Une interprétation de l'homologie de Leibniz comme homologie de foncteurs

Eric Hoffbeck (Université Paris 13)
travail commun avec Christine Vespa (Université de Strasbourg)

Expliquer

Théorème (Hoffbeck et Vespa)

$$H_*^{Leib}(A,M) = Tor_*^{\Gamma_{sh}^{Lie}}(t, \mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A,M))$$

où

- A algèbre de Lie
- M A-module
- H_*^{Leib} homologie de Leibniz
- Γ_{sh}^{Lie} catégorie (enrichie linéairement)
- t et $\mathcal{L}_{sh}^{Lie}$ foncteurs.

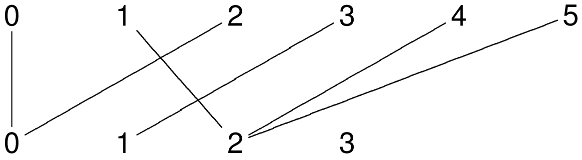
Index

Rappels

La catégorie Γ

Objets : $[n] = \{0, \ldots, n\}$ où $n \geq 0$ (avec 0 comme point base)
Morphismes : $\Gamma([n], [m])$ applications pointées.

Exemple :



Rappels

La catégorie Γ

Objets : $[n] = \{0, \ldots, n\}$ où $n \geq 0$ (avec 0 comme point base)
Morphismes : $\Gamma([n], [m])$ applications pointées.

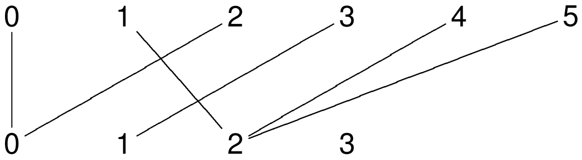
Le foncteur de Loday

Pour A une algèbre commutative unitaire et M un A-module,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A, M) : \quad & \Gamma \to \Bbbk\text{-Mod} \\ & [n] \mapsto M \otimes A^{\otimes n} \\ f : [n] \to [m] & \mapsto f_* : M \otimes A^{\otimes n} \to M \otimes A^{\otimes m} \end{aligned}$$

Rappels

Exemple pour le morphisme $f \in \Gamma([5],[3])$ décrit par



$$f_*(a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4 \otimes a_5) = b_0 \otimes b_1 \otimes b_2 \otimes b_3$$

où

- $b_0 = a_0 . a_2$
- $b_1 = a_3$
- $b_2 = a_1 a_4 a_5$
- $b_3 = 1$

$$b_i = \prod_{j \in f^{-1}(i)} a_j$$

Rappels

Théorème (Pirashvili, Richter, Robinson, Whitehouse)

Pour A une algèbre unitaire commutative et M un A-module,

$$H_*^{Harr}(A, M) = Tor_*^{\Gamma}(t, \mathcal{L}(A, M)) \quad \text{sur un corps } \Bbbk \text{ de carac. } 0$$

$$H_*^{E_\infty}(A, M) = Tor_*^{\Gamma}(t, \mathcal{L}(A, M)) \qquad \text{dans le cas général.}$$

Résultats similaires pour la E_n-homologie (Livernet, Richter) d'algèbres commutatives et l'homologie de Hochschild d'algèbres associatives.

Motivations

Question naturelle

Peut-on trouver un théorème similaire dans d'autre contextes ?
Par exemple pour les algèbres sur une opérade ?

Premier cas à essayer : les algèbres de Lie.
Une différence est que l'opérade Lie n'est pas ensembliste, contrairement aux opérades As et Com.

Dernier rappel

Une algèbre de Lie A est un $\mathbb{k}$-module muni d'un crochet $[-,-]$ antisymétrique vérifiant $[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0$.

L'homologie de Leibniz d'une algèbre de Lie A à coefficients dans un A-module M est donnée par l'homologie du complexe

$$(C_n^{Leib}(A,M)=M\otimes A^{\otimes n},d)$$

où la différentielle est donnée par

$$d(a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n)=\sum_{1\leq i<j\leq n}\pm a_0\otimes a_1\otimes\ldots a_{i-1}\otimes[a_i,a_j]\otimes\ldots\otimes\widehat{a_j}\otimes\ldots\otimes a_n$$

$$+\sum_{1\leq j\leq n}\pm[a_0,a_j]\otimes a_1\otimes\ldots\otimes\widehat{a_j}\otimes\ldots\otimes a_n.$$

Index

Produit tensoriel de foncteurs

Pour $\mathcal{C}$ une catégorie
F un foncteur $\mathcal{C}^{op} \to \mathbb{k}$-Mod (appelé $\mathcal{C}$-module à droite)
G un foncteur $\mathcal{C} \to \mathbb{k}$-Mod (appelé $\mathcal{C}$-module à gauche)

Définition

$F \otimes_{\mathcal{C}} G$ est le $\mathbb{k}$-module défini par

$$F \otimes_{\mathcal{C}} G = \bigoplus_{c \in \mathcal{C}} F(c) \otimes_{\mathbb{k}} G(c) / \sim$$

où $x \otimes_{\mathbb{k}} G(f)(y) \sim F(f)(x) \otimes_{\mathbb{k}} y$ pour tout $f : c \to c'$, $x \in F(c')$ et $y \in G(c)$.

Proposition

Le produit tensoriel de foncteurs est exact à droite en les deux variables.

Foncteur Tor entre foncteurs

Il existe une notion de résolutions projectives pour les $\mathcal{C}$-modules.

Définition

$$Tor_*^{\mathcal{C}}(F, G) = H_*(P_\bullet \otimes_{\mathcal{C}} G)$$

où $P_\bullet$ est une résolution projective de F dans la catégorie des $\mathcal{C}$-modules à droite.

De plus, ces définitions se prolongent au cas où $\mathcal{C}$ est une catégorie enrichie linéairement.

Index

Où en est-on ?

Rappel de l'objectif :

Théorème (Hoffbeck et Vespa)

$$H_*^{Leib}(A, M) = Tor_*^{\Gamma_{sh}^{Lie}}(t, \mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A, M))$$

On veut définir

- la catégorie Γ_{sh}^{Lie}
- le foncteur $\mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A, M)$ (de Γ_{sh}^{Lie} vers $\mathbb{k}$-Mod).

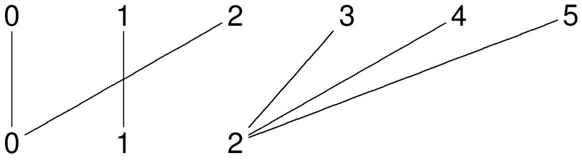
D'abord : définir une catégorie Γ_{sh}, similaire à Γ mais avec moins de symétries.

La catégorie Γ_{sh}

Définition: La catégorie Γ_{sh}

Objets : $[n] = \{0, \ldots, n\}$ pour $n \geq 0$ (pointés en 0)
Morphismes : $\Gamma_{sh}([n], [m])$ applications pointées surjectives shuffle, *ie.* α telles que $min(\alpha^{-1}(i)) < min(\alpha^{-1}(j))$ pour $i < j$.

Exemple d'un morphisme α dans $\Gamma_{sh}([5], [2])$:



Dans ce cas, $0 < 1 < 3$.

La catégorie enrichie Γ_{sh}^{P} pour une opérade symétrique

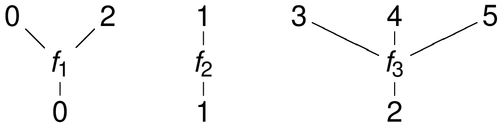
P opérade symétrique réduite dans $\mathbb{k}$-Mod (réduite signifie $P(0) = 0$)

Définition: la catégorie Γ_{sh}^{P} (Hoffbeck et Vespa)

Objets : $[n] = \{0, \ldots, n\}$ pour $n \geq 0$ (pointés en 0)

Morphismes : $\Gamma_{sh}^{\mathrm{P}}([n],[m]) = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_{sh}([n],[m])} \mathrm{P}(\alpha^{-1}(0)) \otimes \ldots \otimes \mathrm{P}(\alpha^{-1}(m))$.

Exemple de morphisme dans $\Gamma_{sh}^{P}([5],[2])$:

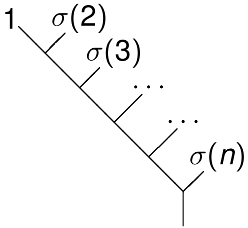


où $f_1 \in P(2)$, $f_2 \in P(1)$, $f_3 \in P(3)$.

La catégorie enrichie Γ_{sh}^{Lie}

But : expliciter la catégorie Γ_{sh}^{P} pour $P = Lie$.

Une base de l'opérade *Lie*, en arité *n*, est donnée par :

$\left\{\right.$


$\left| \; n \geq 1, \sigma \text{ permutation de } \{2, \dots, n\} \right\}$

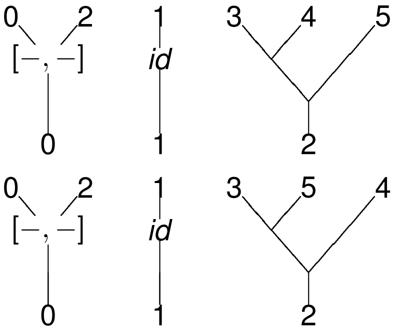
Note : Cette base correspond aux mots de Lie de la forme

$$[\dots[[x_1, x_{\sigma(2)}], x_{\sigma(3)}], \dots, x_{\sigma(n)}].$$

La catégorie enrichie Γ_{sh}^{Lie}

On obtient une base de $\Gamma_{sh}^{Lie}([n],[m])$ en décorant les forêts $\Gamma_{sh}([n],[m])$ par des éléments de la base de Lie.

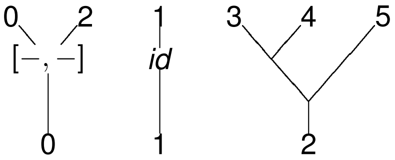
Dans l'exemple précédent, 2 éléments de la base sont associés à l'application shuffle α.



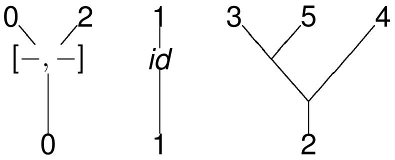
La catégorie enrichie Γ_{sh}^{Lie}

On obtient une base de $\Gamma_{sh}^{Lie}([n],[m])$ en décorant les forêts $\Gamma_{sh}([n],[m])$ par des éléments de la base de Lie.

Dans l'exemple précédent, 2 éléments de la base sont associés à l'application shuffle α.



$\longleftrightarrow \quad (0,2|1|3,4,5)$



$\longleftrightarrow \quad (0,2|1|3,5,4)$

Pour une algèbre de Lie A et un A-module M

Définition (Hoffbeck et Vespa)

Le foncteur $\mathcal{L}^{Lie}_{sh}(A, M) : \Gamma^{Lie}_{sh} \to \mathbb{k}$-Mod est défini sur les objets par

$$\mathcal{L}^{Lie}_{sh}(A, M)([n]) = M \otimes A^{\otimes n}$$

et pour un morphisme $f = (\alpha, f_0, \dots, f_m) \in \Gamma^{Lie}_{sh}([n], [m])$, la flèche induite $f_* : M \otimes A^{\otimes n} \to M \otimes A^{\otimes m}$ est donnée par

$$f_*(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = b_0 \otimes \dots \otimes b_m$$

où $b_i = \theta(f_i \otimes \bigotimes_{j \in \alpha^{-1}(i)} a_j)$ (θ est l'évaluation).

Index

Comment obtenir le théorème

Théorème (Hoffbeck et Vespa)

$$H_*^{Leib}(A, M) = Tor_*^{\Gamma_{sh}^{Lie}}(t, \mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A, M))$$

Définition : Homologie de Leibniz d'un foncteur $\Gamma_{sh}^{Lie} \to \mathbb{k}$-Mod

Le complexe $C_*^{Leib}(T)$ est $T([n])$ en degré n avec la différentielle $d : T([n]) \to T([n-1])$ définie par $T(\sum_{0\leq i<j\leq n} \pm d_{i,j})$.

Pour $T = \mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A, M)$, on retrouve la définition de $C_*^{Leib}(A, M)$.

Il reste à prouver $H_*^{Leib}(\mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A, M)) = Tor_*^{\Gamma_{sh}^{Lie}}(t, \mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A, M))$

Comment obtenir le théorème

On montre pour tout foncteur $T : \Gamma_{sh}^{Lie} \to \mathbb{k}\text{-Mod}$

$$H_*^{Leib}(T) = Tor_*^{\Gamma_{sh}^{Lie}}(t, T)$$

L'idée est d'utiliser

Caractérisation d'un foncteur homologique

Si H_* est un foncteur d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers $\mathbb{k}$-grMod tel que

- $H_0(F)$ est isomorphe à $G \otimes_{\mathcal{C}} F$ pour tout $F \in \mathcal{C}$-mod
- $H_*(-)$ envoie les suites exactes courtes de $\mathcal{C}$-modules sur des suites exactes longues
- $H_i(F) = 0$ pour tout projectif F et $i > 0$

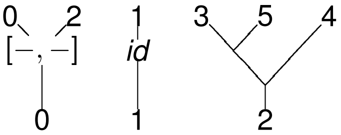
alors $H_i(F) = Tor_i^{\mathcal{C}}(G, F)$ pour tout F et tout i.

La preuve du 3e point se base sur une filtration du complexe $C_*^{Leib}(\Gamma_{sh}^{Lie}([n], -))$ (à n fixé).

Facile d'obtenir une filtration comme $\mathbb{k}$-module, indexée par des n-uplets.

Problème : montrer que cette filtration est compatible à la différentielle.

Base de $\Gamma^{Lie}_{sh}([n],[m])$ = forêts de $m+1$ arbres décorés par une base de *Lie*



$\longleftrightarrow (0,2|1|3,5,4)$

Un uplet découpé s'envoie sur un uplet en oubliant les barres

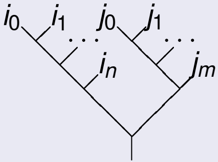
$$(0,2|1|3,5,4) \mapsto (0,2,1,3,5,4)$$

Les *n*-uplets peuvent être ordonnés lexicographiquement.

$\Rightarrow$ ordre partiel sur la base de $\bigoplus_m \Gamma^{Lie}_{sh}([n],[m])$

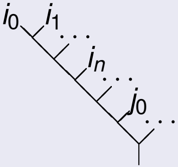
$\Rightarrow$ une filtration (comme $\mathbb{k}$-module) indexé par des *n*-uplets du complexe $C^{Leib}_*(\Gamma^{Lie}_{sh}([n],-))$.

Proposition

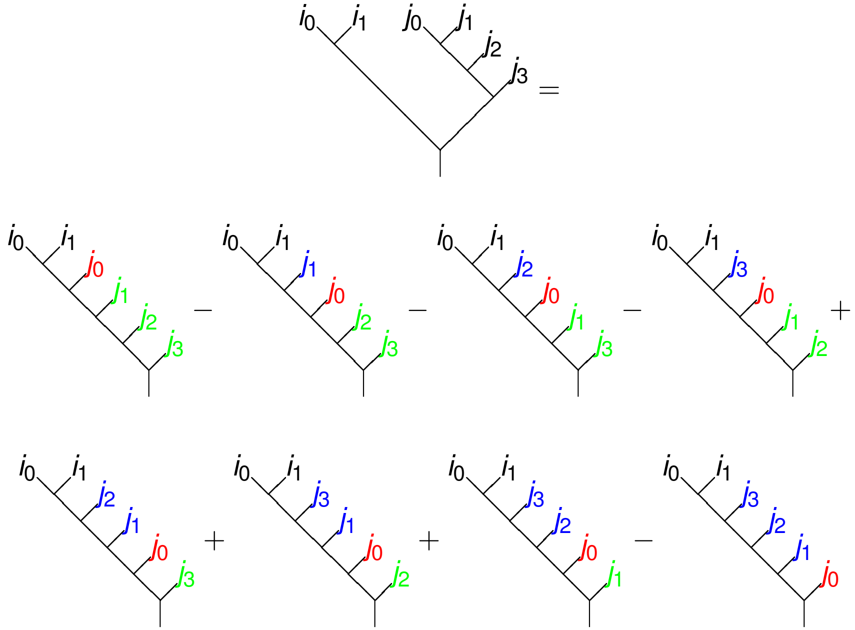


se décompose dans la base comme :

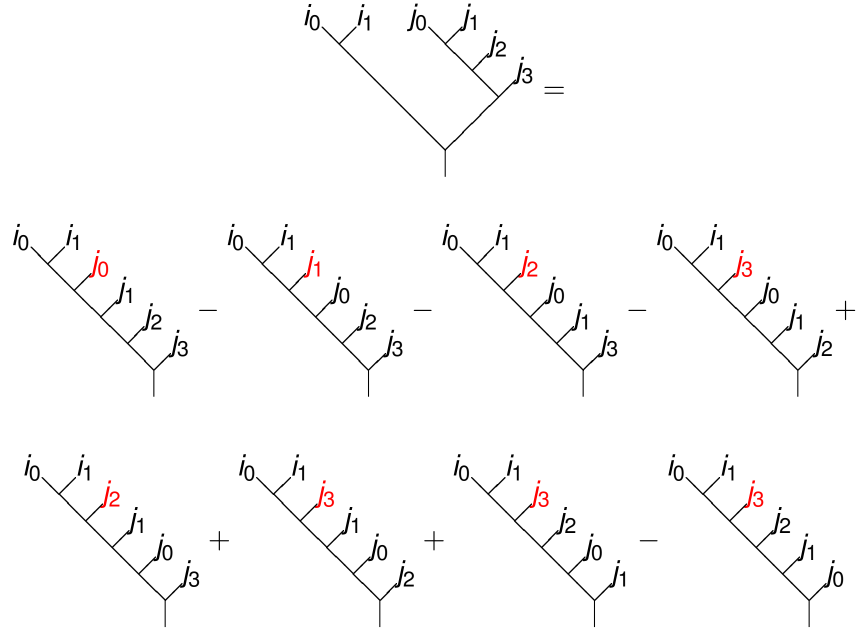
$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{S\subset\{1,\dots,m\},|S|=k} (-1)^k$$



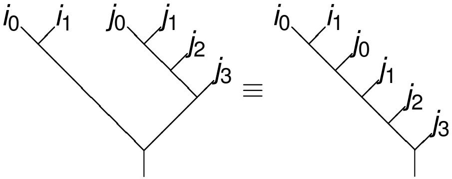
où:
- les entrées de i_0 à i_n sont dans le même ordre qu'avant,
- j_0 est en $(n+2+k)$-ème position,
- les entrées entre i_n et j_0 sont les j_ℓ où $\ell \in S$
- les entrées sous j_0 sont les j_ℓ où $\ell \notin S$.



i0 i1 j0 j1 j2 j3 =
i0 i1 j0 j1 j2 j3 − i0 i1 j1 j0 j2 j3 − i0 i1 j2 j0 j1 j3 − i0 i1 j3 j0 j1 j2 +
i0 i1 j2 j1 j0 j3 + i0 i1 j3 j1 j0 j2 + i0 i1 j3 j2 j0 j1 − i0 i1 j3 j2 j1 j0


i0 i1 j0 j1 j2 j3 =
i0 i1 j0 j1 j2 j3 −
i0 i1 j1 j0 j2 j3 −
i0 i1 j2 j0 j1 j3 −
i0 i1 j3 j0 j1 j2 +
i0 i1 j2 j1 j0 j3 +
i0 i1 j3 j1 j0 j2 +
i0 i1 j3 j2 j0 j1 −
i0 i1 j3 j2 j1 j0

On obtient dans le complexe gradué associé



C'est-à-dire $(d_{0,1})_*(i_0, i_1 | j_0, j_1, j_2, j_3) \equiv (i_0, i_1, j_0, j_1, j_2, j_3)$.

Proposition

Dans le complexe gradué associé, la différentielle $d = \sum \pm (d_{i,j})_*$ enlève les barres verticales.

$$d(0,2|1|3,5,4) = (0,2,1|3,5,4) \pm (0,2|1,3,5,4)$$

Proposition

Le complexe gradué associé se scinde en une somme de complexes acycliques standards.

Corollaire

Le complexe $C_*^{Leib}(\Gamma_{sh}^{Lie}([n], -))$ est acyclique.

Ceci conclut la preuve de

Théorème (Hoffbeck et Vespa)

$$H_*^{Leib}(A, M) = Tor_*^{\Gamma_{sh}^{Lie}}(t, \mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A, M))$$