Correction exo 3

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$ $\qquad C^\infty$ car polynomiale.

1. Les points critiques sont les $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$.
On calcule donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y + 2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y + 3$$

On résout le système $\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0. \end{cases}$
On trouve que le couple $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$ est l'unique solution.

$\boxed{\text{Il y a donc un unique point critique de coordonnées } (-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})}$

2. On calcule les dérivées partielles secondes au point $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$
(Rem : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont en fait ici des applications constantes).
La matrice hessienne vaut $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, dont le déterminant vaut $4-1=3>0$.
Le point critique est donc un minimum ou maximum local.
En utilisant de plus que les termes diagonaux sont positifs, on obtient que c'est un minimum.
(Rem : ce minimum est en fait global, mais on ne peut pas le voir directement).

3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On effectue une réduction de Gauss (avec termes linéaires).

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y = \left(x + \frac{1}{2}y + 1\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 - 1 - y + y^2 + 3y$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}y + 1\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y^2 + \frac{8}{3}y\right) - 1$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}y + 1\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} - 1$$

$$\boxed{f(x,y) = \left(x + \frac{1}{2}y + 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{7}{3}}$$

Rem : on trouve ici que le minimum est global, valant $-\frac{7}{3}$, obtenu en $y_0 = -\frac{4}{3}$ et $x_0 = -\frac{1}{2}y_0 - 1 = -\frac{1}{3}$.