformation de Laplace.

Le problème se découpe alors en quatre parties.

- La première, peut être plus fine mais certainement plus classique que les suivantes, établit les outils de base nécessaires : une formule de Fubini sur un triangle, le produit de convolution et la transformation de Laplace.
- Dans la deuxième, on définit l'intégration fractionnaire à l'aide d'un opérateur à noyau,
- puis on définit la dérivation fractionnaire tout d'abord selon Riemann-Liouville, puis Caputo et on étudie les lois de composition.
- Enfin dans une dernière partie, on étudie deux équations différentielles fractionnaires simples.

Préliminaires

(1) Le problème commence par étudier les premières propriétés de la fonction Γ. Sa définition en a) puis son équation fonctionnelle en b). Malgré leur caractère élémentaire et classique, le jury a noté des imprécisions dans de trop nombreuses copies (l'intégrande n'est pas prolongeable en 0 par continuité et il converge certes vers 0 en l'infini mais cela ne suffit pas à conclure à la convergence).

(2) On propose de démontrer un cas simple du théorème de Fubini sur un triangle.

(a) Pour l'essentiel il s'agissait de bien justifier les arguments de convergence. Rares ont été les candidats qui ont vu l'intérêt de (ii), quand le paramètre était à la fois dans l'intégrande et dans les bornes de l'intégrale.

(b) La dérivation sous le signe intégrale a trop rarement été bien justifiée, en revanche la règle de la chaine a connu plus de succès et a permis aux candidats l'ayant bien appliquée de réussir (c).

(3) La justification de 3-a) était similaire à celle de 2-a) mais à nouveau peu de candidats se sont aperçus que le paramètre x apparaissait aux bornes de l'intégrale. Les questions b) et c) ont été plutôt bien réussies.

(4) Le sujet étudie à présent la transformation de Laplace pour les fonctions continues d'ordre exponentiel ce qui permet de justifier aisément l'existence en a) et de faire l'intégration par parties en b). La question c) a posé plus de problèmes comme souvent quand il s'agit de majorer efficacement : les candidats se sont alors souvent perdus dans des sous-cas multiples et complètement inutiles sans se rendre compte qu'il ne s'agissait pas d'optimiser une majoration mais seulement de montrer une convergence simple.

(5) On montre l'injectivité de la transformation de Laplace en utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass. La linéarité de $\mathcal{L}$ a été plutôt bien vue, ce qui n'a pas été souvent le cas des majorations en b) et encore moins c) sauf dans de rares copies qui se sont révélées excellentes au bout du compte.

A- Intégration fractionnaire

(6) On commence par introduire un opérateur à noyau, par récurrence par exemple.

(7) La formule $D(\Phi_\alpha) = \Phi_{\alpha-1}$, avec les conventions sur Γ, a rarement été donnée en a). Le calcul à mener dans b) a été bien réussi, mais la question c), ouverte, a conduit à de très nombreuses erreurs.

(8) On utilise l'écriture de l'opérateur à noyau de 6) en remplaçant le paramètre entier n par $\alpha > 0$ réel quelconque et on vérifie qu'il vérifie des propriétés raisonnables. Il interpole I^n, il se compose convenablement en a), son comportement relativement à la transformée de Laplace en b), son effet sur Φ_α en c) et qu'une primitive fractionnaire d'une fonction non nulle n'est pas la fonction nulle en e). Ces questions relativement faciles ont été plutôt bien réussies.

B- Dérivées fractionnaires

(9) La première formule était celle de Taylor reste intégrale qui a été souvent reconnue et sinon redémontrée par récurrence.

(10) On définit la dérivation fractionnaire au sens de Rieman-Liouville. On commence par montrer que c'est un inverse à gauche de l'intégration en a). On demande ensuite en b) de constater que D^α appliqué à une fonction constante n'est pas nulle sauf dans le cas classique où $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Cette question, ouverte, a été très mal traitée. On étudie en c) son effet sur les Φ_α, question facile et bien faite, contrairement à d) qui n'a presque jamais été abordée.

(11) Il s'agissait ensuite de constater que l'opérateur de dérivation fractionnaire se composait mal : les calculs étaient simples puisque les effets de D^α et J^α étaient déjà bien identifiés sur les Φ_γ. Pour autant les bonnes réponses ont été très rares.

(12) On introduit la dérivation selon Caputo dont on étudie les liens avec celle de Riemann-Liouville. La question a été très peu abordée : les candidats sont plutôt partis vers les questions plus faciles de la partie C.

C- Deux équations différentielles fractionnaires

Une proportion relativement important des candidats ont su repérer des points à gagner dans les questions 13) et 14). Les dernières questions n'ont pas été abordées ce qui était relativement prévisible vue la longueur du sujet.

(13) On part de l'équation d'Abel écrite sous forme intégrale qu'on demande en a) d'exprimer sous forme différentielle en utilisant que D^α est un

inverse à gauche de J^α, où sous forme d'une égalité des transformées de Laplace en b). Ceux qui se sont penchés sur cette question, l'ont bien réussie.

(14) Des questions élémentaires sur des séries entières classiques en a) qui ont souvent été repérées. La règle de d'Alembert en b) a été bien vue mais rarement bien appliquée. En c) il s'agissait pour l'essentiel d'intervertir somme et intégrale dans le disque de convergence. En d) il suffisait d'appliquer l'opérateur $\mathcal{L}$ à l'égalité $J^\alpha e_\alpha = \Phi_\alpha * e_\alpha$.

(15) On étudie l'équation différentielle fractionnaire linéaire d'ordre 1 la plus simple $D^\alpha u = -u$. Pour répondre à cette question il suffisait de rappeler l'égalité $J^\alpha \circ D_*^\alpha = J^m D^m$ et utiliser 9).

(16) Le calcul de $\mathcal{L}(\Phi_k)$, avec la linéarité de $\mathcal{L}$ et 7-c) permettait de conclure.

Plus généralement le jury note des difficultés dans les majorations et notamment lors des manipulations des inégalités qu'on multiplie sans s'inquiéter des signes. Pour l'essentiel le cours est connu mais trop souvent appliqué de manière trop approximative, notamment lors de l'utilisation du théorème de convergence dominée.

Corrigé succinct

Préliminaires

1-a) L'intégrande est défini et continu sur $]0,+\infty[$. La convergence en 0 découle de $x-1>-1$ et en l'infini $e^{-t}t^{x-1}=o(t^{-2})$.

1-b) On intègre par parties $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt = [-e^{-t}t^x]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xe^{-t}t^{x-1}dt$. On a $\Gamma(1)=1$ et donc par récurrence immédiate $\Gamma(n)=(n-1)!$.

2-a)

(i) La suite de fonctions $g_\eta : u \mapsto |f(t+\eta,u)-f(t,u)|$ tend vers la fonction nulle et est majorée par $2||f||_\infty$, on conclut alors par convergence dominée.

(ii) On majore

$$|\int_0^{t+\eta} f(t+\eta,u)du - \int_0^t f(t+\eta,u)du| \leqslant \int_0^t |f(t+\eta,u)-f(t,u)|du + \int_t^{t+\eta} |f(t+\eta,u)|du$$

où d'après (i) le premier terme tend vers 0 et le deuxième est $\leqslant ||f||_\infty \eta$.

(iii) On a $F'(x)=\int_0^x f(x,u)du$.

2-b)

(i) On a $\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta f(t,\alpha)dt$ et

(ii) (En utilisant la convergence dominée) $\frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha,\beta)=\int_0^\alpha f(\beta,u)du$.

(iii) On a alors

$$G'(x)=\frac{\partial h}{\partial \alpha}(x,x)+\frac{\partial h}{\partial \beta}(x,x)=\int_x^x f(t,x)dt+\int_0^x f(x,u)du=F'(x).$$

2-c) D'après la question précédente $F(x)-G(x)$ est constante égal à $F(0)-G(0)=0$.

3-a) L'intégrande est défini continu sur $]0,x[$; l'intégralité en 0 et x découle simplement de l'hypothèse que f et g sont intégrables en 0. Pour la continuité, on raisonne comme dans 2-a).

3-b) Faire le changement de variable $u=x-t$.

3-c) On écrit

$$\begin{array}{ll}
(f*g)*h(x) & = \int_0^x f*g(x-t)h(t)dt \\
 & = \int_0^x (\int_0^{x-t} f(x-t-u)g(u)du)h(t)dt \\
(v=u+t) & = \int_0^x (\int_t^x f(x-v)g(v-t)dv)h(t)dt \\
(Fubini) & = \int_0^x f(x-v)(\int_0^t g(v-t)dt)dv \\
 & = f*(g*h)(x)
\end{array}$$

4-a) La convergence en 0 est claire par hypothèse. Pour $s > r$, on a $|e^{-st}f(t)| \leqslant Me^{-(s-r)t}$ et l'intégrale est convergente à l'infini.

4-b) intégration par parties (tout converge par hypothèse)

4-c) majorations élémentaires

4-d) On va appliquer le théorème de Fubini (version $a = +\infty$)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-sx} f * g(x)dx &= \int_0^{+\infty} e^{-sx}(\int_0^x f(x-t)g(t)dt)dx \\ &= \int_0^{+\infty}(\int_t^{+\infty} f(x-t)e^{-s(x-t)}dx)g(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^{+\infty}(\int_t^{+\infty} f(u)e^{-su}dx)g(t)e^{-st}dt \\ &= \int_t^{+\infty} f(u)e^{-su}dx. \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st}dt \end{aligned}$$

5-a) Par linéarité de l'opérateur de Laplace

5-b) Avec les notations de l'énoncé, on écrit

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(x)dx &= \int_a^b (f(x) - p_\epsilon(x))f(x)dx + \overbrace{\int_a^b f(x)p(x)dx}^{=0} \\ &\leqslant \epsilon(b-a)\max_{x\in[a,b]}|f(x)|. \end{aligned}$$

5-c) On prend $b > r$ assez grand et soit $s = b + n + 1$ avec n variable :

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^{+\infty} e^{-(b+n+1)x} f(x)dx &= \int_0^1 y^b y^n f(-\ln y)dy \\ &= \int_0^1 y^n v(y)dy \end{aligned}$$

avec $v(y) = y^b f(-lny)$ continu sur $]0, 1]$ et de limite nulle en 0. D'après la question précédente v est nulle et donc f aussi.

Partie A

6) On intègre par partie

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = [I(f)(x-t)]_0^x + \int_0^x I(f)(t)dt = I^2 f(x),$$

puis par récurrence

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt &= [(x-t)^{n-1} I(f)(t)]_0^x + \int_0^x (n-1)(x-t)^{n-2} I(f)(t)dt \\ &= (n-1)! I^{n-1}(I(f). \end{aligned}$$

7-a) On a $\Phi_\alpha' = \Phi_{\alpha-1}$ et par récurrence immédiate $\Phi_\alpha^{(m)} = \Phi_{\alpha-m}$: bien noté que Φ_α est la fonction nulle pour $-\alpha \in \mathbb{N}$.

7-b) On écrit (en notant que Φ_α est clairement d'ordre exponentielle)

$$\begin{array}{ll} \Phi_\alpha * \Phi_\beta(x) & = \int_0^x \Phi_\alpha(x-t)\Phi_\beta(t)dt \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+\beta-1}(1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(p,q) x^{\alpha+\beta-1} \\ & = \Phi_{\alpha+\beta}(x). \end{array}$$

7-c) La fonction Φ_α est clairement d'ordre exponentielle. Après le changement de variable $u = st$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t^{\alpha-1} dt = s^{-\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du = s^{-\alpha}\Gamma(\alpha).$$

8-a) Cela découle directement de l'associativité du produit de convolution et de la formule de 7-a)

8-b) D'après 4-c), $\mathcal{L}(\Phi_\alpha * f)(s) = \mathcal{L}(\Phi_\alpha)\mathcal{L}(f)$ et le résultat découle de 7-c)

8-c) Le résultat découle de 7-b).

8-d) D'après 8-b) il faut $\mathcal{L}(f)(s) = 0$ et donc f nulle d'après 5-c).

Partie B

9) On a vu que $J_n = I_n$, la formule est donc classique (on peut la redémontrer par récurrence par exemple en appliquant I à $I^{n-1} \circ D^{n-1}(Df)(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-2} f^{(k+1)}(0^+)\frac{x^k}{k!}$.

10-a) Clairement $D^\alpha \circ J^\alpha$ est l'opérateur identité.

10-b)D'après 7-a) et 8-d), on a $J^{m-\alpha}\mathbb{1} = \Phi_{m-\alpha+1}$ et donc $D^\alpha \mathbb{1} = D^m \Phi_{m-\alpha+1} = \Phi_{1-\alpha}$. On tombe sur la fonction nulle si et seulement si $\Gamma(1-\alpha) = 0$, i.e. ssi $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

10-c) On a vu $J^{m-\alpha}\Phi_\gamma = \Phi_{\gamma+m-\alpha}$ et $D^m \Phi_{\gamma+m-\alpha} = \Phi_{\gamma-\alpha}$.

10-d) Il faut que $J^{m-\alpha} f(x) = \sum_{k_0}^{m-1} c_k \Phi_{k-m}(x) \in \mathbf{R}_{m-1}[X]$. Or pour $g(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \Phi_{k-\alpha}(x)$, on a $J^{m-\alpha} g(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \Phi_{k-m}(x)$. On conclut alors via l'injectivité de $J^{m-\alpha}$, cf. 8-e).

11-a) On a $D^{1/2}\Phi_{1/2}(t) = 0$ et donc $D^{1/2} \circ D^{1/2}\Phi_{1/2} = 0$. En revanche $D^1\Phi_{1/2} = \Phi_{-1/2}$.

11-b) On a $D^{1/2}\Phi_{3/2} = 1$ et $D^{3/2}D^{1/2}\Phi_{3/2} = 0$. D'un autre côté $D_{3/2}\Phi_{3/2} = 0$ et donc $D^{1/2}D^{3/2}\Phi_{3/2} = 0$. Par contre $D^2\Phi_{3/2} = \Phi_{-1/2} \neq 0$.

11-c) On dérive terme à terme dans le disque de convergence en utilisant $D^\beta\Phi_{n+1+\lambda} = \Phi_{n+1+\lambda-\beta}$ lequel n'est jamais nul puis que $0 \leqslant \beta < \lambda + 1$ et $n \geqslant 0$. On applique alors D^α et on retrouve la dérivation terme à terme par $D^{\alpha+\beta}$.

12-a) Si $\alpha = m$ c'est clair ; le cas général découle de 8-d).

12-b) Le changement de variable $t = x - u$ donne $\int_0^x \frac{(x-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(u)du = \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x-t)dt$ et on dérive comme dans la question 2-c) via 2-b) ce qui donne

$$\int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f'(x-t)dt + \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(0).$$

12-c) On écrit $J^{m-\alpha}D^m = J^\alpha(J^{m-1}D^{m-1})D$ et on utilise 9), i.e.

$$\begin{aligned} D_*^\alpha f(x) &= J^\alpha(f'(x) - \textstyle\sum_{k=0}^{m-1} f^{(k+1)}(0)\frac{x^k}{k!}) \\ &= J^\alpha Df(x) - \textstyle\sum_{k=0}^{m-1} f^{(k+1)}(0)J^\alpha(\Phi_{k+1}) \\ &= DJ^\alpha f(x) - f(0)\Phi_{1-\alpha} - \textstyle\sum_{k=0}^{m-1} f^{(k+1)}(0)\Phi_{k+1-\alpha}) \\ &= D(D^{m-1}J^{m-1})J^\alpha f - \textstyle\sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)\Psi_{k+1-\alpha}(x) \end{aligned}$$

12-d) Une simple réécriture de l'égalité précédente en utilisant $D^\alpha\Phi_\gamma = \Phi_{\gamma-\alpha}$.

Partie C

13-a) L'équation s'écrit $J^\alpha g(t) = f(t)$ ce qui est équivalent à $g(t) = D^\alpha f(t)$.

13-b) On applique $\mathcal{L}$ à $J^\alpha g = f$ ce qui donne $\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(f)s^\alpha$.

14-a) On a $E_1(\theta) = \exp(\theta)$, $E_0(\theta) = \frac{1}{1-\theta}$ et $E_2(-\theta^2) = \cos\theta$.

14-b) On applique la règle de d'Alembert $\frac{\Gamma(1+\alpha k)}{\Gamma(1+\alpha k+\alpha)} \leqslant 1$ de sorte que $R \geqslant 1$.

14-c) Sur le disque de convergence on peut intervertir somme et intégrale. On calcule $\int_0^{+\infty} e^{-s}t^{\alpha k}/\Gamma(1+\alpha k)dt$ via le changement de variable $u = st$. On trouve alors $s^{-(1+\alpha k)}$ et on reconnait la série entière de $\frac{1}{1+s^\alpha}$.

14-d) On rappelle que $J^\alpha e_\alpha = \Phi_\alpha * e_\alpha$. On applique alors $\mathcal{L}$ ce qui donne le résultat d'après 7-c).

15) On rappelle que $J^\alpha D^\alpha_* = J^m D^m$ et on conclut d'après 9).

16) Cela découle de la linéarité de $\mathcal{L}$, du calcul de $\mathcal{L}(\Phi_k)$ en 7-c), et de 4-c).

Rapport

L'opérateur de dérivation D sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ s'itère naturellement pour définir des opérateurs D^n. L'intégration peut aussi se voir comme une dérivée d'ordre -1 et on dispose donc ainsi d'une définition de D^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$, avec des relations de composition bien compris.

Le sujet traite alors de la question de savoir définir un opérateur de dérivation fractionnaire, i.e. un D^α pour $\alpha \in \mathbf{R}$ quelconque interpolant les D^n pour $n \in \mathbf{Z}$ et avec des relations de composition raisonnables.

L'intérêt d'une telle problématique n'est pas seulement théorique mais trouve des applications en mécanique des fluides où la dérivée d'ordre $1/2$ apparait naturellement ou en viscoélasticité des gommes. Riemann, Liouville et Caputo ont proposé des approches de ce problème en partant de l'idée d'exprimer D^{-n} comme un opérateur avec un noyau. L'approche moderne utilise la transformation de Laplace.

Le problème se découpe alors en quatre parties.

- La première, peut être plus fine mais certainement plus classique que les suivantes, établit les outils de base nécessaires : une formule de Fubini sur un triangle, le produit de convolution et la transformation de Laplace.

- Dans la deuxième, on définit l'intégration fractionnaire à l'aide d'un opérateur à noyau,

- puis on définit la dérivation fractionnaire tout d'abord selon Riemann-Liouville, puis Caputo et on étudie les lois de composition.

- Enfin dans une dernière partie, on étudie deux équations différentielles fractionnaires simples.

Préliminaires

(1) Le problème commence par étudier les premières propriétés de la fonction Γ. Sa définition en a) puis son équation fonctionnelle en b). Malgré leur caractère élémentaire et classique, le jury a noté des imprécisions dans de trop nombreuses copies (l'intégrande n'est pas prolongeable en 0 par continuité et il converge certes vers 0 en l'infini mais cela ne suffit pas à conclure à la convergence).

(2) On propose de démontrer un cas simple du théorème de Fubini sur un triangle.

(a) Pour l'essentiel il s'agissait de bien justifier les arguments de convergence. Rares ont été les candidats qui ont vu l'intérêt de (ii), quand le paramètre était à la fois dans l'intégrande et dans les bornes de l'intégrale.

(b) La dérivation sous le signe intégrale a trop rarement été bien justifiée, en revanche la règle de la chaine a connu plus de succès et a permis aux candidats l'ayant bien appliqué de réussir (c).

(3) La justification de 3-a) était similaire à celle de 2-a) mais à nouveau peu de candidats se sont aperçus que le paramètre x apparaissait aux bornes de l'intégrale. Les questions b) et c) ont été plutôt bien réussies.

(4) Le sujet étudie à présent la transformation de Laplace pour les fonctions continues d'ordre exponentiel ce qui permet de justifier aisément l'existence en a) et de faire l'intégration par parties en b). La question c) a posé plus de problèmes comme souvent quand il s'agit de majorer efficacement : les candidats se sont alors souvent perdus dans des sous-cas multiples et complètement inutiles sans se rendre compte qu'il ne s'agissait pas d'optimiser une majoration mais seulement de montrer une convergence simple.

(5) On montre l'injectivité de la transformation de Laplace en utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass. La linéarité de $\mathcal{L}$ a été plutôt bien vue, ce qui n'a pas été souvent le cas des majorations en b) et encore moins c) sauf dans de rares copies qui se sont révélées excellentes au bout du compte.

A- Intégration fractionnaire

(6) On commence par introduire un opérateur à noyau, par récurrence par exemple.

(7) La formule $D(\Phi_\alpha) = \Phi_{\alpha-1}$, avec les conventions sur Γ, a rarement été donnée en a). Le calcul à mener dans b) a été bien réussi, mais la question c), ouverte, a conduit à de très nombreuses erreurs.

(8) On utilise l'écriture de l'opérateur à noyau de 6) en remplaçant le paramètre entier n par $\alpha > 0$ réel quelconque et on vérifie qu'il vérifie des propriétés raisonnables. Il interpole I^n, il se compose convenablement en a), son comportement relativement à la transformée de Laplace en b), son effet sur Φ_α en c) et qu'une primitive fractionnaire d'une fonction non nulle n'est pas la fonction nulle en e). Ces questions relativement faciles ont été plutôt bien réussies.

B- Dérivées fractionnaires

(9) La première formule était celle de Taylor reste intégrale qui a été souvent reconnue et sinon redémontrée par récurrence.

(10) On définit la dérivation fractionnaire au sens de Rieman-Liouville. On commence par montrer que c'est un inverse à gauche de l'intégration en a). On demande ensuite en b) de constater que D^α appliqué à une fonction constante n'est pas nulle sauf dans le cas classique où $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Cette question, ouverte, a été très mal traitée. On étudie en c) son effet sur les Φ_α, question facile et bien faite, contrairement à d) qui n'a presque jamais été abordée.

(11) Il s'agissait ensuite de constater que l'opérateur de dérivation fractionnaire se composait mal : les calculs étaient simples puisque les effets de D^α et J^α étaient déjà bien identifiés sur les Φ_γ. Pour autant les bonnes réponses ont été très rares.

(12) On introduit la dérivation selon Caputo dont on étudie les liens avec celle de Riemann-Liouville. La question a été très peu abordée : les candidats sont plutôt partis vers les questions plus faciles de la partie C.

C- Deux équations différentielles fractionnaires

Une proportion relativement important des candidats ont su repérer des points à gagner dans les questions 13) et 14). Les dernières questions n'ont pas été abordées ce qui était relativement prévisible vue la longueur du sujet.

(13) On part de l'équation d'Abel écrite sous forme intégrale qu'on demande en a) d'exprimer sous forme différentielle en utilisant que D^α est un

inverse à gauche de J^α, où sous forme d'une égalité des transformées de Laplace en b). Ceux qui se sont penchés sur cette question, l'ont bien réussie.

(14) Des questions élémentaires sur des séries entières classiques en a) qui ont souvent été repérées. La règle de d'Alembert en b) a été bien vue mais rarement bien appliquée. En c) il s'agissait pour l'essentiel d'intervertir somme et intégrale dans le disque de convergence. En d) il suffisait d'appliquer l'opérateur $\mathcal{L}$ à l'égalité $J^\alpha e_\alpha = \Phi_\alpha * e_\alpha$.

(15) On étudie l'équation différentielle fractionnaire linéaire d'ordre 1 la plus simple $D^\alpha u = -u$. Pour répondre à cette question il suffisait de rappeler l'égalité $J^\alpha \circ D_*^\alpha = J^m D^m$ et utiliser 9).

(16) Le calcul de $\mathcal{L}(\Phi_k)$, avec la linéarité de $\mathcal{L}$ et 7-c) permettait de conclure.

Plus généralement le jury note des difficultés dans les majorations et notamment lors des manipulations des inégalités qu'on multiplie sans s'inquiéter des signes. Pour l'essentiel le cours est connu par souvent appliqué de manière trop approximative, notamment lors de l'utilisation du théorème de convergence dominée.