MACS-L3MIM 8 avril 2016
Algèbre

Partiel 2 : Durée 3 heures,
seule une feuille A4 recto manuscrite est autorisée

Exercice 1. (vu en cours ou en TD)

1. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.
2. Soit G le sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ engendré par la multiplication par i. Ce groupe agit sur l'ensemble $\mathbb{C}$.
Donner la décomposition de $\mathbb{C}$ en orbites sous l'action de G et calculer le stabilisateur de chaque élément. Faire un dessin.
3. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X, et soit x dans X. Démontrer que l'application $\phi : G/G_x \to G.x$ définie par $\phi(gG_x) = g.x$ est bien définie et est bijective.

Corrigé : cf cours et TD

Exercice 2. Considérez la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \Sigma_8$.

(a) Donner une décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

(b) Quel est le support de σ?

(c) Calculer l'ordre et la signature de σ.

(d) L'élément $\rho = (1835)(264) \in \Sigma_8$ est-il conjugué à σ ? Si oui, donner τ avec $\sigma = \tau\rho\tau^{-1}$.

(e) Combien y a-t-il d'éléments de Σ_8 conjugués à σ ?

Corrigé :
(a) (1583)(247)(6), qu'on peut aussi écrire (1583)(247)
(b) Tout sauf 6
(c) L'ordre est 12=ppcm(4,3). La signature vaut -1.
(d) Oui, via $\tau = (385)(647)$.
(e) Un élément est conjugé à sigma si et seulement si il a comme décomposition en cycles à supports disjoints un 4-cycle et un 3-cycle. Il y a 2560 éléments de cette forme. (par exemple, 8*7*6*5/4 4-cycles possibles, puis 4*3*2/3 3-cycles possibles, d'où 420*8).

Exercice 3. Soit G un groupe abélien, $e \in G$ son élément neutre, et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$. On pose

$$K = \{x \in G \mid x^n = e\} \text{ et } H = \{g \in G \mid \text{il existe } x \in G \text{ tel que } g = x^n\}.$$

(a) Montrer que H et K sont des sous-groupes de G, et que K est distingué.

(b) Montrer qu'il existe un isomorphisme $G/K \to H$.

Indication: Considérer l'application $f : G \to G$ définie par $f(x) = x^n$. *Corrigé* :
(a) On vérifie sans difficulté les conditions de la définition (ou caractérisation) d'un sous-groupe. K est distingué dans G car G est abélien.
(b) On vérifie que f est un morphisme, on remarque que $\operatorname{Ker} g = K$ et $\operatorname{Im} f = H$. On applique alors le théorème d'isomorphisme qui donne exactement le résultat cherché.

Exercice 4. On considère les sous-groupes suivants de $(GL_2(\mathbb{R}), \times, Id)$:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Montrer que H n'est pas abélien.
2. Montrer que T est distingué dans H.
3. Montrer que le groupe T est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +, 0)$.
4. Montrer que le quotient H/T est un groupe abélien.

Corrigé :
1. On calcule SUR UN EXEMPLE le produit de deux matrices qui ne commutent pas. Il ne suffit pas de faire le calcul dans le cas général et de dire (qui plus est sans quantificateur) que le coefficient en bas à gauche est différent.
2. On calcule xtx^{-1} et on vérifie que cet élément est encore dans T.
3. On vérifie que l'application envoyant u sur la matrice avec u en bas à gauche est un morphisme de groupes. Ce morphisme est clairement injectif et surjectif.
4. Ici, il faut travailler un peu. Par exemple :
Comme H est distingué dans T on a H/T est un groupe. Par ailleurs prenons $\overline{h}$ et $\overline{h'}$ deux éléments de H/T. Montrons que $\overline{hh'h^{-1}h'^{-1}} = \overline{Id}$ ce qui est équivalent à montrer que $hh'h^{-1}h'^{-1} \in T$.
Calculons hh':

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ a'b + cb' & cc' \end{pmatrix}$$

De même

$$h'h = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ab' + bc' & cc' \end{pmatrix}$$

Donc

$$(h'h)^{-1} = \frac{1}{aa'cc'} \begin{pmatrix} cc' & 0 \\ -ab' - bc' & aa' \end{pmatrix}$$

Donc

$$hh'h^{-1}h'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

Pour un certain $\beta \in \mathbb{R}$, donc cet élément se trouve dans T.

Exercice 5. On se fixe p un nombre entier premier, n un entier vérifiant $n \geq 1$ et A un ensemble à n éléments. L'ensemble $A^{\times p}$ est l'ensemble des p-uplets de A; un élément de cet ensemble sera noté $(a_0, \dots, , a_{p-1})$.
On rappelle que le groupe abélien $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ des classes modulo p contient p éléments que l'on note $\overline{k}$ pour $0 \leq k \leq p-1$.
Pour $u \in \mathbb{Z}$, on note $r(u)$ le reste de la division euclidienne de u par p. En particulier, on a $\overline{u} = \overline{r(u)}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
On admettra que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times A^{\times p} & \to & A^{\times p} \\ & (\overline{k}, (a_0, \dots, a_{p-1})) & \mapsto & (a_{r(0+k)}, \dots, a_{r(p-1+k)}) \end{array}$$

est bien définie et est une action de groupes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble $A^{\times p}$.

1. Dans le cas particulier $A = \{\alpha, \beta\}$ et $p = 3$, donner explicitement les orbites de l'action.
2. Calculer $\varphi(\overline{1}, (a_0, \dots, a_{p-1}))$.
3. Montrer que l'ensemble des points fixes pour cette action est le sous-ensemble de $A^{\times p}$ constitué des éléments de la forme $(\underbrace{a, \dots, a}_{p \text{ fois}})$ pour $a \in A$.
4. En vous aidant de la formule des classes, déduire de la question précédente que n^p est congru à n modulo p.
5. Le résultat est-il encore vrai si p n'est pas premier ?

Corrigé : 1. (α, α, α) est une orbite à lui tout seul, de même pour (β, β, β). L'ensemble $\{(\beta, \alpha, \alpha), (\alpha, \beta, \alpha), (\beta, \alpha, \alpha)\}$ est une orbite. L'ensemble $\{(\beta, \beta, \alpha), (\alpha, \beta, \beta), (\beta, \alpha, \beta)\}$ est l'autre orbite.
2. $\varphi(\overline{1}, (a_0, \dots, a_{p-1})) = (a_1, , a_2, \dots, a_{p-1}, a_0))$.
3. Soit F l'ensemble des points fixes de $A^{\times p}$ sous cette action, et G l'ensemble des éléments de la forme $(\underbrace{a, a, \dots, a}_{p \text{ fois}})$ pour $a \in A$. . On a clairement que pour $x = (a, \dots, a)$ $\varphi(\overline{k}, x) = (a, \dots, a)$, pour tout k donc $G \subset F$.
Soit $(a_0, \dots, a_{p-1})$ un point fixe pour l'action. Pour tout k on doit avoir $a_{r(k)} = a_0$ donc comme k peut varier de 0 à $p-1$ on en déduit que $a_i = a_0$ pour tout i donc que $(a_0, \dots, a_{p-1}) = (a_0, \dots, a_0)$, conclusion $F \subset G$.
4. La formule des classes donne:

$$Card(A^{\times p}) = Card(F) + \sum_{i \in I} Card G \cdot x_i.$$

où I indexe l'ensemble des orbites a plus de deux éléments. Par ailleurs comme $G \cdot x_i$ est en bijection avec G/G_{x_i} et que $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ Les sous groupes de G sont soit d'ordre 1 soit d'ordre p. Nécéssairement, pour $i \in I$ on a $|G_{x_i}| = 1$.
Donc la formule des classes s'écrit

$$n^p = n + pCard(I).$$

Ce qui donne $n^p \equiv n[p]$.
5. Non, pour $p = 4$ et $n = 2$, $n^p = 16$ n'est pas congru à 2 modulo 4.