MACS1 - S6 - Equations différentielles - TD5
Méthodes numériques - Méthode à un pas vs Méthodes multipas

Dans tous les exercices, on considère le problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

où f est une fonction continue de sa première variable et lipschitzienne pour sa deuxième variable, de constante de Lipschitz Λ.

1 Variations autour de la méthode du point milieu

On propose les trois schémas numériques suivants

- Méthode du point milieu

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(t_n, y_n), \quad t_{k+1} = t_k + h \tag{2}$$

- Méthode RK2 - Euler modifié

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+1/2}), \quad y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n), \quad t_{n+1} = t_n + h \tag{3}$$

- Méthode du point milieu modifiée

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+1/2}), \quad y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2}f(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+1/2}), \quad t_{n+1} = t_n + h \tag{4}$$

Pour les trois méthodes, on demande

1. de dire si la méthode est à un pas ou multipas;
2. de dire si la méthode est explicite ou implicite,
3. d'étudier la consistance et l'ordre de la méthode,
4. d'étudier l'absolue stabilité des schémas, i.e. la stabilité en valeur absolue sur le cas linéaire

$$f(t, y) = -\lambda y, \qquad \lambda > 0$$

2 Méthode BDF

On rappelle la forme générale des méthodes multipas

$$\sum_{j=0}^{q} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{q} \beta_j f(t_{n+j}, y_{n+j}) \tag{5}$$

Le schéma est d'ordre p si

$$\forall 0 \leq k \leq p, \qquad \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{k!} j^k \alpha_j - \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{(k-1)!} j^{k-1} \beta_j = 0$$

et il est dit $0-$stable si les racines du polynôme de coefficient α_j sont toutes dans le disque unité, les racines de module égal à 1 étant simples. Un autre point important est l'étude de l'absolue stabilité des schémas, déjà abordée dans l'exercice précédent.

1. Rappeler, sans notes de cours, les choix menant aux schémas d'Adam-Bashforth et Adams-Moulton et les caractéristiques de ces méthodes. Rappeler les schémas de ce type d'ordre 1 et 2 et leur critère d'absolue stabilité.
2. On s'intéresse ici à un autre type de méthode multipas, les méthodes dites BDF (Backward Differentiation Formula). Ces méthodes correspondent au choix

$$\alpha_p = 1, \qquad \beta_j = \delta_{jp}$$

   - En utilisant les critères de consistance, écrire une méthode BDF d'ordre 1 et identifier le schéma obtenu.
   - Ecrire ensuite une méthode BDF d'ordre 2. Analyser son absolue stabilité.

3 Systèmes de deux équations

3.1 Etude d'un schéma

On considère le système suivant pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{cases} y'(x) = z(x)^2 \\ z'(x) = \sin\sqrt{1 + y(x)^2} \end{cases} \tag{6}$$

1. Ecrire le schéma d'Euler explicite pour ce système.
2. Ecrire un schéma explicite utilisant un développement de Taylor à l'ordre 2.
3. On propose le schéma

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hz_n^2 + h^2 z_n \sin\sqrt{1 + y_n^2} \\ z'(x) = z_n + h\sin\sqrt{1 + y_n^2 + hy_n z_n^2} \end{cases} \tag{7}$$

   Etudier son ordre.

3.2 Etude d'un système

On considère le système suivant pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{cases} x_1'(t) = [a - 2x_1(t) - x_2(t)]x_1(t) \\ x_2'(t) = [b - x_1(t) - 2x_2(t)]x_2(t) \end{cases} \tag{8}$$

avec les conditions initiales

$$x_1(0) = x_{1,0},\ x_2(0) = x_{2,0}.$$

On suppose que a, b, $x_{1,0}$ et $x_{2,0}$ sont des réels strictement positifs fixés.

1. Montrer que ce système admet une unique solution maximale (x_1, x_2) et que cette solution satisfait $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ sur son intervalle de définition.
2. Montrer que cette solution maximale est bornée sur son intervalle de définition.
3. Montrer que c'est en fait une solution globale sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les points d'équilibre associés au système.
5. On prend $a = 2$ et $b = 1$. Déterminer si les points d'équilibre sont stables, instables ou incertains.
6. Ecrire le schéma d'Euler explicite pour ce système et étudier la positivité des solutions.