MACS1 - S6 - Equations différentielles - TD4
Méthodes numériques - Stabilité, Consistance, Ordre

Dans tous les exercices, on considère le problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

où f est une fonction continue de sa première variable et lipschitzienne pour sa deuxième variable, de constante de Lipschitz Λ.

1 Méthode des trapèzes et RK2

On cherche ici à calculer des solutions approchées du problème (1). Pour cela, on va étudier les deux méthodes numériques suivantes

- Méthode des trapèzes

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_{n+1})\right), \quad t_{n+1} = t_n + h \tag{2}$$

- Schéma RK2 - Euler amélioré

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))\right) \tag{3}$$

Pour les deux méthodes, on demande

1. de dire si la méthode est explicite ou implicite,
2. d'écrire la méthode sous la forme générale d'une méthode à un pas

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h),$$

3. d'étudier la stabilité de la méthode,
4. d'étudier la consistance et l'ordre de la méthode,
5. dans le cas particulier où f est donnée par

$$f(t, y) = -\lambda y, \quad \lambda > 0 \tag{4}$$

   (a) de donner la solution exacte du problème, puis de vérifier qu'elle est positive et décroissante,
   (b) d'étudier la décroissance (en valeur absolue) et la positivité des deux solutions numériques proposées.

2 Schémas de type Runge-Kutta

2.1 Schémas RK2

On considère la forme générale suivante pour des schémas explicites de type Runge-Kutta utilisant l'évaluation de la solution en deux points

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\alpha f(t_n, y_n) + \beta f(t_n + \gamma h, y_n + \gamma h f(t_n, y_n))\right), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0$$

Montrer que

- le schéma est stable pour toute valeur des paramètres
- la consistance du schéma impose une relation sur les paramètres α et β,
- le fait d'être d'ordre 2 impose une relation sur les paramètres β et γ,
- les schémas proposés forment une famille à un paramètre $\alpha \in [0, 1/2]$. Préciser les intervalles dans lesquels doivent être pris les deux autres paramètres. Identifier le choix qui permet de retrouver les schémas d'Euler modifiés et améliorés.

2.2 Schémas RK4

Le schéma RK4 classique sécrit à l'aide de l'évaluation de la solution en quatre points

$$\begin{aligned}
y_{n,1} &= y_n, \\
y_{n,2} &= y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_{n,1}), \\
y_{n,3} &= y_n + \frac{h}{2} f(t_n + \frac{h}{2}, y_{n,2}), \\
y_{n,4} &= y_n + h f(t_n + \frac{h}{2}, y_{n,3}),
\end{aligned}$$

par la formule de mise à jour

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(f(t_n, y_{n,1}) + 2f(t_n + \frac{h}{2}, y_{n,2}) + 2f(t_n + \frac{h}{2}, y_{n,3}) + f(t_n + h, y_{n,4})\right)$$

1. Montrer que ce schéma est consistant.
2. Dans le cas particulier où f est donnée par la relation (4),
   - Montrer que le schéma est d'ordre 4,
   - Etudier la décroissance (en valeur absolue) et la positivité de la solution numérique.
3. Dans le cas général, rappeler la formule d'intégration numérique dite de Simpson et son degré d'approximation. Faire le lien avec le schéma proposé et expliquer pourquoi cela peut laisser penser que le schéma peut être d'ordre 4.
4. Montrer que le schéma est bien d'ordre 4 (question très calculatoire...).

3 Schémas basés sur les développements de Taylor

3.1 Construction d'un schéma d'ordre p

On introduit les fonctions $f^{(k)}(t,y)$ définies par récurrence

$$f^{(k)}(t,y) = f(t,y), \qquad f^{(k+1)}(t,y) = \partial_t f^{(k)}(t,y) + f(t,y)\partial_y f^{(k)}(t,y)$$

Montrer que le développement de Taylor de la fonction y solution de (1) s'écrit alors

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \sum_{k=1}^{p} \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(t_n, y(t_n)) + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

On introduit la forme générale d'un schéma à un pas

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$$

En utilisant un développement de Taylor sur la troisième variable de la fonction Φ au voisinage de 0, retrouver la condition vue en cours sur l'ordre d'un schéma à un pas

$$\forall k < p \quad \partial_h^k \Phi(t,y,0) = \frac{1}{k+1} f^{(k)}(t,y)$$

On propose alors le schéma numérique suivant

$$y_{n+1} = y_n + hF(t_n, y_n, h), \qquad F(t,y,h) = \sum_{k=1}^{p} \frac{h^{k-1}}{k!} f^{(k-1)}(t,y)$$

Déduire de ce qui précède qu'il est d'ordre p. Identifier le schéma obtenu pour le choix $p = 1$.

3.2 Amélioration de la méthode

Le calcul explicite des fonctions $f^{(k)}$ mène souvent en pratique à des expressions compliquées dès que k augmente. L'idée de cette partie est donc de construire un schéma n'utilisant que la fonction $f^{(1)}$ mais qui soit d'ordre plus grand que 2. On suppose dans la suite que la fonction $f^{(1)}$ est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, de constante de Lipschitz $\tilde{\Lambda}$. On propose le schéma numérique suivant, de paramètres α et β

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\left((1+\alpha) f(t_n+h, y_{n+1}) + (1-\alpha) f(t_n, y_n)\right) \\ &\qquad -\frac{h^2}{4}\left((\beta+\alpha) f^{(1)}(t_n+h, y_{n+1}) + (\beta-\alpha) f^{(1)}(t_n, y_n)\right) \end{aligned} \tag{5}$$

1. Montrer que le schéma proposé est implicite. Proposer une méthode itérative permettant le calcul de la solution y_{n+1} de l'équation (5). Donner une condition sur le pas h qui assure la convergence de la méthode.
2. Montrer que le schéma proposé est stable.
3. Montrer que le schéma proposé est d'ordre 2.
4. Montrer qu'un choix particulier du paramètre β conduit à une méthode d'ordre 3.
5. Montrer qu'un choix particulier des paramètres α et β conduit à une méthode d'ordre 4.