1 Rappels de dénombrement et de combinatoire

Proposition 1.1 – *Soient E et F deux ensembles finis.*

- *L'ensemble $E \cup F$ est fini et* $\mathrm{card}(E \cup F) = \mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F) - \mathrm{card}(E \cap F)$.
- *L'ensemble $E \times F$ est fini et* $\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E) \cdot \mathrm{card}(F)$.

Démonstration :

- On commence par comprendre la formule avec un dessin. Pour la preuve rigoureuse, on suppose d'abord E et F non vides (la formule est vraie si l'un est vide) et disjoints. Dans ce cas, à partir des bijections de $[\![1, \mathrm{card}E]\!]$ vers E et de $[\![1, \mathrm{card}F]\!]$ vers F, on peut construire une bijection de $[\![1, \mathrm{card}E + \mathrm{card}F]\!]$ vers $E \cup F$. Ceci prouve la formule dans le cas où E et F sont disjoints. Pour $E \cap F$ non vide, on décompose $E \cup F$ en $(E \setminus (E \cap F)) \cup (E \cap F) \cup (F \setminus (E \cap F))$. Cette décomposition de $E \cup F$ est constituée de trois ensembles disjoints ; on peut donc utiliser la formule dans ce cas, et prouver le cas général.
- On remarque que $E \times F$ est l'union pour $x \in F$ de $E \times \{x\}$, qui sont finis disjoints et chacun de cardinal E. Cette union est composée de $\mathrm{card}(F)$ termes.

Proposition 1.2 *Soit E un ensemble de cardinal n et F de cardinal p. Alors le nombre d'applications de E dans F est p^n.*

Démonstration : Une application est exactement déterminée par le choix des n images, et chaque image a p possibilités. ■

Remarque 1.3 – Ceci est vrai aussi pour $n = 0$. Ceci permet de justifier la convention $0^0 = 1$ (il y a une unique application $\emptyset \to \emptyset$, de graphe vide).

Proposition 1.4 – *Soit E un ensemble de cardinal n. L'ensemble des parties de E est fini et de cardinal 2^n.*

Démonstration : Pour chaque élément de E, il y a deux possibilités : être ou ne pas être dans un sous-ensemble A. ■

Définition 1.5 – *Soit E et F deux ensembles finis, de cardinaux respectifs p et n. On appelle arrangement de p objets pris parmi n toute injection de E dans F. On note A_n^p le nombre de ces injections.*

Proposition 1.6 – *Si $p \leq n$, alors* $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\dots(n-p+1)$.
Si $p > n$, alors $A_n^p = 0$.

Démonstration : On peut supposer que E est l'ensemble $\{1, \dots, p\}$. Choisir une injection de E dans F revient à choisir un premier élément dans F, puis un second (différent du premier), puis un troisième (différents des deux premiers), etc, jusqu'à un p-ième, en retenant dans quel ordre les éléments ont été choisis.

Pour $p > n$, il est impossible de trouver une telle injection, car au moins un élément de F aurait deux antécédents.

Pour $p \leq n$, on a n choix pour l'image de 1, puis $n-1$ choix pour l'image de 2, etc, et $n-p+1$ choix pour l'image de p. Ceci il y a donc $n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$ injections de E dans F. Or ce nombre est aussi égal à $\frac{n!}{(n-p)!}$. ■

Exemple 1.7 – Pour une course avec 8 coureurs, il y a $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ podiums possibles (sans ex-aequo possible). La donnée d'un podium est la même donnée que celle d'une injection de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ dans l'ensemble $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ des coureurs (appelés A,B,C,D,E,F,G,H pour simplifier). Le gagnant est l'image de 1 par l'injection, le deuxième est l'image de 2, le troisième est l'image de 3. Le fait d'avoir une injection assure bien qu'un même coureur ne peut pas être à la fois premier et deuxième par exemple.

Définition 1.8 – *On appelle une permutation d'un ensemble E une bijection de E dans E.*

Proposition 1.9 – *Si E est un ensemble fini à n éléments, il y a $n!$ permutations de E.*

Démonstration : Comme E est un ensemble fini, une application de E dans E est bijective si et seulement si elle est injective. Il y a donc autant de bijections de E dans E que d'injections de E dans E. Ce nombre est $A_n^n = n!$. ∎

Exemple 1.10 – Combien y a-t-il de mots différents composés avec les lettres A,B,C,D,E si on impose que chaque lettre est utilisée exactement une fois ? On peut faire par exemple ABCDE, mais aussi ACDBE, ou AECBD, etc. Chaque mot correspond à une permutation des lettres A,B,C,D,E. Il y a donc $5! = 120$ mots possibles. On peut aussi voir un mot comme une bijection de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dans l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$. Le nombre de permutations d'un ensemble fini est aussi le nombre de façons de choisir un ordre parmi les éléments de cet ensemble.

Remarque 1.11 – Compter les surjections est beaucoup plus compliqué, il n'y a pas de formule simple.

Définition 1.12 – *Une combinaison de p objets pris parmi n est un sous-ensemble à p éléments d'un ensemble à n éléments. On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n. On appelle ces nombres les* coefficients binômiaux*.*

Remarque 1.13 – Contrairement à l'arrangement, l'ordre n'est pas important.
Dans certains livres, on peut trouver la notation C_n^p au lieu de la notation $\binom{n}{p}$.

Proposition 1.14 – *Si $p \leq n$, alors $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.*
Si $p > n$, alors $\binom{n}{p} = 0$.

Démonstration : Dans le cas $p > n$, la définition donne directement le résultat.
Dans le cas $p \leq n$, on peut compter le nombre de listes ordonnés de p éléments différents dans un ensemble E à n éléments. Se donner une telle liste revient à se donner une injection de $[\![1, p]\!]$ dans E. Il y a donc $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ listes ordonnés de p éléments. Une autre façon de se donner une telle liste revient à se donner un sous-ensemble à p éléments, puis à choisir un ordre parmi ces p éléments. On a vu dans la proposition 1.9 qu'il y a $p!$ ordres possibles. Le nombre de listes est donc aussi égal à $\binom{n}{p}p!$. On obtient $\dfrac{n!}{(n-p)!} = \binom{n}{p}p!$, ce qui donne la formule cherchée. ∎

Exemple 1.15 – Pour une course avec dix chevaux, il y a $\binom{10}{3}$ tiercés possibles dans le désordre.

Proposition 1.16 *1. (Symétrie) Si* $0 \leq p \leq n$, *alors* $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

2. (Formule de Pascal) $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$.

3. (Binôme de Newton)

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration : 1. La symétrie se déduit directement de la proposition précédente (ou alors on peut dire que choisir p éléments revient à choisir les $n-$ qu'on ne prend pas).
2. La formule de Pascal se prouve en faisant un petit calcul de sommes de fractions, à faire en exercice (ou alors on peut dire que choisir $n+1$ éléments dans E se fait de deux façons : prendre le premier élément de E, puis n autres ; ou prendre $n+1$ éléments qui ne sont pas le premier).
3. Il existe deux façons de prouver la formule du binôme. On peut faire une récurrence sur n (il faut alors utiliser la formule de Pascal pour le passage du rang n au rang $n+1$). On peut sinon utiliser une méthode de dénombrement. On écrit $(a+b)^n$ sous la forme du produit $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$. Le coefficient de $a^k b^{n-k}$ est exactement le nombre de fois dans le développement de ce produit où on choisit k fois le nombre a dans les parenthèses et $n-k$ fois le nombre b. Ce coefficient est donc le nombre de choix possibles de k éléments parmi n. Or ce nombre de choix est par définition $\binom{n}{k}$. ■

Exercice 1.17 – Développer $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, $(a+b)^4$, $(a-b)^4$, $(a+b)^5$, en utilisant la formule de Pascal pour calculer explicitement les coefficients.

Exercice 1.18 – Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Ecrire le développement de $(1+x)^n$ pour x un réel.
Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

Exercice 1.19 – Soit n dans $\mathbb{N}^*$. En écrivant de deux façons différentes la dérivée de l'application $x \mapsto (1+x)^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

Exercice 1.20 *Utiliser la place restante ci-dessous pour écrire les premières lignes du triangle de Pascal.*