Opérades de Koszul et homologie des algèbres en caractéristique positive

Eric Hoffbeck

Thèse sous la direction de Benoit Fresse

8 septembre 2010

Index

Index

Motivations

But général

Etudier les propriétés homologiques et homotopiques des algèbres.

Algèbre = algèbre sur une opérade (Boardman-Vogt, May).

Opérades de Koszul

On s'intéresse plus particulièrement aux opérades de Koszul. (Ginzburg-Kapranov)

Pourquoi ?

- Elles ont de bonnes propriétés homologiques, ce qui facilite l'étude des algèbres associées.
  - Théorie homologique définie de façon explicite.
  - Structure comultiplicative sur l'homologie.
- Les exemples les plus usuels d'opérades sont de Koszul.

Résultat 1

Soit P une opérade présentée par générateurs et relations. Une base de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) est une base partiellement ordonnée de P qui vérifie une propriété de stabilité par rapport à la composition opéradique.

Théorème (E.H.)

Une opérade P possédant une base PBW est une opérade de Koszul. Son dual de Koszul $KP^{\#}$ a également une base PBW.

Ce résultat sera l'objet de la partie 2.

Retour aux motivations

En caractéristique nulle, pour P opérade de Koszul et A une algèbre sur P, on peut expliciter l'homologie opéradique :

$$H_*^{\mathrm{P}}(A) = H_*(K\mathrm{P} \circ A, \partial).$$

On retrouve notamment Hochschild pour *As*, Harrison pour *Com*, Chevalley-Eilenberg pour *Lie*.

On peut également définir une cohomologie opéradique. Celle-ci peut servir à obtenir une théorie d'obstruction pour les P-algèbres. (Livernet)

Résultat 2

En caractéristique positive, on a une théorie naturelle $H\Gamma_*^{\mathrm{P}}$ pour les P-algèbres avec de bonnes propriétés d'invariance homologique.

Théorème (E.H.)

Pour P opérade de Koszul, on a $H\Gamma_*^{\mathrm{P}}(A) = H_*(K\mathrm{P} \boxtimes \mathrm{E} \circ A, \partial)$.

La Γ-cohomologie $H\Gamma_{\mathrm{P}}^*(H_*A, H_*B)$ contient les obstructions à la réalisation de morphismes de P-algèbres $\phi : H_*A \to H_*B$ au niveau des chaînes.

Ces résultats seront l'objet de la partie 3.

Index

Conventions

On se donne une opérade présentée par générateurs et relations, $\mathrm{P} = F(M)/(R)$:

- M est le Σ_*-module des opérations génératrices
- $F(M)$ est l'opérade libre (compositions formelles d'éléments de M)
- R est l'ensemble des relations génératrices
- (R) est l'idéal engendré par ces relations.

On suppose que M n'a pas d'élément en arité 0 et possède une base ordonnée notée $\mathcal{B}^M$.

Point clé

Ordre "monomial" induit sur $F(M)$.

Base monomiale

L'opérade libre $F(M)$ est engendrée en tant que module par les arbres avec les entrées étiquetées par 1 à n et les sommets étiquetés par les éléments de M, et on identifie certaines classes d'isomorphismes d'arbres.

Pour définir une base monomiale de $F(M)$, on utilise que les arbres qui interviennent dans $F(M)$ possèdent une représentation planaire :

> Pour tout sommet v de l'arbre, on associe à tout sommet v' situé immédiatement au-dessus de v le minimum des feuilles reliées à v'. Les sommets v' et les feuilles immédiatement au-dessus de v sont placés de gauche à droite par ordre croissant.

La base monomiale $\mathcal{B}^{F(M)}$ est alors donnée par les arbres en représentation planaire étiquetés par $\mathcal{B}^M$.

Base monomiale

L'opérade libre $F(M)$ est engendrée en tant que module par les arbres avec les entrées étiquetées par 1 à n et les sommets étiquetés par les éléments de M, et on identifie certaines classes d'isomorphismes d'arbres.
Pour définir une base monomiale de $F(M)$, on utilise que les arbres qui interviennent dans $F(M)$ possèdent une représentation planaire :

> Pour tout sommet v de l'arbre, on associe à tout sommet v' situé immédiatement au-dessus de v le minimum des feuilles reliées à v'. Les sommets v' et les feuilles immédiatement au-dessus de v sont placés de gauche à droite par ordre croissant.

La base monomiale $\mathcal{B}^{F(M)}$ est alors donnée par les arbres en représentation planaire étiquetés par $\mathcal{B}^M$.

Shuffle pointé

Un *shuffle pointé d'une composition partielle* $\circ_i$ est une permutation préservant l'ordre des entrées de chaque tenseur arboré dans le produit de composition partielle et préservant l'entrée i.

Plus précisément, pour α un tenseur arboré à s entrées et β un tenseur arboré à t entrées, une permutation $w \in \Sigma_{t+s-1}$ est un shuffle pointé si les ordres des entrées de α et de β sont inchangés dans la composition $w.(\alpha \circ_i \beta)$ et si le minimum des entrées de β dans la composition est i.

Ordre

Axiome “d’ordre monomial opéradique”

Soient α, α' des éléments de $\mathcal{B}^{F(M)}$ à m entrées et β, β' des éléments de $\mathcal{B}^{F(M)}$ à n entrées.

$$\begin{cases} \alpha \leq \alpha' \\ \beta \leq \beta' \end{cases} \Rightarrow \forall i, w.(\alpha \circ_i \beta) \leq w.(\alpha' \circ_i \beta'), \ \forall w \text{ shuffle pointé.}$$

Plusieurs ordres naturels satisfont cet axiome.

Base PBW

Définition

Une *base PBW* de P est un ensemble $\mathcal{B}^{\mathrm{P}} \subset \mathcal{B}^{F(M)}$ d'éléments représentant une base du $\mathbb{K}$-module P, contenant l'unité, $\mathcal{B}^{M}$, et vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. Pour α et β dans $\mathcal{B}^{\mathrm{P}}$ et pour w un shuffle pointé de la composition $\alpha \circ_i \beta$, soit $w.(\alpha \circ_i \beta)$ est dans $\mathcal{B}^{\mathrm{P}}$, soit les éléments $\gamma \in \mathcal{B}^{\mathrm{P}}$ qui apparaissent dans la réécriture de $w.(\alpha \circ_i \beta) = \sum_\gamma c_\gamma \gamma$ vérifient $\gamma > w.(\alpha \circ_i \beta)$ dans $F(M)$.
2. Un tenseur arboré α est dans $\mathcal{B}^{\mathrm{P}}$ si et seulement si pour toute arête interne de l'arbre sous-jacent, le tenseur arboré restreint à cette arête est dans $\mathcal{B}^{\mathrm{P}}$.

Théorème PBW

Théorème (E.H.)

Une opérade P possédant une base PBW est une opérade de Koszul. Son dual de Koszul $KP^{\#}$ a également une base PBW.

Exemples : *Com*, *Lie*, *As*, *Poisson*, etc.

Perspectives

- Calcul d'homologie d'opérades dans le cadre non-Koszul. Par exemple dans le cas d'opérades non quadratiques.
- Base PBW pour les PROPs ?

Index

Conventions et but

On travaille dans le contexte des modules différentiels gradués sur un corps de base $\mathbb{K}$, de caractéristique quelconque.
On veut définir une théorie (co)homologique pour une algèbre A sur une opérade graduée P, et l'utiliser dans le cadre d'une théorie d'obstruction.

Dérivations opéradiques

Soit A et B des P-algèbres, et $\phi : B \to A$ morphisme de P-algèbres. Une dérivation $\theta \in \mathrm{Der}_{\mathrm{P}}(B, A)$ relativement à ϕ est une application de B dans A vérifiant

$$\theta(p(b_1, \ldots, b_n)) = \sum_{i=1}^{n} p(\phi b_1, \ldots, \theta b_i, \ldots, \phi b_n)$$

$\forall\, p \in \mathrm{P}(n), \forall\, b_1, \ldots, b_n \in B$.

Cohomologie (à coefficients adjoints)

Soit $\tilde{\mathrm{P}}$ un remplacement cofibrant de P. Les $\tilde{\mathrm{P}}$-algèbres forment de façon naturelle une catégorie de modèles.

Définition

$$H^*_{\tilde{\mathrm{P}}}(A, A) := H_*(\mathrm{Der}_{\tilde{\mathrm{P}}}(\tilde{A}, A))$$

où $\tilde{A} \xrightarrow{\sim} A$ est un remplacement cofibrant de A.

Ceci définit la cohomologie de A comme $\tilde{\mathrm{P}}$-algèbre.

Gamma-cohomologie

Théorème-Définition (E.H.)

$H\Gamma^*_{\mathrm{P}}(A, A) := H_*(\mathrm{Der}_{\tilde{\mathrm{P}}}(\tilde{A}, A))$ ne dépend pas du choix de $\tilde{\mathrm{P}}$ et de $\tilde{A}$, et définit la Γ-cohomologie opéradique de A.

Problème

On veut un complexe explicite calculant cette Γ-(co)homologie en évitant d'expliciter $\tilde{\mathrm{P}}$.

Théorème-Définition (E.H.)

$H\Gamma^*_{\mathrm{P}}(A, A) := H_*(\mathrm{Der}_{\tilde{\mathrm{P}}}(\tilde{A}, A))$ ne dépend pas du choix de $\tilde{\mathrm{P}}$ et de $\tilde{A}$, et définit la Γ-cohomologie opéradique de A.

Problème

On veut un complexe explicite calculant cette Γ-(co)homologie en évitant d'expliciter $\tilde{\mathrm{P}}$.

Explicitation des dérivations

Supposons $(\tilde{\mathrm{P}} \circ N \circ \tilde{\mathrm{P}}, \partial) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{P}}$ remplacement cofibrant de $\tilde{\mathrm{P}}$-bimodules.

Lemme

On a alors un remplacement cofibrant de A de la forme $\tilde{A} = (\tilde{\mathrm{P}} \circ N \circ A, \partial')$.

Observation

$$\mathrm{Der}_{\tilde{\mathrm{P}}}(\tilde{\mathrm{P}} \circ N \circ A, A) = \mathrm{Hom}(N \circ A, A)$$

Gamma-cohomologie opéradique

Corollaire

On a un isomorphisme $H\Gamma^*_{\mathrm{P}}(A, A) \simeq H_*(\mathrm{Hom}(N \circ A, A), \partial'')$ où $(\tilde{\mathrm{P}} \circ N \circ \tilde{\mathrm{P}}, \partial) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{P}}$ et ∂'' déterminé par ∂.

Théorème (E.H.)

On a un isomorphisme $H\Gamma^*_{\mathrm{P}}(A, A) \simeq H_*(\mathrm{Hom}(M \circ A, A), \partial'')$ où $(\mathrm{P} \circ M \circ \mathrm{P}, \partial) \xrightarrow{\sim} \mathrm{P}$ et ∂'' déterminé par ∂.

Gamma-cohomologie opéradique

Corollaire

On a un isomorphisme $H\Gamma^*_{\mathrm{P}}(A, A) \simeq H_*(\mathrm{Hom}(N \circ A, A), \partial'')$ où $(\tilde{\mathrm{P}} \circ N \circ \tilde{\mathrm{P}}, \partial) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{P}}$ et ∂'' déterminé par ∂.

Théorème (E.H.)

On a un isomorphisme $H\Gamma^*_{\mathrm{P}}(A, A) \simeq H_*(\mathrm{Hom}(M \circ A, A), \partial'')$ où $(\mathrm{P} \circ M \circ \mathrm{P}, \partial) \xrightarrow{\sim} \mathrm{P}$ et ∂'' déterminé par ∂.

Complexe explicite

Pour exploiter $H\Gamma^*_{\mathrm{P}}(A, A) = H_*(\mathrm{Hom}(M \circ A, A), \partial'')$, on explicite un choix de M quand P est de Koszul et binaire.

Théorème (E.H.)

On peut choisir $M = K\mathrm{P} \boxtimes \mathrm{E}$ où

- $\boxtimes$ est le produit tensoriel arité par arité
- $\mathrm{E} = C_*(E\Sigma_\bullet)$ (opérade de Barratt-Eccles).

La différentielle ∂ est obtenue par le coproduit de $K\mathrm{P}$ et des applications $c_{i,j}$ de Σ_r dans Σ_{r-1}.

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ w(1) & w(2) & \cdots & w(r) \end{pmatrix}.$$

Pour toute paire $\{i, j\}$, on forme la bijection

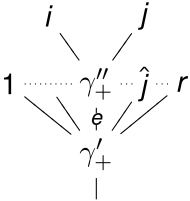
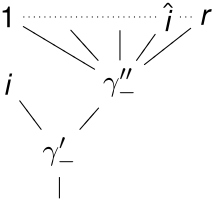
$$c^e_{i,j}(w) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & w^{-1}(i) & \cdots & \widehat{w^{-1}(j)} & \cdots & r \\ w(1) & w(2) & \cdots & e & \cdots & \widehat{j} & \cdots & w(r) \end{pmatrix}$$

si $w^{-1}(i) < w^{-1}(j)$ ou la bijection

$$c^e_{i,j}(w) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & w^{-1}(j) & \cdots & \widehat{w^{-1}(i)} & \cdots & r \\ w(1) & w(2) & \cdots & e & \cdots & \widehat{i} & \cdots & w(r) \end{pmatrix}$$

si $w^{-1}(j) < w^{-1}(i)$.

Soit $c \in \mathrm{Hom}(KP \boxtimes \mathrm{E} \circ A, A)$. Pour un élément $\gamma \in KP$ tel que

$$\Delta_+(\gamma) = \sum_{i<j}$$  et $$\Delta_-(\gamma) = \sum_{i}$$  ,

un simplexe $(w_0, \ldots, w_n) \in C_n(E\Sigma_r)$ et $a_1, \ldots, a_r$ dans A, on a :

$$\partial''(c\{\gamma \otimes (w_0, \ldots, w_n) \otimes (a_1, \ \ldots, a_r)\}) =$$

$$\sum_{i<j} \pm c\{\gamma'_+ \otimes (c^e_{i,j}(w_0), \ldots, c^e_{i,j}(w_n)) \otimes (a_1, \ \ldots, \kappa(\gamma''_+)(a_i, a_j), \ldots, \widehat{a}_j, \ldots a_r)\}$$

$$+ \sum_i \pm \kappa(\gamma'_-)(a_i, c\{\otimes \gamma''_- \otimes (c_{\emptyset,i}(w_0), \ldots, c_{\emptyset,i}(w_n)) \otimes (a_1, \ldots, \widehat{a}_i, \ldots, a_r)\}).$$

Automorphismes homotopiques 1

Soit $\tilde{A}$ une algèbre cofibrante sur $\tilde{\mathrm{P}}$.
Soit $haut_{\tilde{\mathrm{P}}}(\tilde{A}) := \{\phi : \tilde{A} \xrightarrow{\sim} \tilde{A}\}$.
On voudrait comprendre $\pi_0 haut_{\tilde{\mathrm{P}}}(\tilde{A}) = \{\phi : \tilde{A} \xrightarrow{\sim} \tilde{A}\}/\sim$ pour la relation d'homotopie :

$$\phi^0 \sim \phi^1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{tikzcd} \tilde{A} \arrow[d, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim\ \phi^0"] & \\ \tilde{A} \otimes \Delta^1 \arrow[r, dotted, "\exists \phi^t"] & \tilde{A} \\ \tilde{A} \arrow[u, "\sim"] \arrow[ur, "\sim\ \phi^1"'] & \end{tikzcd}$$

Automorphismes homotopiques 1

Soit $\tilde{A}$ une algèbre cofibrante sur $\tilde{\mathrm{P}}$.
Soit $haut_{\tilde{\mathrm{P}}}(\tilde{A}) := \{\phi : \tilde{A} \xrightarrow{\sim} \tilde{A}\}$.
On voudrait comprendre $\pi_0 haut_{\tilde{\mathrm{P}}}(\tilde{A}) = \{\phi : \tilde{A} \xrightarrow{\sim} \tilde{A}\}/\sim$ pour la relation d'homotopie :

$$\phi^0 \sim \phi^1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{tikzcd} \tilde{A} \arrow[d, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim\ \phi^0"] & \\ \tilde{A} \otimes \Delta^1 \arrow[r, dotted, "\exists \phi^t"] & \tilde{A} \\ \tilde{A} \arrow[u, "\sim"] \arrow[ur, "\sim\ \phi^1"'] & \end{tikzcd}$$

Automorphismes homotopiques 2

$$\pi_0 haut_{\tilde{\mathsf{P}}}(\tilde{A}) \xrightarrow{\Psi} \mathrm{aut}_{\mathsf{P}}(H_*\tilde{A}) = \mathrm{aut}_{\mathsf{P}}(H_*A)$$

Cette flèche est-elle injective ? surjective ?

Théorème (E.H.)

1. Si $H\Gamma^0_{\mathsf{P}}(H_*A, H_*A) = 0$, alors Ψ est injective.
2. Si $H\Gamma^1_{\mathsf{P}}(H_*A, H_*A) = 0$, alors Ψ est surjective.

Automorphismes homotopiques 2

$$\pi_0 haut_{\tilde{\mathsf{P}}}(\tilde{A}) \xrightarrow{\Psi} \mathrm{aut}_{\mathsf{P}}(H_*\tilde{A}) = \mathrm{aut}_{\mathsf{P}}(H_*A)$$

Cette flèche est-elle injective ? surjective ?

Théorème (E.H.)

1. Si $H\Gamma^0_{\mathsf{P}}(H_*A, H_*A) = 0$, alors Ψ est injective.
2. Si $H\Gamma^1_{\mathsf{P}}(H_*A, H_*A) = 0$, alors Ψ est surjective.

Perspectives

- Calcul de groupes de Gamma-homologie opéradique.
- Equivalent du théorème de Loday-Quillen-Tsygan en caractéristique positive.
- Identification à une homologie de foncteurs.
- Etude des $\pi_n haut_{\tilde{\mathrm{P}}}(\tilde{A})$.

Merci de votre attention.