SuP Galilée
L'école d'ingénieurs de
l'Institut Galilée

Spécialité MACS 1ère année

Equations différentielles
Etude mathématique et numérique

L. Halpern

INSTITUT GALILEE, 99 avenue Jean-Baptiste-Clément 93430 VILLETANEUSE . Janvier 2016

Table des matières

Chapitre 1

Exemples, histoire, zoologie

1.1 zoologie

Le terme *æquatio differentialis* ou équation différentielle est apparu pour la première fois sous la plume de Leibniz [1] en 1676 pour définir la relation entre les différentielles dx et dy des deux variables x et y. Dans la littérature anglo-saxonne, on appelle *équation différentielle ordinaire* une relation entre une variable indépendante (qui sera notée ici t) et une variable dépendante (qui sera notée ici y) ainsi que ses dérivées dans la variable indépendante. Ceci par opposition avec la notion d'*équation aux dérivées partielles* qui est une relation entre plusieurs variables indépendantes (par exemple la variable de temps t et une ou plusieurs variables d'espace) et une variable dépendante.

Une équation différentielle est une équation de la forme

$$F(t, y, y', .., y^{\{n\}}) = 0, \tag{1.1}$$

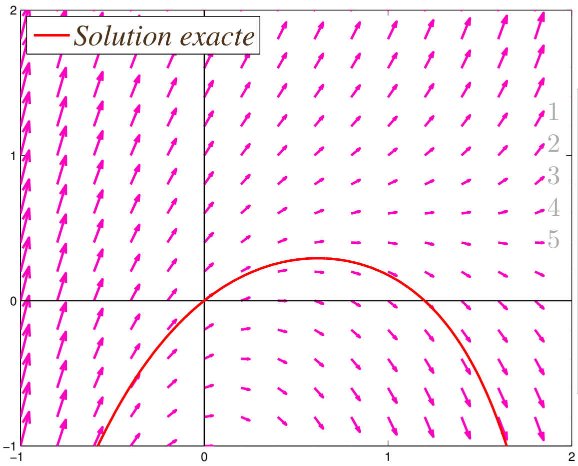
où $y', .., y^{\{n\}}$ sont des abréviations pour les dérivées de la fonction $t \mapsto y(t)$, et F une fonction définie sur $\mathbb{R}^{n+2}$. C'est la notation de Newton. L'ordre de l'équation différentielle est l'ordre de plus haute dérivation intervenant dans l'équation (ici n).

1.2 problème de Newton

Problème de Newton en 1671,

$$y' = 1 - 3t + y + t^2 + ty.$$

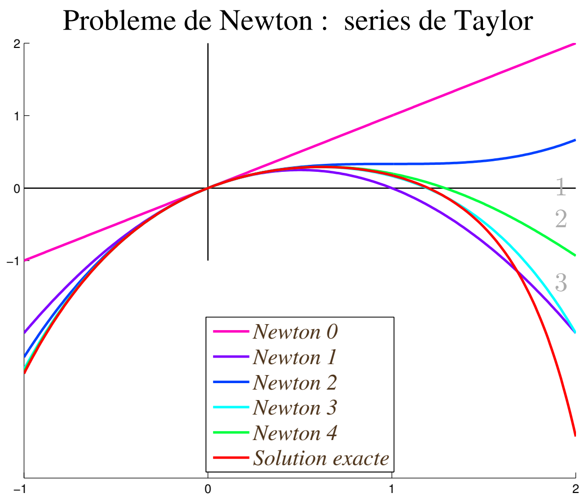
1. Philosophe et scientifique allemand, 1646-1716




```
> ode := diff(x(t), t) = 1-3*t+x(t)+t^2+t*x(t);
> dsolve(ode)
> ics := x(0) = 0;
> sol := dsolve({ics, ode});
sol := x(t) = (3*sqrt(Pi)*exp(1/2)*sqrt(2)*erf
    ((1/2)*sqrt(2)*t+(1/2)*sqrt(2))+4*exp(-t
    -(1/2)*t^2)-exp(-t-(1/2)*t^2)*t-4-3*sqrt(Pi)*
    exp(1/2)*sqrt(2)*erf((1/2)*sqrt(2))*exp
    ((1/2)*t*(2+t))
```

Solution `maple`

Newton calculait une solution par séries de Taylor. `Maple` fait ça ainsi




```
> Order=7;
> series_sol := dsolve({ics, ode}, x(t),
    series);
series_sol := x(t) = t-t^2+(1/3)*t^3-(1/6)
    *t^4+(1/30)*t^5-(1/45)*t^6+O(t^7)
```

FIGURE 1.1 – Séries de Taylor

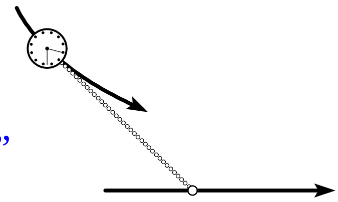
1.3 Tractrice

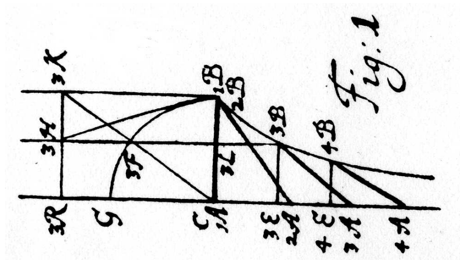
Problème proposé par Claude Perrault en 1670, puis étudié par Newton en 1676, Huygens en 1692 et Leibniz en 1693.

Leibniz 1674, 1693: the Tractrix.

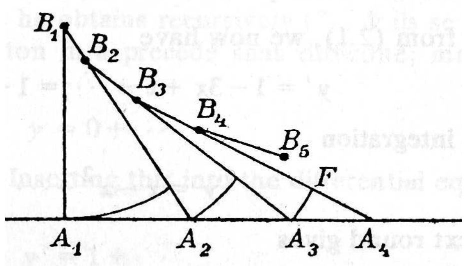
Claude Perrault : (le frère de celui du petit chaperon rouge)

"horologio portabili suae thecae argentae"





Drawing Leibniz 1693

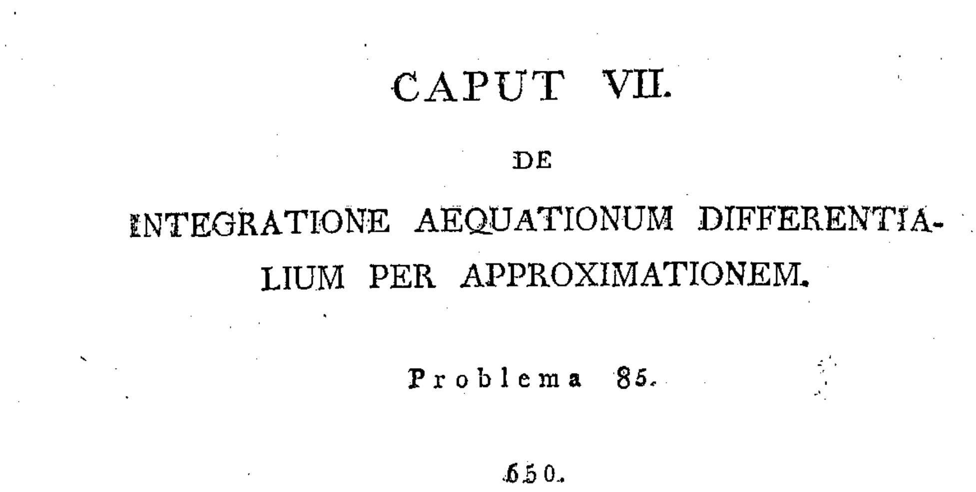


Drawing Kowalewskaia 1908

FIGURE 1.2 – Wanner. 2010

1.4 la méthode d'Euler

E342, Inst. Calc. Integralis 1768, ğ650.


CAPUT VII.

DE

INTEGRATIONE AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM PER APPROXIMATIONEM.

Problema 85.

650.

FIGURE 1.3 – Titre du chapiter, Euler 1768

Ipsius	valores successivi
x	$a,\ a',\ a'',\ a''',\ a^{\mathrm{IV}},\ \ldots\ldots\ {}'x,\ x$
y	$b,\ b',\ b'',\ b''',\ b^{\mathrm{IV}},\ \ldots\ldots\ {}'y,\ y$
V	$\mathrm{A},\ \mathrm{A}',\ \mathrm{A}'',\ \mathrm{A}''',\ \mathrm{A}^{\mathrm{IV}},\ \ldots\ldots\ {}'\mathrm{V},\ \mathrm{V}.$

Scilicet ex primis $x = a$ et $y = b$ datis, habetur $\mathrm{V} = \mathrm{A}$; tum vero pro secundis erit $b' = b + \mathrm{A}(a' - a)$, differentia $a' - a$ minima pro lubitu assumta. Hinc ponendo $x = a'$ et $y = b'$ colligitur $\mathrm{V} = \mathrm{A}'$, indeque pro tertiis obtinebitur $b'' = b' + \mathrm{A}'(a'' - a')$, ubi posito $x = a''$ et $y = b''$ invenitur $\mathrm{V} = \mathrm{A}''$. Jam pro quartis habebimus $b''' = b'' + \mathrm{A}''(a''' - a'')$, hincque ponendo $x = a'''$ et $y = b'''$, colligemus $\mathrm{V} = \mathrm{A}'''$, sicque ad valores a primitivis quantumvis remotos progredi licebit. Series autem prima valores ipsius x successivos exhibens pro lubitu accipi potest, dummodo per intervalla minima ascendat vel etiam descendat.

FIGURE 1.4 – Exposé de la méthode, Euler 1768

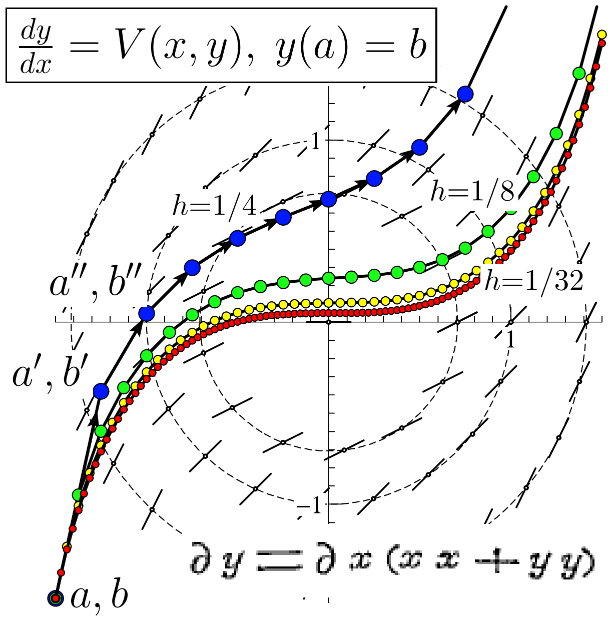
L.Euler (E342), Inst. Calc. Integralis 1768, §650:

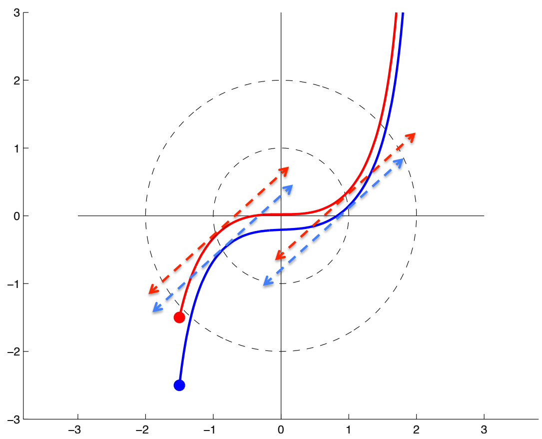
$$b' = b + \mathrm{A}(a' - a)$$

$$b'' = b' + \mathrm{A}'(a'' - a')$$

$$b''' = b'' + \mathrm{A}''(a''' - a'')$$

Ipſius	valores ſucceſſiui
x	$a;\ a';\ a'';\ a''';\ a^{\mathrm{IV}};\ \ldots\ {}'x;\ x$
y	$b;\ b';\ b'';\ b''';\ b^{\mathrm{IV}};\ \ldots\ {}'y;\ y$
V	$\mathrm{A};\ \mathrm{A}';\ \mathrm{A}'';\ \mathrm{A}''';\ \mathrm{A}^{\mathrm{IV}};\ \ldots\ {}'\mathrm{V};\ \mathrm{V}.$





$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

Propriétés
1) Parité.
2) Même $x^2 + y^2 \implies$ même tangente

FIGURE 1.5 – Isoclines

1.5 Systèmes

1.5.1 Modèle de Lorentz

Caractère chaotique de la météo. Modèle simplifié. 1963

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & -\sigma y_1 + \sigma y_2 \\ y_2' & = & -y_1 y_3 + \rho y_1 - y_2 \\ y_3' & = & y_1 y_2 - \beta y_3 \end{array}\right. \tag{1.2}$$

σ, ρ respectivement le nombre de Prandtl et le rapport du nombre de Rayleigh sur un Rayleigh critique, et β sont trois paramètres réels. y_1 est proportionnel à l'intensité du mouvement de convection, y_2 est proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et descendants, et y_3 est proportionnel à l'écart du profil de température vertical par rapport à un profil linéaire https://fr.wikipedia.org/wiki/Système_dynamique_de_Lorenz
Exemple : $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$. il décrit un exemple de transition vers le chaos : pour $R \geq 28$ le système possède un "attracteur étrange"

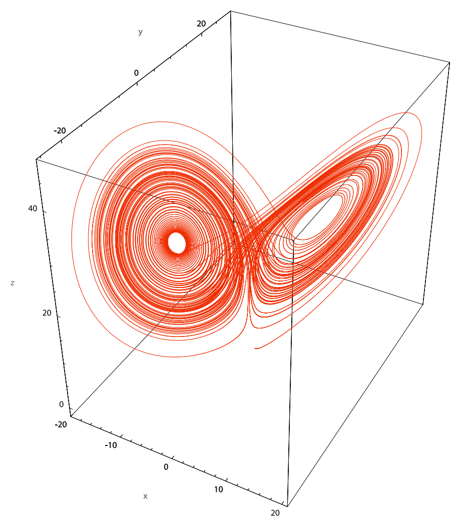


FIGURE 1.6 – Attracteurs de Lorentz

1.5.2 Lotka-Volterra, dynamique des populations

Hirsch et Smale : "Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos" (Academic Press, 2004).

Une paire d'espèces, les prédateurs dont la population est y et les proies dont la population est x. On suppose que les prédateurs ne se nourrissent que de proies. On suppose aussi qu'en l'absence de prédateurs la population de proies croit proportionnellement à la population courante. On suppose aussi que le déclin de la population de proies est proportionnel au nombre de rencontres proie/prédateur. Ce qui donne $x' = ax - bxy$.

Pour les prédateurs, on fait l'hypothèse inverse. Quand il n'y a pas de proie, la population s'éteint donc $y' = -ay$. L'augmentation de la population de prédateurs est proportionnelle au nombre de rencontres proie/prédateur. Donc finalement on a, avec

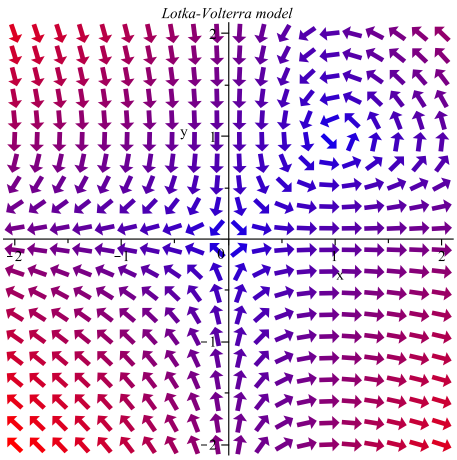
$$\begin{cases} x' = ax - bxy = x(a - by), \\ y' = -cy + dxy = y(-c + dx) \end{cases} \tag{1.3}$$

Ici si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$X' = F(X).$$

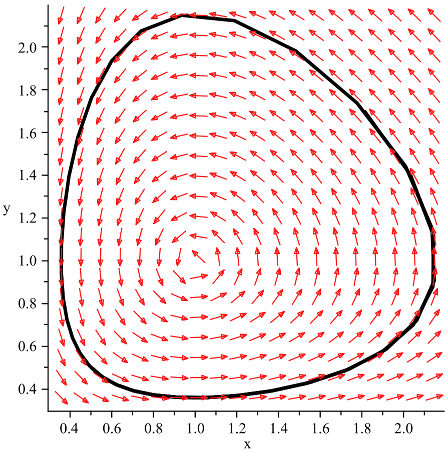
La fonction F ne dépend pas de t, c'est un système autonome. L'étude de ce système sera faite en cours. Nous en ferons le portrait de phase.

Théorème 1. *Toute solution de ce système est une orbite fermée.*




```
> with(DEtools)
> # Lotka Volterra
> LVS := diff(x(t), t) = x(t)*(1−
   y(t)), diff(y(t), t) = y(t)*(x
   (t)−1) :
> DEplot([LVS], [x(t),y(t)], t =
   0 .. 10, x = −5 .. 5, y = −5
   .. 5, arrows = large, color =
   magnitude)
```

Figure 1.7 – Lotka Volterra phase sketch




```
> DEplot([LVS], [x(t),y(t)], t = 0 ..
   10, [[x(0) = .5, y(0) = .5]], color
   = red, linecolor = blue)
# animation, ajouter
 > DEplot([LVS], [x(t),y(t)], t = 0 ..
   10, [[x(0) = .5, y(0) = .5]], color
   = red, linecolor = blue,animate=
   true,numpoints=201,numframes=20)
```

FIGURE 1.8 – Lotka Volterra solution

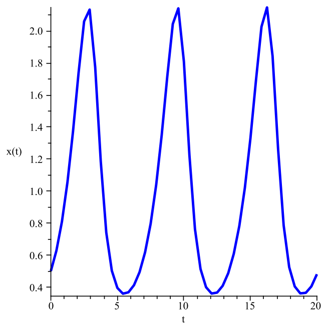


FIGURE 1.9 – Lotka Volterra $x(t)$

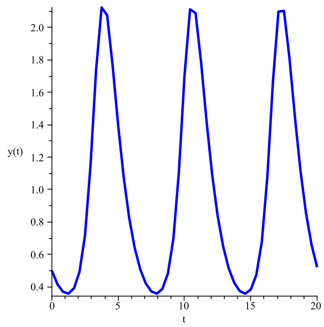


FIGURE 1.10 – Lotka Volterra $y(t)$

```
> DEplot([LVS], [x(t),y(t)
  ], t = 0 .. 20, [[x(0) =
   .5, y(0) = .5]], scene
  = [t,x(t)], linecolor =
  blue)
>DEplot([LVS], [x(t),y(t)],
  t = 0 .. 20, [[x(0) =
  .5, y(0) = .5]], scene =
   [t,y(t)], linecolor =
  blue)
```

Citons Hairer, Lubitsch, Wanner, : A.J. Lotka (1925, Chap. VIII) used this model to study parasitic invasion of insect species, and, with its help, V. Volterra (1927) explained curious fishing data from the upper Adriatic Sea following World War I.

Pour ce qui concerne l'approximation, prenons un schéma d'Euler

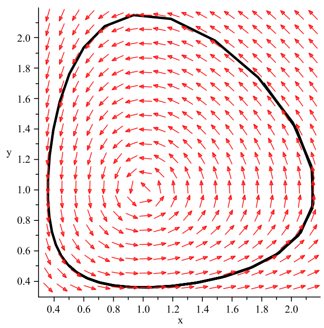


FIGURE 1.11 – Solution exacte

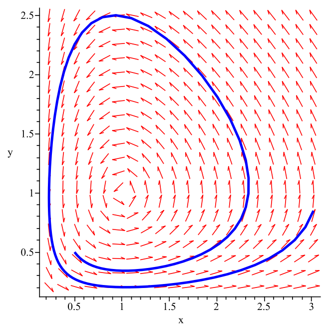


FIGURE 1.12 – Euler scheme, $h = 0.1$

```
> DEplot([LVS], [x(t),y(t)], t
   = 0 .. 10, [[x(0) = .5, y
  (0) = .5]], color = red,
  linecolor = blue, method =
  classical[foreuler],
  stepsize = .1)
 > DEplot([LVS], [x(t),y(t)],
   t = 0 .. 10, [[x(0) = .5,
   y(0) = .5]],color = red,
   linecolor = blue, method =
    classical[foreuler],
   stepsize = .01)
```

En raffinant ça ne s'améliore pas :

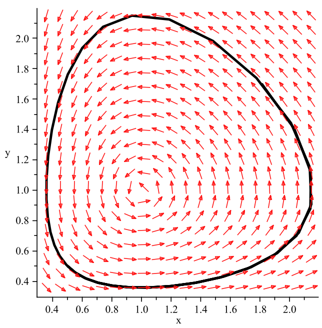


FIGURE 1.13 – Solution exacte

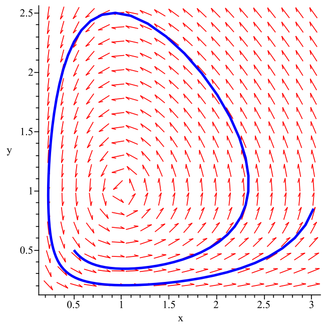


FIGURE 1.14 – Euler scheme, $h = 0.1$

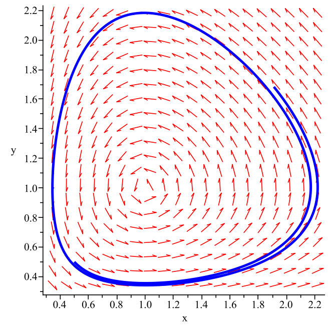


FIGURE 1.15 – Euler scheme, $h = 0.01$

Par contre en changeant de schéma :

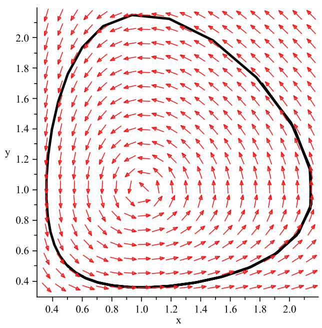


FIGURE 1.16 – Solution exacte

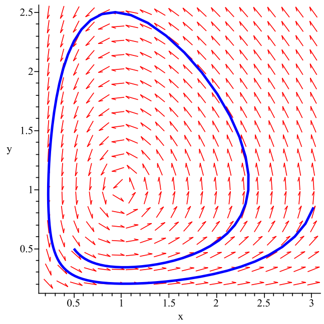


FIGURE 1.17 – Euler scheme, $h = 0.1$

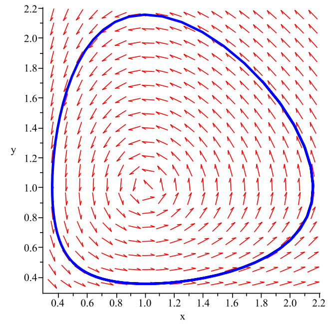


FIGURE 1.18 – Point milieu, $h = 0.1$

1.6 Modèles en économie

Chiang, "Fondamental Methods of Mathematical Economics" (McGraw-Hill, 1967) a) Le modèle de croissance de Domar (1946) : soit $I(t)$ le flux moyen des investissements annuels sur le marché, soit $\kappa(t)$ la capacité de production annuelle, supposée proportionnelle au capital K, i.e. $\kappa = \rho K$; la dérivée de K par rapport à t est égale à I. L'hypothèse de Domar est que l'équilibre des flux est atteint lorsque la capacité de production est pleinement utilisée, c'est à dire, compte tenu d'une propension constante s à faire des économies, lorsque $\kappa = s^{-1}I$. D'où l'équation différentielle du premier ordre la plus simple :

$$\frac{dI}{dt} = \rho s I(t). \tag{1.4}$$

Le coefficient ρs s'appelle "taux de croissance idéal".
b) "Pour illustrer l'équation non-homogène, présentons un modèle (micro) dynamique du marché." (Chiang, 14.2, p.473.)
Cela concerne la vente d'un seul produit. Soit P son prix ; la demande D et l'offre S (comme supply) satisfont à : $D = a - bP, S = -c + dP$. Il est facile de calculer le prix à l'équilibre :

$$P_e = \frac{a + c}{b + d}. \tag{1.5}$$

En règle générale, le prix actuel est différent de cette valeur. L'hypothèse la plus simple est que le prix évolue proportionnellement à l'excès de demande : $P' = \alpha(D - S)$, où le "coefficient d'ajustement" α est supposé constant. On en déduit facilement l'équation différentielle satisfaite par le prix :

$$\frac{dP}{dt} + \alpha(b+d)P = \alpha(a+c). \tag{1.6}$$

Exercice : dans ce modèle le prix converge exponentiellement vite vers sa valeur d'équilibre P_e.
c) Partant de là il n'est pas difficile de faire apparaître des équations à coefficients variables, par exemple, on peut modifier le modèle de Domar en introduisant une propension à l'économie $s(t)$ qui dépend du temps. De même, en considérant les prix de plusieurs produits interdépendants, il arrive des systèmes d'équations différentielles linéaires aussi compliqués qu'on veut.
d) Enfin, le modèle de croissance de Solow (1956) (cf.Chiang, 14.7, p.497) considère la capacité de production κ comme une fonction non-linéaire connue $\kappa = Q(L, K)$ de la force de travail disponible L et du capital K. En supposant que la force de travail est connue en fonction du temps, l'équation de Domar $K' = s\kappa$ donne une équation différentielle non-linéaire pour K.

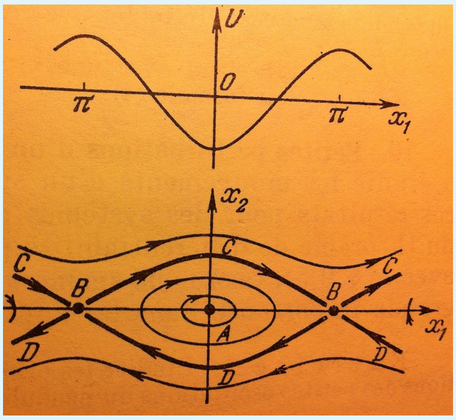
1.7 Ordre 2

1.7.1 Pendule, Newton.

Pour une simulation, voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_simple. Une masse m est suspendue à une corde de longueur l. On mesure les variations $\theta(t)$ de l'angle avec la verticale au temps t. Suivant la deuxième loi de Newton, la force due à l'accélération tangentielle $m\ell\ddot{\theta}$ est équilibrée par la composante tangentielle de l'accélération gravitationnelle $mg\sin(\theta)$ et par la force de friction F_f qui s'oppose au mouvement. Cette dernière est donnée par des expériences, qui montrent qu'elle est proportionnelle à la vitesse $\ell\dot{\theta}$ avec un coefficient de proportionnalité c_f. voir http://phymain.unisciel.fr/le-pendule-de-galilee/, https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_simple. On obtient alors pour θ une équation différentielle du second ordre

$$\ddot{\theta} + \frac{c_f}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \tag{1.7}$$

Au temps $t = 0$ on se donne l'angle θ_0 et la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$. En l'absence de friction



Potentiel $V(x)$ et Portrait de phase dans le plan $(\theta, \dot{\theta})$. Arnold,équations différentielles ordinaires, 1974

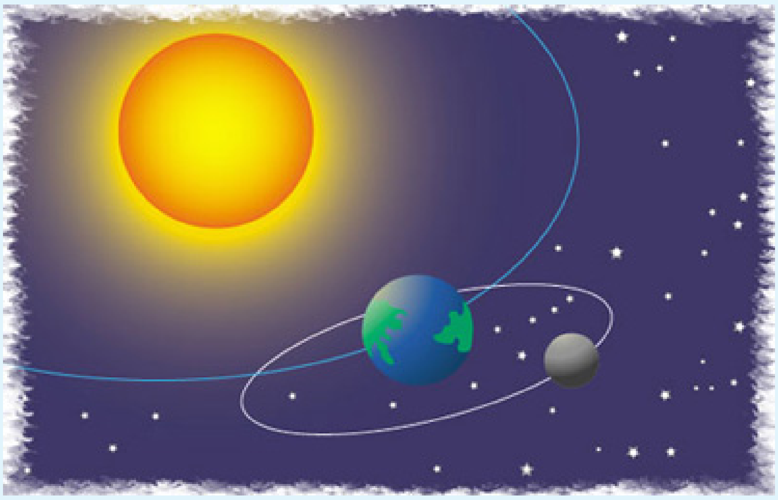
$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d\theta_1}{dt} & = & \theta_2 \\ \dfrac{d\theta_2}{dt} & = & -\dfrac{g}{\ell}\sin\theta_1 \end{array}\right.$$

1.7.2 Système d'ordre supérieur : le problème à N corps

Newton fut le premier à écrire l' équation différentielle du mouvement de la planète Mars pour laquelle Kepler avait prévu une trajectoire elliptique dont le soleil est l'un des foyers (première loi de Kepler). Plus généralement le problème à N corps (Lagrange, Poincaré) :

$$m_k \frac{d^2\boldsymbol{OP}_k}{dt^2} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{K m_i m_k}{|\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{P}_i|^3}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{P}_i + \sum_{i=k+1}^{N} \frac{K m_i m_k}{|\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{P}_i|^3}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{P}_i$$

Exemple : 3 corps, Soleil, Terre et son satellite la Lune. C'est un problème très difficile.



Poincaré, 1912

Chapitre 2

Equations du premier ordre réelles scalaires

Nous considérons ici uniquement des équations sous forme normale, c'est-à-dire définies comme suit. Soit

$$(t,y) \to f(t,y) \tag{2.1}$$

une fonction définie et continue dans une partie D de $\mathbb{R}^2$. Une **solution** de l'équation différentielle (ordinaire) du premier ordre

$$y' = f(t,y) \tag{2.2}$$

sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction réelle

$$t \to y(t) \tag{2.3}$$

définie, continue et dérivable dans I telle que

$$\begin{cases} \forall t \in I, & (t, y(t)) \in D \\ \forall t \in I, & y'(t) = f(t, y(t)) \end{cases} \tag{2.4}$$

Les **courbes intégrales** sont l'ensemble des points $(t, y(t))$ satisfaisant (2.4), *i.e.* telles que **la pente de la tangente** au point $(t, y(t))$ est égale à $f(t, y(t))$. Il y a en général une infinité de solutions au problème. Pour sélectionner <u>une</u> solution, il faut se donner plus d'informations : la **condition initiale** y_0, c'est-à-dire qu'on cherche la solution de (2.4) qui vérifie de plus

$$y(0) = y_0 \tag{2.5}$$

Les équations (2.4) et (2.5) constituent le **problème de Cauchy** [1] . A chaque donnée de Cauchy y_0 correspond une et une seule solution. La figure suivante

1. Louis-Augustin Cauchy (1789-1857), professeur à l'Ecole Polytechnique, a établi les fondations de l'analyse rigoureuse telle que nous la connaissons aujourd'hui. Il a donné le premier théorème d'existence de solutions d'équations différentielles (parmi bien d'autres choses, comme par exemple les calculs de la variable complexe)

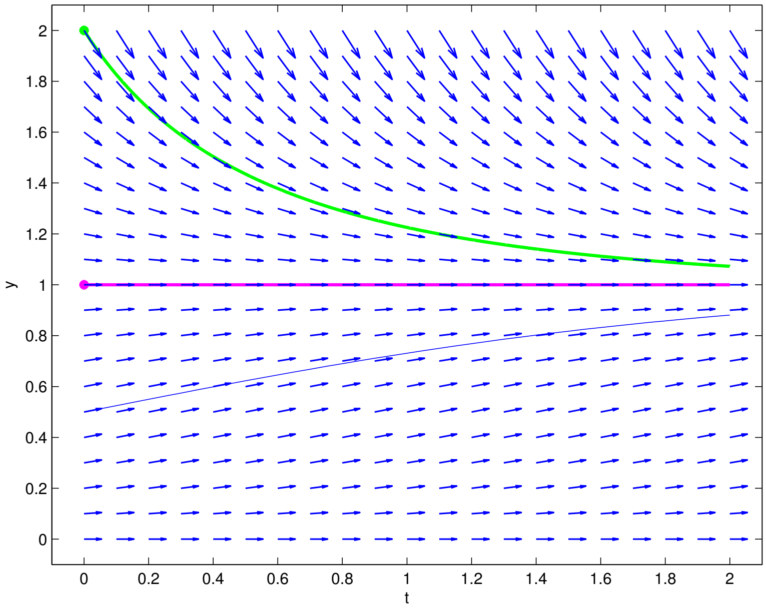


FIGURE 2.1 – Deux courbes intégrales de $y' = y(1-y)$ ($y_0 = 1$ et $y_0 = 2$) et champ de vecteur tangent

est obtenue avec le script matlab

```
t=(0:.2:2);
y0=1;
yy1=y0*exp(t)./(1-y0+y0*exp(t));
plot(t,yy1,'m',0,y0,'*m','Linewidth',2);
y0=2;
yy2=y0*exp(t)./(1-y0+y0*exp(t));
hold on
plot(t,yy2,'g',0,y0,'*g','Linewidth',2);
f=@(t,y) y.*(1-y);
[T,Y] = meshgrid(0:.1:2,0:.1:2);
Vy=f(T,Y)
Vt=ones(size(T));
quiver(T,Y,Vt,Vy,'Linewidth',1)

[tt,yy]=ode45(f,[0 2],2);
hold on
plot(tt,yy,'b');
hold off
xlabel('t')
ylabel('y')
axis([-0.1 2.1 -0.1 2.1])
```

On dit que le problème de Cauchy est **bien posé** sur l'intervalle I s'il existe une et une seule fonction $t \mapsto y(t)$ satisfaisant aux équations (2.4),(2.5), et dépendant des données (f, y_0)

de façon continue.

Si on intègre l'équation différentielle on obtient

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds \tag{2.6}$$

forme équivalente en général et qui peut être utile.

Il peut arriver que la solution puisse être calculée explicitement. Par exemple une équation linéaire, ou encore une équation de Bernoulli, comme

$$xy' + y = y^2 \ln x$$

On peut réécrire l'équation comme

$$x\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \ln x$$

Déjà on voit que l'on ne peut définir éventuellement une solution que sur $\mathbb{R}_+$. La bonne idée est de poser $u = 1/y$

$$-xu' + u = \ln x$$

qui est une équation linéaire qu'on peut résoudre explicitement par variation de la constante. La solution générale en est

$$y = \frac{1}{ax + \ln x + 1}.$$

Traçons par exemple sans précaution en matlab la courbe intégrale pour $a = 1$.

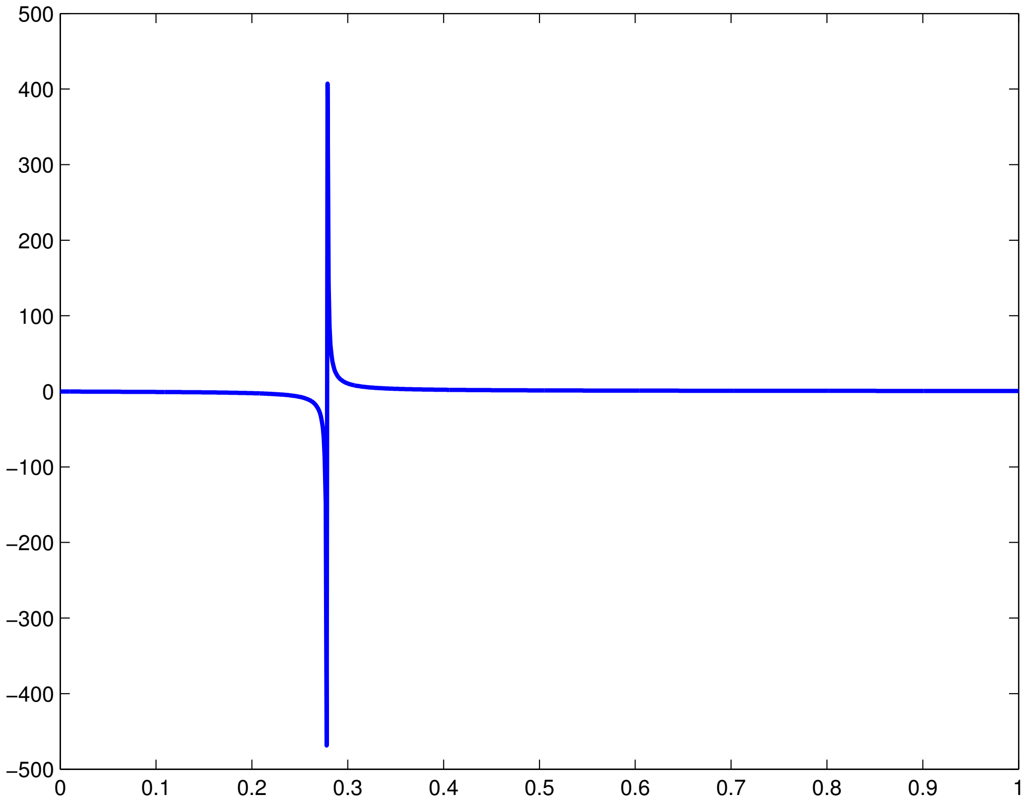


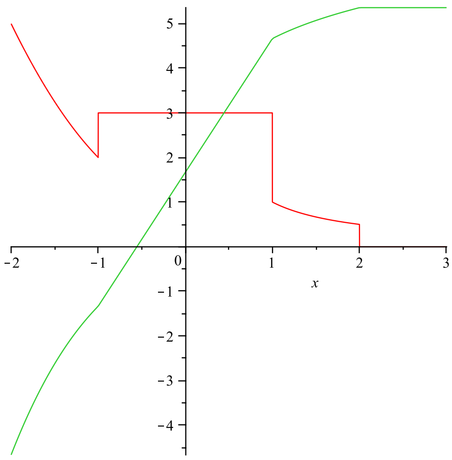
FIGURE 2.2 – Equation de Bernoulli

Attention !

2.1 Notion d'existence, unicité, stabilité

2.1.1 Unicité locale : solutions ϵ- *approchées*

Nous allons utiliser une méthode constructive qui fait appel au plus ancien schéma d'approximation : le schéma d'Euler. Nous définissons d'abord la notion de solution ϵ- *approchée* :




```
> eq1 := piecewise(−1 > x, x^2+1, `
   and`(x > −1, x < 1), 3, `and`(x
   > 1, x < 2), 1/x)
> eq2 := int(eq1, x)
> plot([eq1, eq2], x = −2 .. 3)
```

FIGURE 2.3 – Illustration de la régularité dans le théorème avec `maple`. En rouge u', en vert u

Définition 1 (solutions ϵ- *approchées*). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, ε un nombre réel strictement positif. Une fonction u, définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que u' soit continue par morceaux, est une solution ϵ- *approchée* si

$$\left\{\begin{array}{l} \forall t \in I, \quad (t, u(t)) \in D \\ \forall t \in I, t \text{ non point de discontinuité de } u', |u'(t) - f(t, u(t))| \leqslant \varepsilon \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Nous nous placerons ici dans le cas simplifié ou f est lipschitzienne par rapport à y.

Définition 2 (Fonctions lipschitziennes). La fonction f, définie dans D et continue, est dite lipschitzienne par rapport à y de constante de Lipschitz L si

$$\forall (t, y_1) \in D, \forall (t, y_2) \in D, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2| \tag{2.8}$$

Exercice 1. Si f a une dérivée partielle par rapport à y continue par morceaux et bornée indépendamment de t, alors f est lipschitzienne.

Nous allons établir maintenant l'inégalité fondamentale de comparaison entre 2 solutions ϵ- *approchées* :

Proposition 1 (Comparaison des solutions ϵ- approchées)**.** *Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue et lipschitzienne par rapport à y. Soit u_1 une solution ϵ_1- approchée et u_2 une solution ϵ_2- approchée, définies sur le même intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que*

$$\exists t_0 \in I, |u_1(t_0) - u_2(t_0)| \leqslant \delta \tag{2.9}$$

Alors

$$\forall t \in I, |u_1(t) - u_2(t)| \leqslant \delta e^{L(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1) \tag{2.10}$$

avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, et où L est la constante de Lipschitz associée à f.

La démonstration s'appuie sur les deux résultats suivants

Théorème 2 (Théorème de la moyenne)**.** *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, g positive ou nulle. Si*

$$\forall x \in [a, b], m \leqslant f(x) \leqslant M, \tag{2.11}$$

alors

$$\forall x \in [a, b], m \int_a^b g(x)\, dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\, dx \leqslant M \int_a^b g(x)\, dx \tag{2.12}$$

Théorème 3 (Lemme de Gronwall)**.** *Soient φ, ψ et W trois fonctions continues par morceaux sur l' intervalle $[0, a]$,positives ou nulles sur $[0, a]$, telles que*

$$W(x) \leqslant \varphi(x) + \int_0^x W(s)\psi(s)\, ds, \tag{2.13}$$

sauf aux points de discontinuité. Alors, sauf aux points de discontinuité, on a

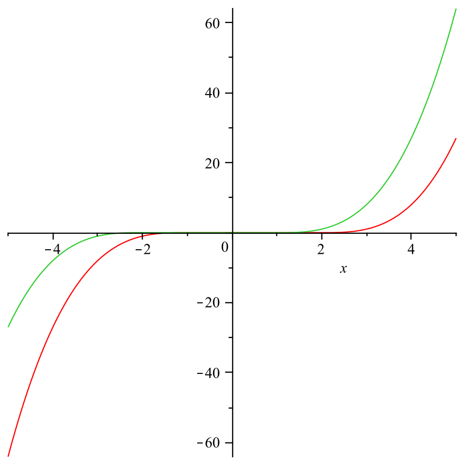
$$W(x) \leqslant \varphi(x) + \int_0^x \varphi(s)\psi(s) \left[\exp\left(\int_s^x \psi(\sigma)d\sigma\right)\right]\, ds, \tag{2.14}$$

De cette estimation de base on peut déduire un résultat d'**unicité locale** :

Théorème 4 (Unicité locale)**.** *Supposons f continue, lipschitzienne par rapport à y dans le domaine D. Soit (t_0, y_0) un point de D. Si $y(t)$ (définie sur un intervalle I contenant t_0),et $\tilde{y}(t)$ (définie sur un intervalle $\tilde{I}$ contenant t_0) sont deux solutions de (2.4) avec la même condition initiale $y(t_0) = \tilde{y}(t_0) = y_0$, alors y et $\tilde{y}$ coincident sur $I \cap \tilde{I}$.*

Remarque 1. Si f n'est pas lipschitzienne par rapport à y, on n'a pas forcément unicité, comme le montre l'exemple de l'équation

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}} \tag{2.15}$$




```
> eq := piecewise(a > x, (x-a)^3, `
   and`(x > a, x < b), 0, x > b, (x
   -b)^3)
```

FIGURE 2.4 – Nonunicité dans le théorème avec `maple`.

2.1.2 Existence locale : méthode de Cauchy-Lipschitz

On considère toujours un domaine D du plan, où on suppose que f est continue et même bornée, on note M sa borne supérieure. Alors on sait que f est uniformément continue et donc

$$\forall \epsilon, \exists \eta, \forall (t_1, y_1) \in D, \forall (t_2, y_2) \in D, |t_1 - t_2| < \eta, |y_1 - y_2| < \eta \implies |f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)| < \epsilon$$

Donnons nous un $\epsilon > 0$. On peut alors introduire une classe particulière de solutions ϵ- *approchées* : les fonctions affines par morceaux. Soient un point de D, (t_1, y_1), et la fonction affine sur $I = [t_1, t_1 + h]$ passant par y_1 en t_1, $u(t) = y_1 + (t - t_1)f(t_1, y_1)$. A quelle condition sur h u est-elle une solution ϵ- *approchée*? Il faut bien sûr d'abord que le segment soit dans D. Ensuite que $|u'(t) - f(t, u(t)| < \epsilon$ sur I. Pour cela il suffit que

$$h \leqslant \delta, \quad Mh \leqslant \delta.$$

Soit (t_0, y_0) un point de D. On se donne un **pas de discrétisation** h suffisamment petit, c'est-à-dire que $h \leqslant min(\delta, \delta/M)$. et une suite d'instants $t_j = t_0 + jh$, où j décrit $\mathbb{Z}$. On définit alors une suite de réels u_j par u_0 et la relation de récurrence

$$u_{j+1} = u_j + hf(t_j, u_j) \tag{2.16}$$

La fonction u affine par morceaux est maintenant définie par ses valeurs aux points t_j :

$$\begin{aligned} &u(t_j) = u_j \ i.e. \\ &u(t) = f(t_j, u_j)(t - t_j) + u_j \text{ sur } [t_j, t_{j+1}] \end{aligned} \tag{2.17}$$

On peut procéder ainsi tant que l'on reste dans D. En décomposant dans les sous-intervalles, on a

$$|u(t) - u(t_0)| \leqslant M(t - t_0)$$

Donc, si D contient un rectangle centré en (t_0, y_0), *i.e.*

$$\exists a > 0, b > 0, R = \{(t, y), |t - t_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}. \tag{2.18}$$

alors la solution ainsi construite est définie sur l'intervalle

$$I = [t_0, t_0 + c[, \quad c = min(a, b/M)$$

Ces solutions ϵ- *approchées* permettent de démontrer un résultat d'**existence locale** .

Théorème 5 (Existence locale)**.** *Supposons f continue, lipschitzienne par rapport à y dans le domaine D. Soit (t_0, y_0) un point de D, et R le triangle de sécurité défini en* (2.18)*. Alors il existe une solution de (2.4),(2.5) sur l' intervalle $|t - t_0| \leqslant c$, où $M = \sup_R |f(t, y)|$ et* $c = \min(a, \dfrac{b}{M})$.

Remarque 2. La démonstration utilise le fait que f est lipschitzienne par rapport à y . En fait le résultat est encore vrai sans cette hypothèse. C'est ce résultat que nous utiliserons par la suite.

Corollaire 1 (Estimation d'erreur)**.** *On fait les hypothèses du théorème 5. Soit y une solution du problème de Cauchy (2.4),(2.5) , et $\tilde{y}$ une solution ϵ- approchée sur $I = \{|t - t_0| \leqslant c\}$ telle que $y(t_0) = y_0$. Alors*

$$\forall t \in I, |y(t) - \tilde{y}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{L}(e^{Lc} - 1) \tag{2.19}$$

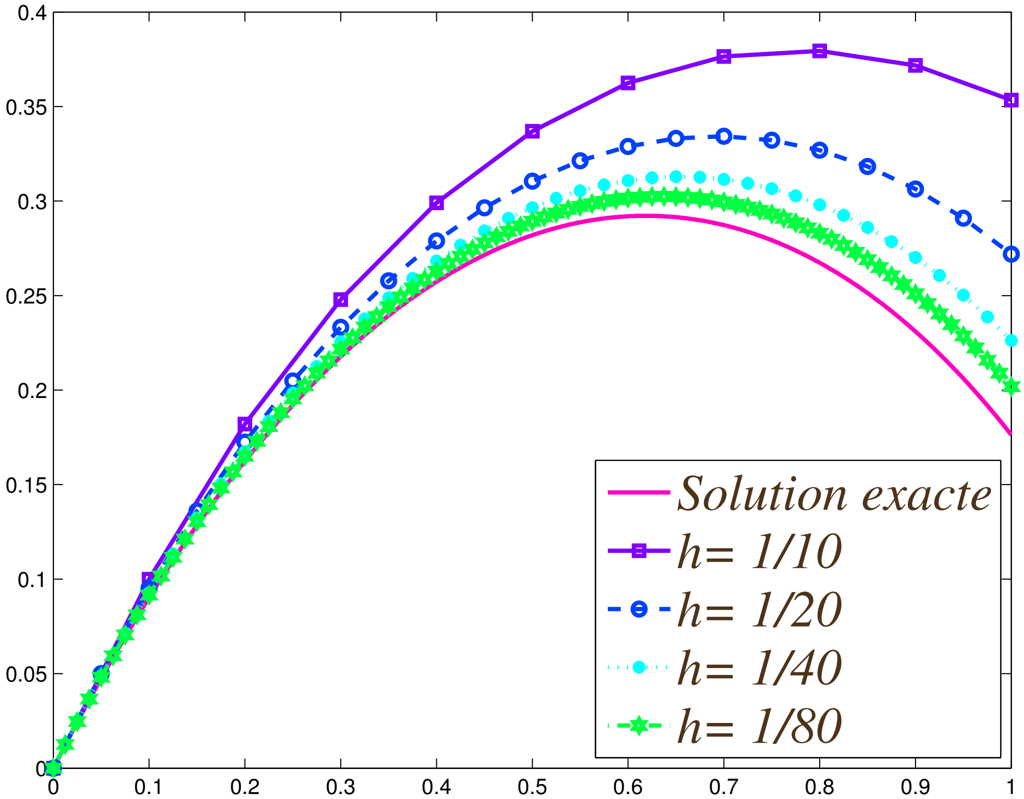


FIGURE 2.5 – Application de la méthode d'Euler pour le problème de Newton

2.1.3 Stabilité

C'est une notion fondamentale en calcul numérique : la sensibilité de la solution de l'équation à une erreur faite sur les données.

Commençons par démontrer que l'existence pour une donnée initiale entraîne l'existence dans le voisinage de cette donnée. Nous démontrerons ensuite la continuité de cette solution par rapport à t et à la condition initiale.

Théorème 6. *On suppose que f est continue, lipschitzienne par rapport à y dans D. Soit $(t_0, \tilde{y}_0)$ un point de D, tel que le rectangle $\tilde{R} = \{(t, y) \in D, |t - t_0| \leqslant a, |y - \tilde{y}_0| \leqslant b\}$ soit contenu dans D. Alors pour toute donnée initiale y_0 avec $|y_0 - \tilde{y}_0| \leqslant \frac{b}{2}$, le problème de Cauchy (2.4),(2.5) admet une solution unique $y(t; y_0)$ dans le rectangle $R = \{(t, y) \in D, |t - t_0| \leqslant d, |y - y_0| \leqslant Md\}$, avec $M = \sup_R |f(t, y)|$ et $d = \min(a, \dfrac{b}{2M})$.*

Théorème 7. *Si f est continue, lipschitzienne par rapport à y dans le domaine D, et si une solution $y(t; y_0)$ existe pour un rectangle $R = \{(t, y) \in D, |t - t_0| \leqslant a', |y - y_0| \leqslant b'\}$, alors $y(t; y_0)$ est continue par rapport à t et y_0.*

Regardons maintenant une perturbation sur la fonction f.

Théorème 8. *Si, dans un domaine D,*

1. *f et F sont continues,*

2. *f est lipschitzienne par rapport à y , de constante de Lipschitz L,*
3. *$\exists \varepsilon > 0, \forall (t, y) \in D, |f(t, y) - F(t, y)| \leqslant \varepsilon$,*
4. *il existe un point (t_0, y_0) tel que l'on puisse définir les fonctions $y(t)$ et $\tilde{y}(t)$ par :*
   (a) *$\forall t, |t - t_0| \leqslant c, (t, y(t)) \in D, (t, \tilde{y}(t)) \in D$*
   (b) *$\forall t, |t - t_0| \leqslant c, y'(t) = f(t, y(t)); \ \tilde{y}'(t) = f(t, \tilde{y}(t))$*
   (c) *$y(t_0) = \tilde{y}(t_0) = y_0$*

Alors

$$\forall t, |t - t_0| \leqslant c, |y(t) - \tilde{y}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{L}(e^{Lc} - 1) \tag{2.20}$$

Remarque 3. En pratique, la fonction f n'est continue et lipschitzienne par rapport à y que localement dans D : pour tout point (t_1, y_1) dans D, il existe un rectangle autour de ce point tel que f y soit continue et lipschitzienne par rapport à y . La constante de Lipschitz dépend alors de ce point.

Exemple 1.

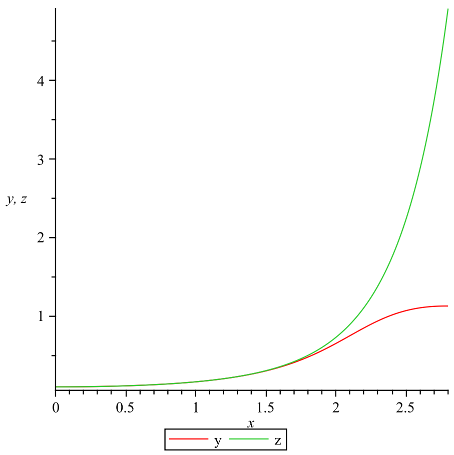
$$y'(t) = \sin(ty), \quad y(0) = 0.1$$

$$z'(t) = ty, \quad z(0) = 0.1$$

$$D = \{|t| \leqslant 1/2, \quad |y - 0.1| \leqslant 1/2\}$$

Alors

$$|f(t, y) - F(t, y)| = |\sin(ty) - ty| \cdots$$




```
> with(plots)
> sys := diff(y(x), x) = sin(x*y(x)
    ), diff(z(x), x) = x*z(x) :
> fcns := {y(x), z(x)}:
> p := dsolve({sys, y(0) = .1, z(0)
    = .1}, fcns, type = numeric,
   method = classical):
> odeplot(p, [[x, y(x)], [x, z(x)
    ]], 0 .. 2.8)
```

FIGURE 2.6 – Linéarisation grâce au théorème 8

De même on établit un théorème de dépendance continue par rapport à un paramètre. Nous le donnerons pour les systèmes.

2.1.4 Solutions maximales

Donnons d'abord quelques définitions

Définition 3. 1. On appelle solution locale du problème de Cauchy (2.4),(2.5) la donnée d'un couple (I, y) où I est un voisinage du point t_0 dans $\mathbb{R}$ et y une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans I vérifiant (2.4).

2. On dit que la solution (J, z) prolonge la solution (I, y) si

$$\left\{ \begin{array}{l} I \subset J \\ \forall t \in I, y(t) = z(t) \end{array} \right. \tag{2.21}$$

Si de plus I est inclus strictement dans J, on dit que (J, z) prolonge strictement (I, y) .

3. On dit que la solution locale (I, y) est une solution maximale du problème de Cauchy (2.4),(2.5) s'il n'existe pas de solution locale qui la prolonge strictement.
4. On dit que (I, y) est solution globale du problème de Cauchy (2.4),(2.5) dans l'intervalle I_0 si (I, y) est solution locale et si $I = I_0$.

Remarque 4. Si f est continue et lipschitzienne par rapport à y dans $I_0 \times \mathbb{R}$, alors il existe une solution globale unique dans $I_0 \times \mathbb{R}$.

Lemme 1. *Etant donnée une solution locale, il existe au moins une solution maximale qui la prolonge.*

Lemme 2. *On suppose que $D = I_0 \times \mathbb{R}$. Si (I, y) est une solution maximale non globale, alors $I =]t_0 - \alpha, t_0 + \beta[$ et y n'est pas bornée sur I.*

2.1.5 Etude des solutions globales

On a vu qu'une solution maximale est globale si elle est bornée. Nous obtiendrons une borne par des **estimations a priori**.

Théorème 9. *On suppose que $D = I_0 \times \mathbb{R}$, $I_0 = [t_0, t_1)$, et qu'il existe une fonction $l$dans $\mathcal{L}^1(I_0)$ telle que*

$$\forall (t, y) \in D, f(t, y)y \leqslant l(t)(1 + y^2). \tag{2.22}$$

Alors le problème (2.4),(2.5) admet au moins une solution globale dans I_0.

Rappelons que $\mathcal{L}^1(I_0)$ est l'espace des fonctions mesurables I_0 sur pour la mesure de Lebesgue, intégrables sur I_0.

Remarque 5. Si I_0 est $(t_0 - \alpha, t_0 - \beta)$, il faut remplacer (2.22) par

$$\forall (t, y) \in D, sgne(t - t_0)f(t, y)y \leqslant l(t)(1 + y^2). \tag{2.23}$$

Corollaire 2. *On suppose que $D = I_0 \times \mathbb{R}$, $I_0 = [t_0, t_1)$, et qu'il existe une fonction $l$dans $\mathcal{L}^1(I_0)$ telle que*

$$\forall (t,y) \in D, f(t,y)y \leqslant l(t)(1+|y|). \tag{2.24}$$

Alors le problème (2.4),(2.5) admet au moins une solution globale dans I_0.

Considérons maintenant les problèmes d'unicité globale. On pose encore $D = I_0 \times \mathbb{R}$.

Définition 4. On dit que le problème (2.4),(2.5) admet une solution et une seule s'il admet une solution globale et si toute solution locale est la restriction de cette solution globale.

Nous avons déjà vu que le cas où f est lipschitzienne est un cas favorable, mais trop contraignant dans la pratique. Nous allons remplacer cette condition par une condition plus faible, qui conviendra en particulier aux systèmes "raides".

Théorème 10. *On suppose que $D = I_0 \times \mathbb{R}$, $I_0 = [t_0, t_1)$, et qu'il existe une fonction l dans $\mathcal{L}^1(I_0)$ telle que*

$$\forall t \in I_0, \forall (y,z) \in \mathbb{R}, (f(t,y) - f(t,z))(y-z) \leqslant l(t)(y-z)^2. \tag{2.25}$$

Alors le problème (2.4),(2.5) admet une solution et une seule dans I_0.

Il peut arriver que les solutions $y(t)$ puissent être calculées explicitement : c'est le cas pour les équations linéaires, exactes, de Bernouilli, Ricatti,..

2.2 Des équations intégrable explicitement

2.2.1 Equations différentielles linéaires

$$y' = a(t)y + b(t) \tag{2.26}$$

Le problème de Cauchy est constitué de (2.26) et de la condition initiale (2.5) .

Théorème 11. *Si les applications $t \to a(t)$ et $t \to b(t)$ sont continues de $(0,T)$ dans $\mathbb{R}$, le problème de Cauchy (2.26) (2.5) admet une solution et une seule sur $(0,T)$.*

Comment calculer les solutions ? Si $t \to a(t)$ est une fonction constante, alors la solution générale de l'**équation homogène** est de la forme αe^{at}, où α est une constante réelle : l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 1 (une droite vectorielle) dont une base est constituée de la fonction $t \to e^{at}$. La solution générale de l' **équation avec second membre** est égale à la somme de l'équation générale de l'équation homogène et d'une solution particulière $\tilde{y}$. Comment obtenir cette solution particulière ?

- Soit il y a une solution évidente. Par exemple pour l'équation

$$y' + 3y = 1,$$

la solution évidente est $y = \frac{1}{3}$. Donc la solution général de l'équation précédente est $y = \alpha e^{3t} + \frac{1}{3}$.
- Sinon on fait appel à la **méthode de variation de la constante** inventée par Pierre-Simon de Laplace [2] : on cherche cette solution particulière sous la forme

$$\tilde{y}(t) = \alpha(t)e^{at}.$$

Si on dérive cette équation et qu'on la remplace dans (2.26), on obtient

$$\alpha'(t)e^{at} = b(t),$$

et l'on peut alors calculer α au moyen d'une quadrature

$$\alpha(t) = \int_0^t b(s)e^{-as}ds.$$

Notons que cette fonction choisie est celle qui vaut 0 en 0.

Maintenant si a n'est pas constante, il faut déjà une intégration pour calculer la solution général de l'équation homogène, qui s'écrit

$$\alpha e^{\int_0^t a(s)\, ds}.$$

La variation de la constante est un peu plus difficile. On cherche

$$\tilde{y}(t) = \alpha(t)e^{\int_0^t a(s)\, ds}.$$

Si on dérive cette équation et qu'on la remplace dans (2.26), on obtient

$$\alpha'(t)e^{\int_0^t a(s)\, ds} = b(t),$$

et l'on peut alors calculer α au moyen d'une quadrature

$$\alpha(t) = \int_0^t b(s)e^{-\int_0^s a(\tau)\, d\tau}ds.$$

Théorème 12. *Dans les conditions d'application du théorème 11, la solution générale de l'équation différentielle s'écrit sous la forme*

$$y(t) = \left(\alpha + \int_0^t b(s)e^{-\int_0^s a(\tau)\, d\tau}ds\right) e^{\int_0^t a(s)\, ds}.$$

La solution du problème de Cauchy est

$$y(t; y_0) = \left(y_0 + \int_0^t b(s)e^{-\int_0^s a(\tau)\, d\tau}ds\right) e^{\int_0^t a(s)\, ds}.$$

2. Pierre-Simon de Laplace , 1749-1827, un des principaux scientifiques de l'époque napoléonienne, ministre de l'intérieur sous le consulat

Exemples :

$$y' + 3y = 12.$$
$$y' + y = e^{-t}.$$
$$y' + \frac{2}{x}y = 12.$$
$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = x.$$
$$(x \ln x)y' + y = 2 \ln x.$$
$$xy' + 6y = 3x + 1.$$

2.2.2 Equations séparables

Un exemple :

$$y' = \frac{xy}{x^2 - 1}.$$

Rappelons-nous que $y' = \frac{dy}{dx}$, et réécrivons à gauche tout ce qui concerne y, et à droite tout ce qui concerne x :

$$\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{x^2 - 1}.$$

Il ne reste plus qu'à intégrer **séparément** des deux côtés, d'où le nom séparable.

2.2.3 Equations homogènes

Un exemple :

$$(x + y)\,dx - x\,dy = 0.$$

Si nous faisons le changement $(x, y) \to (kx, ky)$, nous remarquons que l'équation est incha,gée. Nous posons alors $y = xu$, d'où $dy = xdu + udx$, et donc

$$dx - xdu = 0.$$

et nous sommes ramenés à une équation à variables séparées.

2.2.4 Equations de Bernouilli

Les équations de Bernouilli [3] sont de la forme

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)y^m(t)$$

où $m \neq 1$. Divisons l'équation par $y^m(t)$:

$$a(t)\frac{y'(t)}{y^m(t)} + b(t)\frac{1}{y^{m-1}(t)} = c(t)$$

3. proposée par Jacques Bernoulli en 1695 et résolue un an plus tard par Leibniz

le premier terme est proportionnel à la dérivée de $\frac{1}{y^{m-1}(t)}$, puisque

$$\left(\frac{1}{y^{m-1}(t)}\right)' = -(m-1)\frac{y'(t)}{y^m(t)}$$

Donc si nous posons $u = \frac{1}{y^{m-1}(t)}$, nous obtenons

$$-\frac{a}{m-1}u' + bu = c.$$

Nous nous somme ramenés à une équation linéaire. **Exemples**

$$y' + y = -\frac{t}{y}, \qquad ty' + y = y^2 \ln t \quad .$$

2.2.5 Equations de Ricatti

L'équation de Ricatti [4] (qui intervient en contrôle optimal) est de la forme

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)y^2(t) + c(t)$$

Supposons connue une solution particulière $\bar{y}$. Posons $z = y - \bar{y}$. Alors l'équation portant sur z s'écrit

$$z'(t) + (a(t) - 2b(t)\bar{y}(t))\, z(t) = b(t)z^2(t).$$

C'est une équation de Bernoulli, il ne reste plus qu'à la résoudre. La difficulté est de trouver une solution exacte. **Exemples**

$$t^3y' + y^2 + t^2y + 2t^4 = 0, \qquad y' + \frac{y}{t} - y^2 + \frac{1}{t^2} = 0$$

2.3 Autres démonstrations : Picard et Newton

4. Jacopo Francesco Riccati (1676-1754)

Chapitre 3

Extension aux systèmes et équations d'ordre supérieur

3.1 Définitions

Un **système du premier ordre** s'écrit

$$Y' = F(t, Y) \tag{3.1}$$

où Y est maintenant un élément de $\mathbb{R}^n$, $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$. et F est une application définie sur un domaine D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. la dérivée Y' du vecteur Y est évidemment définie comme $Y' = \begin{pmatrix} Y_1' \\ \vdots \\ Y_n' \end{pmatrix}$. Comme dans le cas scalaire, pour préciser une solution de l'équation, on se donne une **donnée initiale**

$$Y(t_{0)} = Y_0. \tag{3.2}$$

et l'on peut considérer le **problème de Cauchy** vectoriel associé.

Considérons maintenant une **équation différentielle scalaire d'ordre n** écrite sous forme normale

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{3.3}$$

où, pour tout k, $y^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de y. On réduit cette équation à un système en posant

$$\begin{array}{rcl} Y_1 & = & y \\ Y_2 & = & y' \\ & \vdots & \\ Y_n & = & y^{(n-1)}. \end{array} \tag{3.4}$$

Le système s'écrit alors

$$
\begin{array}{lcl}
Y_1' & = & Y_2 \\
Y_2' & = & Y_3 \\
 & \vdots & \\
Y_{n-1}' & = & Y_n \\
Y_n' & = & f(t, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)
\end{array}
\tag{3.5}
$$

ce qui correspond bien à la forme (3.1). Les conditions initiales doivent être données sur Y, c'est-à-dire que les $(n-1)$ premières dérivées doivent être prescrites :

$$
y(t_{0)} = y_0, y'(t_{0)} = y_0', \ddots, y^{(n-1)}(t_{0)} = y_0^{(n-1)}. \tag{3.6}
$$

Le problème de Cauchy réside ici dans la résolution de (3.3),(3.6), et se ramène à la résolution du problème de Cauchy pour le système (**??**) (eq :cisys). C'est donc ce dernier que nous allons étudier. L'espace $\mathbb{R}^n$ où vit la solution Y est appelé l'**espace des phases**, et l'ensemble des (t, Y) vit dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, appelé **espace des phases élargi**.

Les définitions sont les mêmes que dans le cas scalaire, tous les résultats écrits jusqu'ici s'étendent au cas vectoriel en changeant les valeurs absolues en normes. On sait que sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes, on pourra considérer en particulier l'une des trois normes suivantes :

$$
\begin{array}{lcl}
||Y||_1 & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |Y_i| \\
||Y||_\infty & = & sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |Y_i| \\
||Y||_2 & = & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |Y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{array}
\tag{3.7}
$$

La norme euclidienne $||.||_2$ est associée au produit scalaire noté $(.,.)$.

3.2 Résultats d'existence et d'unicité pour les systèmes

Théorème 13 (Existence locale). *Supposons f définie et continue dans le domaine D de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Soit (t_0, y_0) un point de D tel que D contienne le parallélépipède $R = \{(t, y), |t - t_0| \leqslant a, ||Y - Y_0|| \leqslant b\}$. Supposons également f lipschitzienne par rapport à y dans D, i.e. il existe une constante positive L telle que*

$$
\forall (t, y_1) \in D, \forall (t, y_2) \in D, ||f(t, y_1) - f(t, y_2)|| \leqslant L||y_1 - y_2|| \tag{3.8}
$$

Alors il existe une unique solution de (3.1),(3.2) sur l' intervalle $|t - t_0| \leqslant c$, où $M = \sup_R ||f(t, y)||$ et $c = \min(a, \dfrac{b}{M})$.

Les théorèmes 9 et 10 admettent les généralisations suivantes :

Théorème 14. *On suppose que $D = I_0 \times \mathbb{R}^n$, $I_0 = [t_0, t_1)$, et qu'il existe une fonction $l$dans $\mathcal{L}^1(I_0)$ telle que*

$$\forall (t, y) \in D, (f(t, y).y) \leqslant l(t)(1 + ||y||^2). \tag{3.9}$$

Alors le problème (3.1),(3.2)admet au moins une solution globale dans I_0.

Théorème 15. *On suppose que $D = I_0 \times \mathbb{R}^n$, $I_0 = [t_0, t_1)$, et qu'il existe une fonction l dans $\mathcal{L}^1(I_0)$ telle que*

$$\forall t \in I_0, \forall (y, z) \in \mathbb{R}^n, (f(t, y) - f(t, z).y - z) \leqslant l(t)||y - z||^2. \tag{3.10}$$

Alors le problème (3.1),(3.2) admet une solution et une seule dans I_0.

3.3 Variation par rapport à un paramètre

Soit un paramètre α prenant ses valeurs dans un intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ de $\mathbb{R}^p$. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{array}{lcl} Y' & = & F(t, Y, \alpha) \\ Y(t_0) & = & Y_0 \end{array} \tag{3.11}$$

Théorème 16. *Supposons F définie et de classe $\mathcal{C}^r$ par rapport à (α, t, Y) sur $[\alpha_1, \alpha_2] \times R$, lipschitzienne par rapport à Y sur $[\alpha_1, \alpha_2] \times R$. Alors le problème de Cauchy (3.11) admet une unique solution $Y(t; t_0, Y_0, \alpha)$, classe $\mathcal{C}^r$ par rapport à (α, t, Y) sur $[\alpha_1, \alpha_2] \times R$.*

3.4 Cas des équations différentielles linéaires

Commençons par les systèmes. Un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre s'écrit

$$Y' = A(t)Y + b(t) \tag{3.12}$$

où, pour tout t, $A(t)$ est une matrice $n \times n$ (*i.e.* un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)et $b(t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Considérons le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ constitué de (3.12) et de la condition initiale

$$Y(t_0) = Y_0$$

Corollaire 3. *Si les applications $t \to A(t)$ et $t \to b(t)$ sont continues de I_0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement, le problème de Cauchy (3.12) (3.2) admet une solution et une seule sur I_0 .*

Maintenant une équation différentielle linéaire d'ordre n s'écrit

$$p_0(t)\frac{d^n y}{dt^n}(t) + p_1(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(t) + \cdots + p_n(t)y(t) = b(t) \tag{3.13}$$

et les données de Cauchy sont celles écrites en (3.6).

Corollaire 4. *Si les applications $t \to p_j(t)$, pour $0 \leqslant j \leqslant n$, et $t \to b(t)$ sont continues de I_0 dans $\mathbb{R}$, si $|p_0|$ est borné inférieurement sur I_0, le problème de Cauchy (3.13) (3.6) admet une solution et une seule sur I_0 .*

Chapitre 4

Equations différentielles linéaires

4.1 Systèmes du premier ordre à coefficients constants

Systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

(1)

1. Rappels sur l'équation scalaire

* équation homogène : $y' = ay$.

Elle admet une infinité de solutions $y = \alpha e^{at}$. Si on se fixe $y(0) = y^0$, il existe une solution unique $y = y^0 e^{at}$.

* équation avec second membre : $y' = ay + g(t)$.

La solution générale de l'équation avec second membre est obtenue en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène $y = \alpha e^{at}$ une solution particulière de l'équation avec second membre. Il peut exister une solution particulière évidente (ex $y' = y + 1$). Sinon on applique la méthode de variation de la constante, i.e on cherche cette solution particulière sous la forme

$$y(t) = z(t)\, e^{at}$$

On a alors

$$y' - ay = z' e^{at} = g(t).$$

D'où $z' = e^{-at} g(t)$, et une solution particulière s'écrit

$$z(t) = \int_0^t e^{-as} g(s)\, ds, \text{ d'où}$$

$$y(t) = e^{at} \int_0^t e^{-as} g(s) ds = \int_0^t e^{a(t-s)} g(s) ds$$

et la solution générale de l'équation avec second membre s'écrit :

$$y = \alpha e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} g(s)\, ds.$$

2. Systèmes de 2 équations à 2 inconnues, homogènes.

On cherche ici deux fonctions y_1 et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$y'_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2$$
$$y'_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 .$$

qui s'écrit sous forme matricielle: $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. $Y'(t) = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$Y' = AY$$

2.1 Cas où A est diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

λ_1 et λ_2 sont deux réels.

le système s'écrit alors

$$\begin{cases} y'_1 = \lambda_1 y_1 \\ y'_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

soit $\begin{cases} y_1 = a\, e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = b\, e^{\lambda_2 t} \end{cases}$

Il y a donc une infinité de solutions, dépendant de deux paramètres a et b : l'ensemble des solutions constitue un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Si de plus on se donne $Y(0) = Y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$, alors Y est parfaitement déterminé : $Y = \begin{pmatrix} y_1^0 e^{\lambda_1 t} \\ y_2^0 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$.

On peut représenter l'ensemble des solutions dans le plan (y_1, y_2).
Pour a et b donnés, la courbe $(y_1(t), y_2(t))$ s'appelle une <u>courbe intégrale</u>, elle est donnée par une représentation paramétrique

en fonction de t.

– $\lambda_1 = \lambda_2$

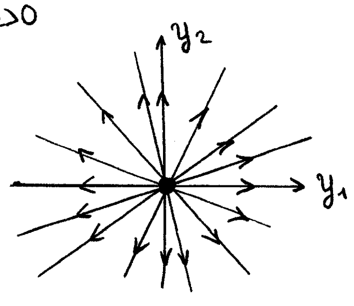
On a alors $\quad y_1 = \frac{a}{b} y_2 \quad$ si $b \neq 0$

$$\left(y_1 = a e^{\lambda_1 t},\ y_2 = 0\right) \text{ si } b = 0$$

C'est une famille de droites, passant par l'origine.

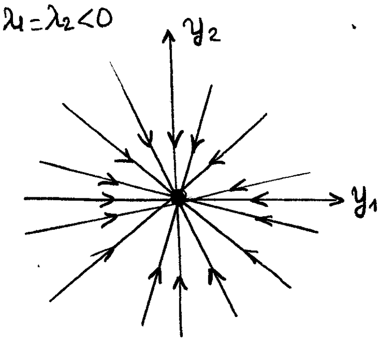
Si $\lambda_1 > 0$, y_1 et y_2 tendent vers $\pm\infty$ lorsque $t \to +\infty$, et vers 0 lorsque $t \to -\infty$. Si $\lambda_1 < 0$, c'est le contraire. La flèche sur les droites représente le sens du temps.

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$



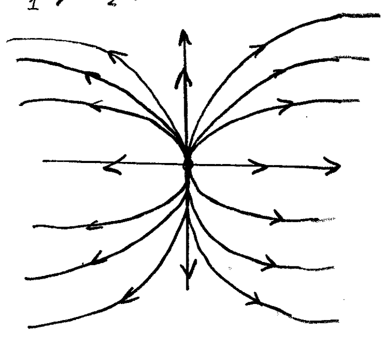
l'origine est un point répulsif

$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

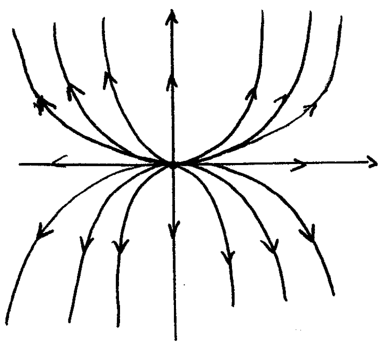


l'origine est un point attractif.

– $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$



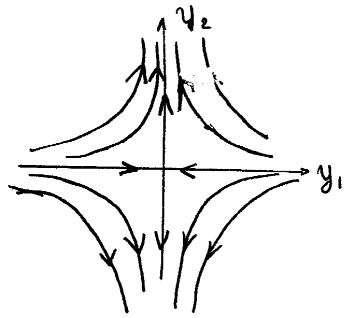
$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$.

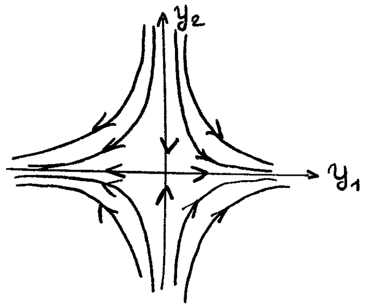


lorsque les deux valeurs propres sont négatives, il suffit de renverser le sens du temps. L'origine devient alors un point attractif.

– $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.





L'origine est un col.

Remarque : ici l'origine n'est un point attracteur que si l'on est sur la droite $y_2 = 0$ dans le 1er cas, $y_1 = 0$ dans le 2e.

2.2. Cas où $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

soit $$\begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 \end{cases}$$

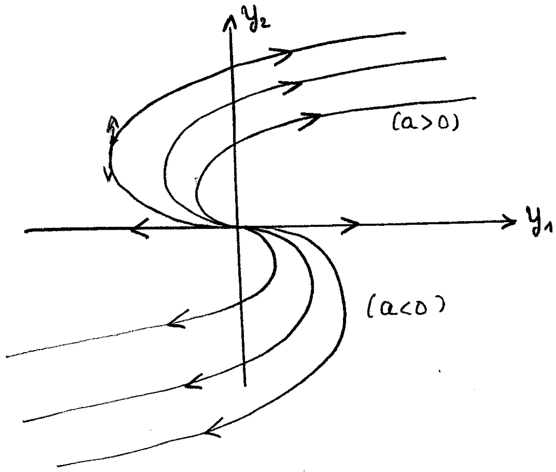
La deuxième équation donne
$$y_2 = a e^{\lambda t}$$
et l'on reporte dans la première :
$$y_1' = \lambda y_1 + a e^{\lambda t}$$
que l'on résout comme dans le §1. On a donc
$$\begin{cases} y_1 = (at + b) e^{\lambda t} \\ y_2 = a e^{\lambda t} \end{cases}$$

Ici aussi, la famille des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

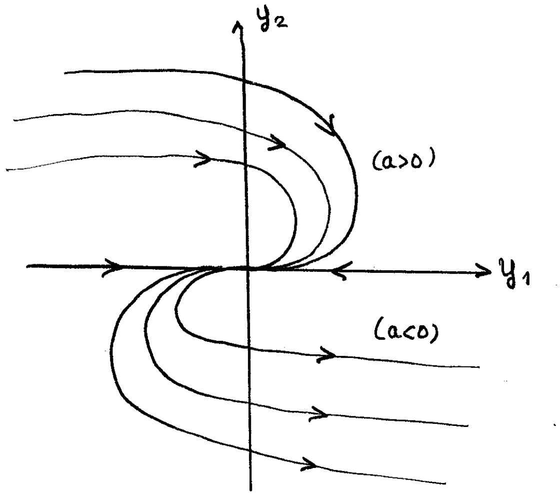
Nous étudions en détail le cas où $a>0$.

1) $\lambda > 0$.

t	$-\infty$		$-\frac{\lambda b + a}{\lambda a}$		$+\infty$
y_1'		$-$	0	$+$	
y_1	0	$\searrow$	$-\frac{a}{\lambda} e^{-\frac{\lambda b + a}{a}}$	$\nearrow$	$+\infty$
y_2	0		$\nearrow$		$+\infty$
y_2'			$+$		
$\frac{y_2'}{y_1'}$	0		∞		0



2) $\lambda < 0$.



2.3 : Soit maintenant A une matrice inversible dont les valeurs propres sont réelles. Il y a deux cas ; soit A est diagonalisable (i.e $\lambda_1 \neq \lambda_2$), soit A n'est pas diagonalisable (i.e $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)
On suppose $A \neq \lambda I$.

– A diagonalisable.

Il existe alors une base de $\mathbb{R}^2$, constituée de vecteurs propres V^1 et V^2 de A, telle que dans cette base $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

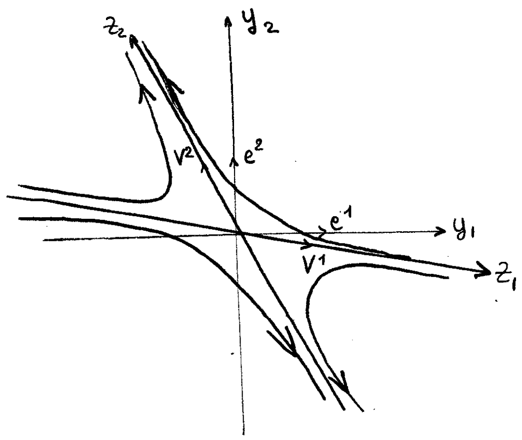
$$AV^1 = \lambda_1 V^1$$
$$AV^2 = \lambda_2 V^2.$$

si les coordonnées d'un point M sont (y_1, y_2) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, ils sont (z_1, z_2) dans la base (V^1, V^2) et $z = (z_1, z_2)$ est solution de l'équation différentielle

$$z' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} z$$

du type étudié en (2.1). On peut alors tracer les courbes intégrales dans les axes (V^1, V^2) :.

ex $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.



⑦

– <u>A non diagonalisable</u>. Alors λ est valeur propre double.

On démontre qu'il existe une base de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (V^1, V^2) telle que dans cette base A ait la forme $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Les vecteurs V^1 et V^2 sont tels que

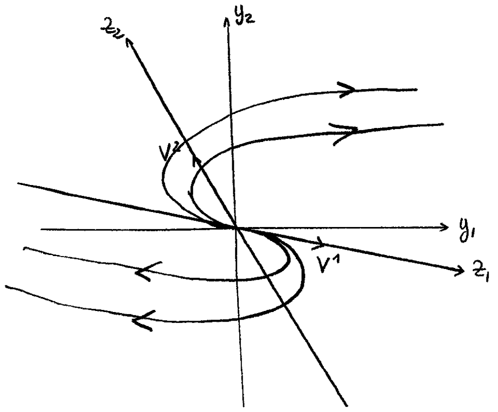
$$\begin{cases} A V^1 = \lambda V^1 \\ A V^2 = V^1 + \lambda V^2 \end{cases}$$

Si (z_1, z_2) sont les nouvelles coordonnées dans la base V^1, V^2, $z = (z_1, z_2)$ est solution du système différentiel

$$z' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} z$$

du type étudié en (2,2).

ex : $\lambda > 0$



Remarque : nous n'avons pas évoqué la possibilité de valeurs propres complexes. Nous y reviendrons dans la suite de ce chapitre.

3. Systèmes homogènes $n \times n$. Exponentielle d'une matrice.

Considérons maintenant le système

$$Y' = AY$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ | \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Supposons que A est diagonalisable, que ses valeurs propres sont réelles. Nous les notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (elles ne sont pas forcément toutes distinctes). Puisque A est diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres dans $\mathbb{R}^n$: $V^1 \_ V^n$, avec $AV^i = \lambda_i V^i$, $1 \leq i \leq n$. Dans cette base la matrice A prend la forme

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Nous notons P la matrice de passage, i.e la matrice des vecteurs propres : la $j$ème colonne de $P = V^j$ ou encore

$$P_{ij} = V_i^j.$$

$$A = PDP^{-1}$$

le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont $(y_1 \_ y_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ a pour coordonnées $(z_1, \dots, z_n)$ dans la base des V^j, ou encore

$$Y = PZ, \text{ ou}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} z_i V^i$$

Réecrivons le système homogène

$$PZ' = PDP^{-1}PZ$$

Soit

$$Z' = DZ$$

C'est un système diagonal, i.e

$$z_j' = \lambda_j z_j \qquad 1 \leq j \leq n,$$

que l'on intègre

$$z_j = a_j e^{\lambda_j t} \qquad 1 \leq j \leq n,$$

où les a_j sont arbitraires. On en déduit Y :

$$Y = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{\lambda_j t} V^j$$

Nous avons donc écrit la solution générale du système comme combinaison linéaire des $e^{\lambda_j t} V^j$.

<u>Théorème</u> : Supposons la matrice A diagonalisable, à valeurs propres réelles. Alors l'ensemble des solutions du système $Y' = AY$ forme un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, dont une base est donnée par $\{e^{\lambda_j t} V^j\}_{1 \leq j \leq n}$, où les λ_j sont les valeurs propres de A, V^j les vecteurs propres associés.

<u>Démonstration</u> : il est d'abord facile de voir que si Y et X sont solutions du système différentiel, $\alpha Y + \beta X$ l'est aussi pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. En effet

$$\begin{array}{l|l} \alpha \times & Y' = AY \\ \overset{+}{\beta} \times & X' = AX \end{array}$$

$$= \quad (\alpha Y + \beta X)' = A(\alpha Y + \beta X)$$

Ensuite, nous avons écrit toute solution Y comme combinaison linéaire des $\{e^{\lambda_j t} V_j\}_{1 \leq j \leq n}$, ce qui prouve que ces vecteurs engendrent l'espace des solutions. Comme par hypothèse ils forment un système libre, et sont au nombre de n, ils en forment une base, et c'est un espace vectoriel de dimension n. ∎

Nous allons voir que ce résultat (sauf la description de la base), est encore vrai pour une matrice A quelconque.

3.1. Exponentielle d'une matrice.

Reprenons le cas précédent et réécrivons Z un peu différemment.

$$Z = \begin{pmatrix} a_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ a_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Par définition $e^{\lambda_j t} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k \lambda_j^k}{k!}$, d'où formellement

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k \geq 0} \frac{t^k \lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k \geq 0} \frac{t^k \lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} D^k$$

Il est maintenant très tentant de noter e^{Dt} la matrice

$$e^{Dt} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} D^k$$

(si jamais on sait définir une série à termes matriciels)

et d'écrire

$$Z = e^{Dt} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ | \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Puis $\quad Y = P e^{Dt} \begin{pmatrix} a_1 \\ | \\ a_n \end{pmatrix}.$

Posons $\quad P \begin{pmatrix} a_1 \\ | \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ | \\ b_n \end{pmatrix} = b.$

$$Y = P e^{Dt} P^{-1} b.$$

Qu'est-ce que $P e^{Dt} P^{-1}$?

$$P e^{Dt} P^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} (P D^k P^{-1}).$$

or

$$P D^k P^{-1} = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1})}_{k \text{ fois}} = (PDP^{-1})^k.$$

d'où

$$P e^{Dt} P^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} (PDP^{-1})^k = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k$$

On est encore tenté d'écrire.

$$\sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k = e^{tA}$$

et on a alors

$$Y = e^{tA} . b .$$

Nous allons formaliser cette notion.

Pour cela, il faut savoir définir des séries à termes matriciels.

<u>Rappels</u> : Si $\| \ \|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, on définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une norme "subordonnée" par :

$$\|M\| = \sup_{\substack{Y \in \mathbb{R}^n \\ Y \neq 0}} \frac{\|MY\|}{\|Y\|}$$

(On suppose ici que le sup existe et est fini).

C'est une norme, i.e

$$\|M\| = 0 \Leftrightarrow M = 0$$

$$\|\lambda M\| = |\lambda| \, \|M\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\|M + N\| \leq \|M\| + \|N\|$$

<u>Remarque</u> : de la définition on déduit que

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n \quad \|MY\| \leq \|M\| . \|Y\| .$$

De plus c'est une norme d'algèbre, i.e :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \|MN\| \leq \|M\| \, \|N\|$$

en effet :

$$\|MN\| = \sup_{Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MNY\|}{\|Y\|}$$

D'après la remarque précédente

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \|MNY\| = \|M(NY)\| \leq \|M\| \, \|NY\| \leq \|M\| \, \|N\| \, \|Y\| .$$

d'où $$\sup_{Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MNY\|}{\|Y\|} \leq \|M\| \, \|N\| .$$

Dans toute la suite, nous supposerons $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|Y\|_\infty = \sup_{1\le i\le n} |Y_i|$, et nous noterons $\|\ \|$ la norme subordonnée.

On a le résultat suivant

Théorème : $\|M\| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |M_{ij}|$

Démonstration :

$\forall Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\quad (MY)_i = \sum M_{ij} Y_j$, d'où

$$\|MY\|_\infty = \max_i \left|\sum_j M_{ij} Y_j\right| \le \max_i \sum_j |M_{ij}|\,|Y_j|$$
$$\le \max_j |Y_j| \max_i \sum_j |M_{ij}|$$

d'où $\quad \|MY\|_\infty \le \|Y\|_\infty \max_i \sum_j |M_{ij}|.$

et $\quad \|M\|_\infty \le \max_i \sum_j |M_{ij}|$

Pour montrer l'égalité, il suffit de trouver un Y tel que

$$\|MY\|_\infty = \left(\max_i \sum_j |M_{ij}|\right) \|Y\|_\infty$$

Soit i_0 un indice tel que

$$\sum_j |M_{i_0 j}| = \max_i \sum_j |M_{ij}|$$

et choisissons Y tel que

$$Y_j = 1 \quad \text{si } M_{i_0 j} = 0$$
$$Y_j = \text{signe } M_{i_0 j} \quad \text{si } M_{i_0 j} \neq 0.$$

Alors $\|Y\|_\infty = 1$, et

pour $i \neq i_0$ $\quad \left|\sum_j M_{ij} Y_j\right| \le \sum_j |M_{ij}| \le \sum_j |M_{i_0 j}|$

$$\sum_j M_{i_0 j} Y_j = \sum_j |M_{i_0 j}|$$

d'où $\quad \|MY\|_\infty = \sum_j |M_{i_0 j}| = \left(\max_i \sum_j |M_{ij}|\right) \|Y\|_\infty.$

Théorème : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme $\|\ \|$.

La démonstration est laissée en exercice.

On dit alors que la suite M_k est convergente si il existe une matrice M telle que $\|M_k - M\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, que la série de terme général M_k est convergente si la suite $S_p = \sum_0^p M_k$ est convergente. On note alors $M = \sum_0^\infty M_k$.

Définition : la série de terme général M_k est absolument convergente si la série numérique de terme général $\|M_k\|$ est convergente.

Théorème : Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration : puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est complet, il suffit de montrer que la suite $S_p = \sum_0^p M_k$ est de Cauchy. Or $S_p - S_q = \sum_{q+1}^p M_k$ et

$$\|S_p - S_q\| = \left\|\sum_{q+1}^p M_k\right\| \leq \sum_{q+1}^p \|M_k\| \xrightarrow[q,p\to\infty]{} 0, \text{ puisque}$$

la série $\|M_k\|$ est convergente.

Si M est une matrice quelconque, notons $M_k = \frac{M^k}{k!}$. La série de terme général M_k est absolument convergente. En effet

$$\|M_k\| = \frac{1}{k!}\|M^k\| \leq \frac{\|M\|^k}{k!}$$

le terme de droite de l'inégalité est le terme général de la série $e^{\|M\|}$, convergente.

<u>Définition</u> : on appelle exponentielle de la matrice M, et on note e^M, la somme de la série de terme général $\frac{M^k}{k!}$

$$e^M = \sum_{k \geq 0} \frac{M^k}{k!}$$

<u>Remarque</u> : nous avons démontré que

$$\|e^M\| \leq e^{\|M\|}.$$

<u>Propriétés de l'exponentielle d'une matrice.</u>

1. $e^0 = I$
2. $e^{PMP^{-1}} = P e^M P^{-1}$.
3. Si M et N commutent, e^M et e^N commutent et
$$e^M e^N = e^N e^M = e^{M+N}$$
4. La matrice e^M est inversible pour tout M et
$$(e^M)^{-1} = e^{-M}$$

Démonstration des propriétés

1. évident

2. Nous l'avons presque déjà fait :

$$e^{PMP^{-1}} = \sum_{k\geq 0} \frac{(PMP^{-1})^k}{k!}$$

mais

$$(PMP^{-1})^k = \underbrace{PMP^{-1}\,PMP^{-1}\,PMP^{-1}\ldots PMP^{-1}}_{k \text{ fois}}$$

$$= PM^kP^{-1}$$

d'où

$$e^{PMP^{-1}} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} PM^kP^{-1} = P\sum_{k\geq 0}\frac{M^k}{k!}P^{-1} = Pe^M P^{-1}$$

3. Rappelons la démonstration dans le cas de nombres réels :

$$e^{x+y} = \sum_{k\geq 0} \frac{(x+y)^k}{k!}$$

on écrit la forme du binôme

$$(x+y)^k = \sum_{p=0}^{k} C_k^p \, x^p \, y^{k-p}$$

d'où

$$e^{x+y} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{\cancel{k!}} \sum_{p=0}^{k} \frac{\cancel{k!}}{p!\,(k-p)!} x^p y^{k-p}.$$

Puisque la série est absolument convergente, on peut groupes les termes différemment et

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{k} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{p!\,(k-p)!} x^p y^{k-p}.$$

$$e^{x+y} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} \underbrace{\sum_{k=p}^{\infty} \frac{y^{k-p}}{(k-p)!}}_{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}}$$

$$= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) = e^x e^y .$$

Revenons maintenant aux matrices.

$$e^{M+N} = \sum_{k\geq 0} \frac{(M+N)^k}{k!}$$

En général, la formule du binôme n'existe pas! Par exemple :

$$(M+N)^2 = (M+N)(M+N) = M^2 + NM + MN + N^2,$$

et en général, $NM + MN \neq 2NM$, <u>sauf</u> si M et N commutent, auquel cas on a

$$(M+N)^k = \sum_{p=0}^{k} C_k^p M^p N^{k-p}.$$

et, si l'on admet que les manipulations faites plus haut, dans le cas réel, sont ici licites, on conclut de même.

4. Puisque M et $-M$ commutent, $e^{M-M} = e^M e^{-M} = I$, d'où $e^{-M} = (e^M)^{-1}$.

<u>exemples</u>

1) Nous avons déjà vu que si M est diagonale, i.e $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

alors
$$e^M = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

et
$$e^{Mt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

2) Supposons que M soit une matrice nilpotente d'ordre m, i.e

$$M^m \equiv 0, \quad M^{m-1} \neq 0$$

(ex $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^2 \equiv 0$; $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^3 \equiv 0$, etc...)

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{M^k}{k!}$$

si $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e^M = I + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$e^{tM} = I + tM = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

si $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $e^M = I + M + \frac{M^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$e^{tM} = I + tM + \frac{t^2 M^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

etc...

<u>Exercice</u>: Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que $MN \neq NM$, $e^N e^M \neq e^M e^N$. Calculer e^{M+N} par diagonalisation.

3) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul simple montre que $J^2 = I$.

d'où

k pair $\quad J^k = I$
k impair $\quad J^k = J$.

et

$$\exp tJ = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k J^k}{k!} = \sum_{\substack{k=2p\\k=0}}^{\infty} \frac{t^k J^k}{k!} + \sum_{\substack{k=2p+1\\k=1}}^{\infty} \frac{t^k J^k}{k!}$$

$$= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!}\right) I + \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}\right) J$$

$$\exp tJ = \operatorname{ch} t \, I + \operatorname{sh} t \, J$$

4) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $J^2 = -I$.

d'où $\quad J^{2p} = (-1)^p I \; , \; J^{2p+1} = (-1)^p J$ et

$$\exp tJ = \cos t \, I + \sin t \, J .$$

Revenons maintenant au système différentiel, et étudions l'application $t \mapsto e^{At}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>Théorème</u>: l'application $t \mapsto e^{At}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{At}\right) = A^n e^{At}.$$

<u>Démonstration</u> :

Commençons par montrer que l'application est dérivable et que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = A e^{At}, \text{ i.e que}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\| \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} - A e^{At} \right\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0 .$$

(20)

Puisque At et Ah commutent,

$$e^{A(t+h)} - e^{At} = e^{At}(e^{Ah} - 1)$$

et
$$\frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} - A e^{At} = e^{At}\left(\frac{e^{Ah} - 1}{h} - A \right)$$

(A commute avec e^{At})

et
$$\left\| \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} - A e^{At} \right\| \leq e^{\|At\|} \left\| \frac{e^{Ah} - 1}{h} - A \right\|$$

Nous sommes donc ramenés à étudier la dérivabilité en $t = 0$.

$$e^{Ah} = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{h^k A^k}{k!}$$

d'où
$$\frac{e^{Ah} - 1}{h} = A + \sum_{k \geq 2} h^{k-1} \frac{A^k}{k!}$$

$$\frac{e^{Ah} - 1}{h} - A = h \sum_{k \geq 2} \frac{h^{k-2} A^k}{k!}$$

$$\left\| \sum_{k \geq 2} h^{k-2} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k \geq 2} |h|^{k-2} \frac{\|A\|^k}{k!}$$

Lorsque $h \to 0$, on a $|h| \leq 1$, d'où

$$\left\| \sum_{k \geq 2} h^{k-2} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k \geq 2} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \sum_{k \geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq e^{\|A\|}$$

et
$$\left\| \frac{e^{Ah} - 1}{h} - A \right\| \leq |h| \, e^{\|A\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0 .$$

On en déduit par récurrence que e^{tA} est indéfiniment dérivable ~~et~~ .

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{At} = A^n e^{At}$$

<u>Théorème</u> : L'ensemble des solutions de $Y' = AY$ forme un espace vectoriel de dimension n. Toute solution peut s'écrire sous la forme $Y(t) = \sum \alpha_i e^{At} V^i$, où les V^i forment une base de $\mathbb{R}^n$. En particulier il existe une solution unique telle que $Y(0) = Y^0$, elle s'écrit $Y = e^{At} Y_0$.

Nous admettrons ce résultat, ainsi que le corollaire suivant, qui repose sur une trigonalisation de A

<u>Corollaire</u> : Soient $\lambda_1, .., \lambda_k$ les valeurs propres de A, $\nu_1, .., \nu_k$ leur multiplicité. Alors la solution générale de $Y' = AY$ s'écrit

$$Y = \sum_{j=1}^{k} P_j(t) e^{\lambda_j t}.$$

où les P_j sont des polynômes à coefficients vectoriels de degré $\leq \nu_j - 1$, i.e $P_j(t) = \sum_{\ell=1}^{\nu_j - 1} B_{\ell,j} t^\ell$, $B_{\ell,j} \in \mathbb{R}^n$

Remarque : les $B_{e,j}$ ne sont pas totalement arbitraires. Ils forment en effet un ensemble de n^2 paramètres réels. Or d'après le théorème, Y est déterminé de façon unique par n paramètre. En injectant $\sum_1^k P_j(t) e^{\lambda_j t}$ dans le système différentiel, on obtiendra $n - 1$ relations entre les $B_{\ell,j}$.

Exemple : Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. λ est valeur propre double donc $k=1$, $\nu_1 = 2$. On peut donc chercher Y sous la forme

$$Y = (B_0 + B_1 t)\, e^{\lambda t}.$$

On a alors

$$Y' = (\lambda B_0 + B_1 + \lambda B_1 t)\, e^{\lambda t}$$

et

$$Y' - AY = e^{\lambda t}\left[\lambda B_0 + B_1 - A B_0 + (\lambda B_1 - A B_1) t\right].$$

donc $Y' - AY = 0 \iff \begin{cases} \lambda B_1 - A B_1 = 0. \\ \lambda B_0 = A B_0 - B_1 \end{cases}$

B_1 est vecteur propre de A, donc $B_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$(A - \lambda) B_0 = B_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $B_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

et $Y = \begin{pmatrix} (at+b)\, e^{\lambda t} \\ b\, e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Comme nous l'avions démontré au §2.

4. Systèmes homogènes 2x2. Suite.

Soit donc A une matrice réelle 2×2. Nous avons étudié deux cas

- le cas où A est diagonalisable (i.e a deux valeurs propres distinctes) et à valeurs propres réelles

– le cas où A a une valeur propre double réelle.

Quels sont les autres cas possibles ? Le polynôme caractéristique de A s'écrit :

$$z^2 - (\operatorname{Tr} A)\, z + \det A = 0 .$$

Puisque $\operatorname{Tr} A$ et $\det A \in \mathbb{R}$, les valeurs propres sont soit réelles, soit complexes conjuguées. Le troisième et dernier cas est donc

– A a deux valeurs propres complexes conjuguées distinctes (i.e $\operatorname{Im} \lambda_i \neq 0$). Notons donc

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + i\beta \\ \lambda_2 &= \alpha - i\beta . \end{aligned} \qquad \beta \neq 0 .$$

Il leur correspond deux vecteurs propres complexes U et $\overline{U}$, avec

$$A U = \lambda_1 U$$

Ecrivons $U = V^1 + i V^2$, et égalons partie réelle et partie imaginaire.

$$A(V^1 + i V^2) = (\alpha + i\beta)(V^1 + i V^2)$$

$$\begin{cases} A V^1 = \alpha V^1 - \beta V^2 \\ A V^2 = +\beta V^1 + \alpha V^2 \end{cases}$$

Dans la base $(\vec{V}^1, \vec{V}^2)$ (vecteurs dont les coordonnées sont (V^1, V^2) dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$), la matrice A se transforme en

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & +\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

(21)

Modulo cette transformation, nous nous ramenons donc à étudier le système

$$Z' = BZ$$

D'après le théorème précédent, la solution générale s'écrit

$$Z = e^{Bt}.C$$

C vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Calculons e^{Bt}.

$$B = \alpha I + \beta J. \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I et J commutent évidemment, d'où

$$e^{Bt} = e^{\alpha t I} e^{+\beta J t}$$

Nous avons déjà calculé e^{Jt}, d'où

$$e^{\beta J t} = \cos\beta t I + \sin\beta t J.$$

et

$$e^{Bt} = e^{\alpha t}(\cos\beta t I + \sin\beta t J) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & +\sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$$

et

$$z_1 = e^{\alpha t}(c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t)$$

$$z_2 = e^{\alpha t}(-c_1 \sin\beta t + c_2 \cos\beta t).$$

25

écrivons c_1 et c_2 sous la forme

$$c_1 = a\cos b \qquad a>0$$
$$c_2 = a\sin b . \qquad b\in[0,2\pi[.$$

Alors

$$z_1 = a e^{\alpha t}\cos(-b+\beta t)$$
$$z_2 = a e^{\alpha t}\sin(-b+\beta t).$$

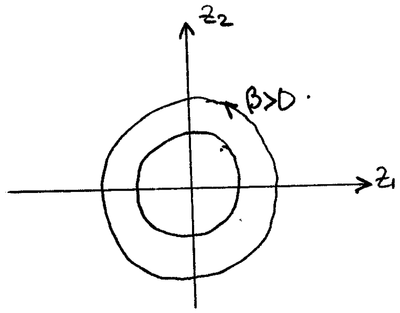
<u>1er cas</u> : $\alpha=0$, les valeurs propres sont imaginaires pures.

$$z_1 = a\cos(-b+\beta t)$$
$$z_2 = a\sin(-b+\beta t)$$

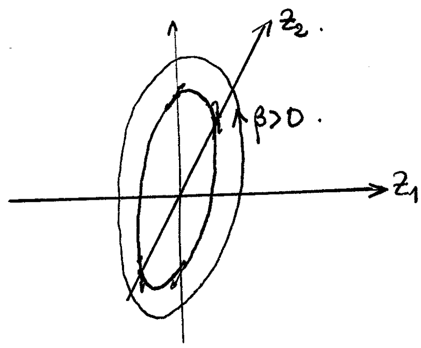
d'où $\quad z_1^2+z_2^2=a^2$.

si $(\vec{V}^1,\vec{V}^2)=(\vec{e_1},\vec{e_2})$ on a une famille de cercles concentriques.
Sinon une famille d'ellipses.

ex $(\vec{V}^1,\vec{V}^2)=(\vec{e_1},\vec{e_2})$



$(\vec{V}^1,\vec{V}^2)\neq(\vec{e_1},\vec{e_2})$.



orbites périodiques.

2^e cas : $\alpha \neq 0$.

On a alors

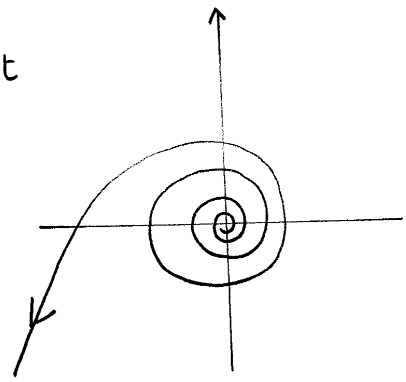
$$z_1^2 + z_2^2 = a^2 e^{2\alpha t}$$

soit la courbe en polaires.

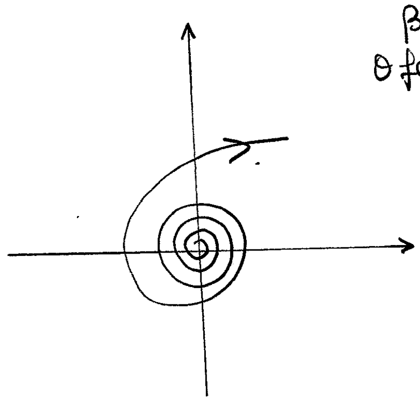
$$\begin{cases} \rho = a\, e^{\frac{\alpha}{\beta}(\theta + b)} \\ \theta = -b + \beta t \end{cases}$$

C'est une spirale logarithmique. Traçons les différents cas pour $(\vec{V}1, \vec{V}2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

$\beta > 0$
θ fctn ↗ de t

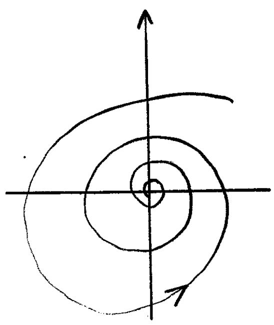


$\beta < 0$
θ fctn ↘ de t

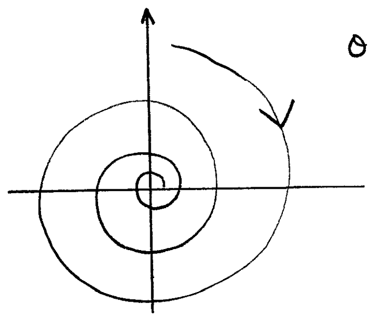


$\alpha > 0$: O point répulsif.

$\beta > 0$
θ fctn ↗ de t



$\beta < 0$
θ fctn ↘ de t



$\alpha < 0$: O point attractif.

Nous avons ainsi évoqué tous les modes de comportement des solutions des systèmes 2×2.

5. Systèmes avec second membre.

$$Y' = AY + B(t)$$

$B(t)$ fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$.

Comme pour une équation scalaire, si Y et Z sont solutions, alors $Y - Z$ est solution de l'équation homogène.

Théorème : L'ensemble des solutions est un espace affine de dimension n. La solution générale est obtenue en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation avec second membre.

Comment trouver une solution particulière ? Soit il y en a une évidente (par exemple si B ~~est~~ constante, alors $-A^{-1}B$ est solution particulière si A est inversible). Soit on utilise la méthode de variation de la constante. Cherchons-la sous la forme

$$Y(t) = e^{At} . Z(t)$$

on a alors

$$Y' - AY = e^{At} Z'(t) = B(t)$$

d'où

$$Z'(t) = e^{-At} B(t)$$

et

$$Z(t) = \int_0^t e^{-As} B(s)\, ds$$

d'où

$$Y(t) = e^{At} \int_0^t e^{-As} B(s)\, ds$$

est une solution particulière de l'équation.

Théorème: il existe une et une seule solution de l'équation avec second membre prenant la valeur Y^0 en $t=0$. Elle s'écrit

$$Y(t) = e^{At} Y_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As} B(s)\, ds.$$

6. Application: equation différentielle d'ordre n.

Soit l'équation différentielle

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

$a_1, \dots a_n$ sont des nombres réels, $y^{(k)}$ désigne $\frac{d^k y}{dt^k}$. Elle peut se mettre sous forme de système différentiel du premier ordre en posant

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$Y' = AY. \qquad \text{c'est la matrice compagnon de } A.$$

Théorème : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle d'ordre n est un espace vectoriel de dimension n. La solution générale s'écrit

$$y = \sum_{j=1}^{k} P_j(t) e^{\lambda_j t}$$

où les P_j sont des polynômes de degré $\leq \nu_j - 1$. $\{\lambda_j\}_{1\leq j\leq k}$ sont les racines du polynôme caractéristique

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

ν_j est la multiplicité de λ_j.

Ce théorème est une conséquence directe de l'étude des systèmes. le corollaire montre en effet que

$$Y = \sum_{j=1}^{k} P_j(t) e^{\lambda_j t}$$

où les P_j sont des polynômes à coefficients vectoriels de degré $\leq \nu_j - 1$. $\{\lambda_j\}$ sont les valeurs propres de A. Il suffit alors de prendre la première composante de Y pour obtenir le théorème, modulo le résultat suivant :

les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique. En effet

λ valeur propre de $A \iff \exists Y \neq 0,\ AY = \lambda Y \iff$

$$\left.\begin{array}{l} Y_2 = \lambda Y_1 \\ Y_3 = \lambda Y_2 \\ \vdots \\ Y_n = \lambda Y_{n-1} \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} Y_2 = \lambda Y_1 \\ Y_3 = \lambda^2 Y_1 \\ \vdots \\ Y_n = \lambda^{n-1} Y_1 \end{array}$$

$$-a_n Y_1 - \dots - a_1 Y_n = \lambda Y_n$$

d'où λ valeur propre de $A \iff \exists Y_1 \neq 0,\ (a_n + a_{n-1}\lambda + \dots + a_1 \lambda^{n-1} + \lambda^n) Y_1 = 0$

$$\iff \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

4.2 Systèmes du premier ordre à coefficients variables

II Equations à coefficients variables. (29

1) $x' = A(t)x$. $x \in \mathbb{R}^n$ $t \mapsto A(t)$ matrices

l'ensemble des solutions est encore un espace vectoriel de dimension n.

Théorème : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$; pour tout point (t_0, x_0) de $I \times \mathbb{R}^n = E$ on note $\varphi(t, t_0; x_0)$ l'intégrale de cette équation qui passe par (t_0, x_0)

1) $\forall t \in I$, $C(t,t_0) : x_0 \longmapsto \varphi(t, t_0, x_0)$ linéaire bijective bicontinue.

2) $t \longmapsto C(t, t_0)$ est la solution de l'équation $I \longmapsto \mathcal{L}(E, E)$ différentielle $\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = A(t)V \\ V(t_0) = I \end{cases}$

3) $\forall (u, v, w) \in I$

$$C(u,v) \circ C(v,w) = C(u,w) \text{ et } C(u,v) = C^{-1}(v,u)$$
$$C(u,u) = I.$$

La fonction C s'appelle la <u>résolvante</u>

$$\varphi(t, t_0; x_0) = C(t, t_0)\, x_0$$

Comment calculer la résolvante ?

<u>Théorème</u> : si les matrices $A(u)$ et $A(v)$ commutent pour tous u et v, alors

$$C(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds \right).$$

<u>exo</u> : 1) $A(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ -\beta(t) & \alpha(t) \end{pmatrix}$.

2) $A(t) = A$

3) $A(t) = \begin{pmatrix} 1/t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

montrer que dans ce cas $C(t, t_0) \neq \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(u)\, du\right)$

Intégration de l'équation linéaire non homogène :

si φ_1 et φ_2 sont deux solutions de

$$x' = A(t)\,x + b(t)$$

alors $x = \varphi_1 - \varphi_2$ est solution de

$$x' = A(t)\,x .$$

Donc l'ensemble des solutions est donné par

$$\varphi(t) = \underbrace{\varphi_1(t)}_{\text{sol particulière}} + C(t,t_0).\underbrace{\lambda_0}_{\in \mathbb{R}^N}$$

c'est un espace affine de dimension N.

φ_1 est calculée par la méthode de variation de la constante ; je cherche x tq $x(t_0) = x_0$.

$$x(t) = C(t,t_0)\,y(t)$$

- $x(t_0) = C(t_0,t_0)\,y(t_0) = x_0$.
- $x'(t) = C'(t,t_0)\,y + C(t,t_0)\,y' = A(t)\,C(t,t_0)\,y + C(t,t_0)\,y'$.

donc

$$x' = A(t)\,x + b(t)$$

$$A(t)\,x + C(t,t_0)\,y' = A(t)\,x + b(t)$$

$$y' = C(t_0,t)\,b(t).$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} C(t_0,s)\,b(s)\,ds .$$

$$x(t) = C(t,t_0)\,y(t_0) + C(t,t_0)\int_{t_0}^{t} C(t_0,s)\,b(s)\,ds .$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} C(t,s)\,b(s)\,ds .$$

Prop : la solution de $x' = At + b$ passant par x_0 est

$$x(t) = C(t,t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} C(t,s)\,b(s)\,ds$$

On appelle système fondamental de solutions une base $(u^{(1)} \_ u^{(N)})$ de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène -

Notons $W(t)$ le déterminant de ces solutions

$$W(t) = \begin{vmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_1^{(N)} \\ | & | & & | \\ u_N^{(1)} & u_N^{(2)} & \cdots & u_N^{(N)} \end{vmatrix} = \det\left(u^{(1)} \_ u^{(N)}\right)$$

alors
$$W'(t) = \begin{vmatrix} (u_1^{(1)})' & u_1^{(2)} & \cdots & u_1^{(N)} \\ | & | & & | \\ (u_N^{(1)})' & u_N^{(2)} & & u_N^{(N)} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & (u_1^{(N)})' \\ | & | & | \\ u_N^{(1)} & u_N^{(2)} & (u_N^{(N)})' \end{vmatrix}$$

on remplace dans chaque déterminant

$$W'(t) = \det\left(A(t)\,u^{(1)}, \dots, u^{(N)}\right) + \det\left(u^{(1)}, A(t)\,u^{(2)}, \dots, u^{(N)}\right) + \dots + \det\left(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, A(t)\,u^{(N)}\right)$$
$$= \mathrm{Tr}\, A(t) \det\left(u^{(1)}, \dots, u^{(N)}\right)$$

$$\boxed{W'(t) = \mathrm{Tr}\, A(t)\, W(t)}$$

Ici on a une equation scalaire, donc se résout sous la forme

$$W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}\, A(s)\, ds}$$

on en déduit en particulier que $W(t)$ garde un signe constant et ne s'annule jamais si $W(t_0) \neq 0$: si les n solutions sont indépendants au temps t_0, elles le sont pour tout temps.

Interprétation de la méthode de variation de la constante : soit $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ n solutions linéairement indépendantes de $x' = A(t)x$. Posons $x = \sum y_i u_i(t)$ et cherchons les y_i telles que $x' = A(t)x + b$:

$$\sum y_i' u_i + y_i u_i' = A(t) \sum y_i u_i + b$$

$$\sum y_i' u_i + y_i A(t) u_i = A(t) \sum y_i u_i + b$$

$$\sum y_i' u_i = b(t)$$

y_i' est la i-ème coordonnée de b dans la base des u_i.

III Equations linéaires d'ordre n

$$x^{(n)} = a_1(t)\, x + a_2(t)\, x' \ldots + a_n(t)\, x^{(n-1)} + b(t)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3. \\ \vdots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + b(t) \end{array} \right.$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ a_1 & \cdots & & a_n \end{pmatrix} \qquad \frac{dX}{dt} = A(t)X + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

matrice compagnon.

$\forall t_0 \in I$, $\forall x_0 \ldots x_0$, $\exists !\, x(t)$ définie ds I, (33

$$x(t_0) = x_0\,;\; x'(t_0) = x_0' \;\ldots\; x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)})$$

$$W(t) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & & u_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

alors $\operatorname{tr} A(t) = a_n(t)$ d'où

$$W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} a_n(s)\, ds}.$$

Critère d'indépendance : pour que n solutions $U_j = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_1^{(n-1)} \end{pmatrix}$ du système soient indépendantes, il faut et suffit que leurs premières composantes, considérées comme éléments de l'espace vectoriel des applications continues de I dans $\mathbb{R}$, soient linéairement indépendantes, i.e

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i(t) = 0 \text{ pour tout } t \text{ ds } I \Rightarrow (\lambda_1 \ldots \lambda_n) = 0$$

* Méthode de variation des constantes

On cherche $y_1 \ldots y_n$ tels que

$$y_1' \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_1^{(n-1)} \end{pmatrix} + y_2' \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_2^{(n-1)} \end{pmatrix} \ldots + y_n' \begin{pmatrix} u_n \\ u_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

où $u_1 \ldots u_n$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène. Ce qui s'écrit encore :

$$W(t) \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Par exemple en dimension 2 on écrit

$$\begin{aligned} y'_1 u_1 + y'_2 u_2 &= 0 \\ y'_1 u'_1 + y'_2 u'_2 &= b(t) \end{aligned}$$

et on résout.

* <u>Cas des équations à coefficients constants.</u>

Rappelons nous que la solution générale de l'équation homogène est

$$x(t) = \sum e^{\lambda_i(t)} p_i(t).$$

$p_i(t)$ polynôme en t de degré $\leq n_i - 1$, multiplicité de la valeur propre λ_i de A. On vérifie aisément (exo) que le déterminant de $(A - \lambda I)$, polynôme caractéristique de A, est

$$(-1)^n (\lambda^n - a_n \lambda^{n-1} - a_{n-1} \lambda^{n-2} \dots - a_1)$$

c'est l'équation caractéristique de l'équation différentielle.

* <u>Cas du problème aux limites.</u>

Considérons l'équation du second ordre

$$Ly = \frac{d^2 y}{dx^2} + p_1(x) \frac{dy}{dx} + p_0(x)\, y = f(x) \quad \text{sur } I = \mathbb{R}$$

on définit la fonction de Green de L en $a \in I$ par :