MACS1 - S6 - Equations différentielles - TD1
Equations résolubles par quadrature

On rappelle qu'une fonction $f(t,x)$ est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable (uniformémemt par rapport à la première variable) sur un ouvert $\Omega = I \times J$ si

$$\exists C \in R_+ \quad \forall t \in I \quad \forall (x,y) \in J^2 \qquad |f(t,x) - f(t,y)| \leq C|x-y|$$

On dit que f est localement lipschitzienne si, pour tout point $x \in J$, il existe un voisinage V sur lequel la restriction de f est lipschitzienne. La constante C peut alors dépendre du point x considéré.

On s'intéresse dans la suite à la résolution des équations différentielles du type

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1}$$

Si la fonction f est localement lipschitzienne, le problème de Cauchy correspondant est bien posé. On appelle problème de Cauchy le problème constitué de l'équation (1) et de la donnée

$$y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

1 Equations linéaires du premier ordre

On se donne deux fonctions $a(t)$ et $b(t)$ continues sur $\mathbb{R}$. On cherche la solution de l'équation

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \tag{2}$$

1. Ecrire l'équation (2) sous la forme (1). Montrer que la fonction f ainsi identifiée est lipschitzienne sur tout ouvert de la forme $]T_1, T_2[\times\mathbb{R}$.
2. On s'intéresse d'abord au cas de l'équation à coefficient constant, i.e. avec $a(x) = a \in \mathbb{R}$.
   - Calculer la solution générale de l'équation homogène, i.e. $b(t) = 0.$. Montrer que l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel de dimension 1. Déterminer l'intervalle d'existence en temps des solutions.
   - Montrer que les solutions de l'équation avec second membre forment un espace affine de dimension 1. Montrer que le calcul explicite de la solution générale avec second membre se ramène à un calcul de primitive.
3. On s'intéresse maintenant au cas de l'équation à coefficient variable. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (2) forment toujours un espace affine de dimension 1. Montrer que la solution générale peut encore être obtenue grâce à des calculs de primitive.
4. Exemple d'application
$$y'(t) + ty(t) = 2t$$
   - Identifier la constante de Lipschitz dans ce cas particulier.
   - Tracer les champs de vecteur dans le plan (t, y) et l'allure des courbes intégrales.
   - Calculer la solution générale de l'équation.
   - Résoudre le problème de Cauchy pour $y(1) = 1$.
5. Autres exemples :
$$y' + 7y = \sin t, \qquad y' + \frac{2t}{t^2+1}y = t, \qquad (t\ln t)y' + y = 2\ln t, \qquad ty' + 6y = 3t + 1$$

2 Equations non linéaires autonomes

On s'intéresse ici à quelques équations non linéaires autonomes, i.e. qui ne dépendent pas explicitement de la variable t. On étudiera en particulier les intervalles d'existence en temps des solutions et les problèmes d'unicité.

1. On considère l'équation, pour un paramètre $a \in \mathbb{R}_+$

$$y' = ay^2$$

Identifier la fonction f qui permet décrire cette équation sous la forme (1). Montrer qu'elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ mais qu'elle est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Calculer la solution générale de cette équation. Donner les intervalles maximum d'existence en temps des solutions en fonction du signe de la donnée de Cauchy $y(0) = y_0$.

2. On considère l'équation

$$y' = \sin y$$

Identifier la fonction f qui permet décrire cette équation sous la forme (1). Montrer qu'elle est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Dans le plan (t, y), tracer les champs de vecteur associés à cette équation. Montrer que la solution est bornée uniformément en temps et donner explicitement les bornes de l'intervalle en fonction de la donnée de Cauchy y_0.

3. On considère l'équation

$$y' = \sqrt{y}$$

Identifier la fonction f qui permet décrire cette équation sous la forme (1). Montrer qu'elle n'est ni lipschitzienne ni localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy avec la donnée initiale $y(0) = 0$. Identifier au moins trois solutions différentes du problème sur l'intervalle en temps $[0, +\infty[$. Montrer ensuite qu'il y en a une infinité.

3 Equations de Bernoulli

On fixe $m \in \mathbb{Z}$. On considère ici une équation du type

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^m(t) = 0 \tag{3}$$

1. Identifier la fonction f qui permet décrire cette équation sous la forme (1). Discuter de son caractère (localement) lipschitzien suivant la valeur du paramètre m.

2. Que peut-on dire des cas $m = 0$ et $m = 1$?

3. Dans les autres cas, et en supposant la solution strictement positive sur l'intervalle J, identifier le changement de variable de la forme

$$u = y^p$$

qui permet de se ramener à une équation linéaire sur la variable u.

4. En déduire la forme de la solution générale de l'équation (3).

5. Exemples d'application

$$y' + y = -\frac{t}{y}, \quad ty' + y = y^2(\ln t)$$

4 Equations de Ricatti

On fixe $m \in \mathbb{Z}$. On considère ici une équation du type

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^2(t) = c(t) \tag{4}$$

1. Identifier la fonction f qui permet décrire cette équation sous la forme (1). Montrer qu'elle est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, si on connaît une solution exacte $\bar{y}$, la fonction $u = y - \bar{y}$ est solution d'une équation de Bernoulli. En déduire une méthode de calcul de la solution générale.
3. Exemples d'application

$$t^3 y' + t^2 y + y^2 + 2t^4 = 0, \quad y' + \frac{y}{t} - y^2 + \frac{1}{t^2} = 0$$

5 Dynamique des populations

On introduit trois modèles proposés en dynamique des populations

- Malthus (pasteur, ≈ 1800)

$$y'(t) = ry(t), \qquad r > 0$$

- Verhulst (mathématicien, ≈ 1840)

$$y'(t) = ry(t)\left(\frac{K - y(t)}{K}\right), \qquad r > 0, \qquad K > 0$$

- Allee (zoologiste, ≈ 1950)

$$y'(t) = ry(t)\left(\frac{K - y(t)}{K}\right)\left(\frac{y(t) - A}{A}\right), \qquad r > 0, \qquad K > A > 0$$

On demande

1. de montrer que les fonctions f associées aux trois modèles sont localement lipschitiziennes,
2. d'identifier les solutions stationnaires des modèles considérés,
3. d'analyser le comportement qualitatif des solutions en fonction de la donnée initiale et ainsi d'identifier le rôle des trois paramètres r, K et A,
4. de calculer la solution exacte des trois modèles.

6 Equations linéaires du second ordre à coefficients constants

On se donne une fonction $g(t)$ continue sur $\mathbb{R}$. On cherche la solution de l'équation

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t) \tag{5}$$

1. Etudier le cas homogène. Montrer que les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2.
2. Montrer que l'équation (5) peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1. Identifier alors la fonction f obtenue et montrer qu'elle est lipschitienne. Identifier la constante de Lipchitz.
3. Etudier ensuite la solution générale de l'équation (5) en appliquant la technique dite de "variation de la constante" au système d'ordre 1 obtenu.