MACS1 - S6 - Equations différentielles - TD3
Systèmes d'équations différentielles - Résolvante - Wronskien

1 Systèmes de deux équations

On considère un système d'équations différentielles linéaires, écrit sous forme matricielle

$$y'(t) = Ay(t)$$

Pour chacune des matrices suivantes, tracer le portrait de phase, puis calculer la résolvante e^{tA}.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2 Blocs de Jordan et systèmes de trois équations

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice M, leur multiplicité et les espaces propres correspondants.
2. On pose $E = ker(M - 2I)$. Montrer que

$$dim\, E = 1$$

   En déduire que M n'est pas diagonalisable.
3. Soit v_1 une base de E. Déterminier v_2 tel que

$$(M - 2I)v_2 = v_1$$

4. Montrer qu'on peut trouver v_3 tel que, dans la base (v_1, v_2, v_3), la matrice de l'application linéaire associée à M s'écrive

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. On pose $E_2 = ker((M - 2I)^2)$. Montrer que (v_1, v_2) forment une base de E_2. Montrer que J peut se décomposer sous la forme

$$J = D + N$$

   avec D diagonale et N nilpotente, telles que D et N commutent. Préciser l'ordre de N.
6. Calculer alors e^{Dt} et e^{Nt}. En déduire e^{Mt}
7. Calculer la solution du problème

$$X'(t) = MX(t), \quad X(1) = (1, 0, 0)^T$$

3 Equation différentielle d'ordre 2 et variation de la constante

Trouver les solutions générales des équations suivantes

$$(i)\ u'' + u = 1, \quad (ii)\ u'' + \pi^2 u = 1, \quad (iii)\ u'' + u = \cos x$$

4 Equations différentielles d'ordre 3 à coefficients constants

On considère l'équation différentielle ordinaire

$$y^{(3)} - 5y^{(2)} + 8y' - 4 = t^2$$

1. Résoudre l'équation homogène en calculant la matrice compagnon et son exponentielle.
2. Résoudre l'équation homogène en utilisant le théorème du cours.
3. Résoudre l'équation avec second membre.

5 Système à coefficients variables

On considère le système différentiel

$$Y'(t) = A(t)Y(t)$$

1. On s'intéresse d'abord au cas où la matrice A est donnée par

$$A(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ -\beta(t) & \alpha(t) \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que pour tout u et v, $A(u)$ et $A(v)$ commutent.
   (b) En déduire la résolvante du système en terme d'exponentielle de A.
   (c) Résoudre explicitement le problème.

2. On considère maintenant le cas où A est donnée par

$$A(t) = tA$$

   avec A une matrice constante. Répondre aux mêmes questions que précédemment.

3. On considère maintenant le cas où A est donnée par

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1/t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer

$$A(u)A(v) - A(v)A(u)$$

   (b) Calculer, pour $t_0 \neq 0$, la résolvante $C(t, t_0)$ ainsi que la quantité $\exp\left(\int_{t_0}^{t} A(u)du\right)$. Comparer les résultats.

6 Equation différentielle d'ordre 2 à coefficients variables

On considère l'équation différentielle

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

1. Rappeler la définition du wronskien de deux solutions
2. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par le wronskien ?
3. Montrer que si f et g sont deux solutions de l'équation homogène, alors l'équation différentielle s'écrit
$$\frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} f & g & y \\ f' & g' & y' \\ f'' & g'' & y'' \end{vmatrix}$$
4. On suppose connue une solution f de léquation. Poser $y = zf$ et trouver l'équation différentielle dont z' est solution.
5. **Premier exemple :**
On considère l'équation
$$x^2y'' + 4xy' + 2y = ln(x)$$
   (a) Montrer que $f(x) = 1/x^2$ est solution.
   (b) Trouver une autre solution en utilisant la méthode de la quesiton précédente.
   (c) En déduire la solution générale de l'équation.
   (d) Résoudre l'équation en utilisant le changement de variable $x = e^t$.
6. **Deuxième exemple :**
On considère l'équation
$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$
   (a) Chercher une solution polynomiale.
   (b) Appliquer la méthode du wronskien.

   On définit l'opérateur
$$L(y) = -\frac{d}{dx}\big((1 - x^2)\frac{dy}{dx}\big)$$
   Alors y est fonction propre de cet opérateur associé à la valeur propre 2 : c'est l'un des polynômes de Legendre.

7 Solutions locales, maximales, globales

1. `http://webusers.imj-prg.fr/~dario.cordero/Docs/LM336/13_14/LM336_2014_td4.pdf` En prenant en compte la gravité et la résistance de l'air, la chute d'un objet peut se modéliser par l'équation différentielle suivante
$$mh'' = -mg + \alpha(h'(t))^2.$$
   (a) Indiquer les données de Cauchy pour un objet lâché au temps $t = 0$ d'une hauteur H avec une vitesse nulle.
   (b) Justifier que le problème admet une solution locale unique.

(c) Soit h la solution maximale définie sur un intervalle $[0, T)$ où $T \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer (sans la calculer) que

   i. la vitesse $v = h'$ est croissante et bornée,

   ii. $T = +\infty$ et h est une solution globale.

(d) Calculer la solution et vérifier les assertions précédentes.

2. Pour chacune des équations différentielles suivantes, indiquer si un théorème de Cauchy Lipschitz s'applique, et discuter les solutions locales, maximales, globales suivant la condition initiale

$$(i)\ y' = ty, \quad (ii)\ ty' = y, \quad (iii)\ y' = y^2, \quad (iv)\ y' = \sqrt{|y|}.$$

3. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $f(x) \cdot x \leq 0$. Montrer que pour tout t_0 dans $\mathbb{R}$, pour tout x_0 dans $\mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy

$$x't() = v(x(t)), \qquad x(t_0) = x_0$$

a une unique solution globale.

8 Résolution par série de Taylor

Soit le problème de Cauchy

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Ecrire la série de Taylor de y dans un voisinage de 0. Trouver son rayon de convergence et sa somme. En déduire une solution maximale de l'équation.